РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

На правах рукописи

КОРШУНОВ Дмитрий Алексеевич

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЭРГОДИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Специальность 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

НОВОСИБИРСК – 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **6**

Глава I. **Предельные теоремы для общих цепей Маркова невозвратного типа** **18**

§ 1. Предварительные замечания 18

§ 2. Утверждения типа усиленного закона больших чисел для функции от цепи Маркова 20

§ 3. Изменение во времени значения характеристического функционала цепи Маркова 28

§ 4. Центральная предельная теорема для цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве 31

§ 5. Локальная оценка для распределения цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве 34

§ 6. Локальная центральная предельная теорема в решётчатом случае 39

§ 7. Локальная центральная предельная теорема в нерешётчатом случае 43

Глава II. **Вероятности больших уклонений в крамеровском случае** **47**

§ 8. Асимптотика супремума случайного блуждания 47

§ 9. Большие уклонения асимптотически однородных цепей 49

§ 10. Доказательство теорем 10 и 11 56

§ 11. Оценка второго члена асимптотики $\overline{\pi}(x)$ в крамеровском случае 63
§ 12. Вероятности больших уклонений сумм случайных величин . . . 66
§ 13. Принцип больших уклонений для асимптотически однородной цепи . . . 80
§ 14. Точная асимптотика $\overline{\pi}_n(x)$ для частично однородной цепи . . . 89
§ 15. Осциллирующее случайное блуждание . . . 94
§ 16. Марковская эволюция масс . . . 96
§ 17. Локальная теорема восстановления для невозвратной цепи Маркова . . . 101
§ 18. Некоторые предварительные оценки распределения марковской эволюции масс . . . 106
§ 19. Аналог центральной предельной теоремы для марковской эволюции масс . . . 111
§ 20. Вероятности больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова . . . 115
§ 21. Завершение доказательства теоремы 19 . . . 126
§ 22. Решётчатый случай . . . 131
§ 23. О положительности постоянного множителя c в теореме 19 . . . 132
§ 24. О необходимости условия интегрируемости скорости сближения распределения скачка с предельным . . . 136

Глава III. **Вероятности больших уклонений в субэкспоненциальном случае** **139**

§ 25. Асимптотика супремума случайного блуждания . . . 140
§ 26. Асимптотика хвоста супремума случайного блуждания когда среднее скачков не является конечным . . . 144
§ 27. Асимптотики и оценки для первой убывающей лестничной высоты в случае бесконечного среднего . . . 149

§ 28. Асимптотики и оценки для первой возрастающей лестничной высоты в случае бесконечного среднего 152
§ 29. Асимптотики и оценки для хвоста распределения супремума . . 154
§ 30. Достаточные условия субэкспоненциальности распределения интегральнго взвешанного хвоста 158
§ 31. Асимптотика распределения сумм случайных величин с локально субэкспоненциальным распределением 161
§ 32. Δ-Субэкспоненциальные распределения 163
§ 33. Распределения с субэкспоненциальными плотностями 174
§ 34. Достаточные условия Δ-субэкспоненциальности и субэкспоненциальности плотностей 180
§ 35. Некоторые приложения локальных асимптотик 183
§ 36. Функция восстановления и основная теорема восстановления . . 190
§ 37. Равномерная по времени асимптотика хвостов частичных максимумов сумм 195
§ 38. Оценка снизу для вероятностей больших уклонений максимума сумм 198
§ 39. Некоторые свойства распределений класса $\mathscr{S}_{\rm str}$ 200
§ 40. Оценка сверху для хвоста распределения первой до момента времени n неотрицательной суммы 204
§ 41. Оценка сверху для вероятностей больших уклонений максимума сумм 207
§ 42. Достационарные распределения цепей Маркова в субэкспоненциальном случае 209
§ 43. Оценка снизу вероятностей больших уклонений для достационарной цепи 212
§ 44. Оценки сверху вероятностей больших уклонений для достационарных и стационарных цепей 216

§ 45. Асимптотический анализ случайных блужданий с зависимыми приращениями в случае тяжёлых хвостов 229
§ 46. Оценки снизу 235
§ 47. Оценка сверху 242
§ 48. Асимптотики в случае правильно меняющихся хвостов 244

Глава IV. **Вероятности больших уклонений в промежуточном случае** **247**
§ 49. Асимптотика супремума случайного блуждания 247
§ 50. Точная асимптотика $\overline{\pi}_n(x)$ для асимптотически однородной цепи 251

Список литературы **259**

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $P(x,B)$, $x \in \mathbf{R}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, — некоторая однородная во времени переходная вероятность в $\mathbf{R}$; здесь и далее $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathbf{R}$. Всюду в настоящей диссертации параметр-время n принимает значения из множества целых неотрицательных чисел $\mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Рассмотрим цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями в $\mathbf{R}$ и с переходной вероятностью $P(\cdot,\cdot)$, т. е.

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} \in B \,|\, X_n = x\} \;=\; P(x,B).$$

Пусть π_n — распределение X_n: $\pi_n(B) = \mathbf{P}\{X_n \in B\}$. Обозначим через $\xi(x)$ случайную величину с тем же распределением, что и у скачка цепи $\{X_n\}$ из состояния x:

$$\mathbf{P}\{x + \xi(x) \in B\} \;=\; P(x,B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Определение 1. Цепь Маркова X называется *асимптотически однородной* (*в пространстве*), если распределение скачка $\xi(x)$ имеет слабый предел при $x \to \infty$, т. е. найдётся такая случайная величина ξ, что $\xi(x) \Rightarrow \xi$ при $x \to \infty$. Распределение ξ обозначается через F.

В настоящей диссертации рассматривается (главным образом) асимптотически однородная в пространстве цепь Маркова X. Предполагаем, что X_n — эргодическая Харрисова цепь, имеющая единственное инвариантное распределение π. Тогда распределение X_n сходится при $n \to \infty$ к π в метрике полной вариации, т. е.

$$|\pi_n - \pi|(\mathbf{R}) \equiv 2 \cdot \sup_{B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})} |\pi_n(B) - \pi(B)| \to 0 \tag{1}$$

(здесь и далее для любой знакопеременной меры μ и множества B через $|\mu|(B)$ обозначаем полную вариацию меры μ на множестве B). Для цепи X_n со счётным множеством состояний это имеет место автоматически, если цепь неразложимая, непериодическая и положительно возвратная; для вещественнозначных цепей соответствующие условия можно найти, например, в [6, 72].

Мера π доставляет решение уравнению

$$\pi(B) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} P(x, B)\pi(dx), \quad \pi(\mathbf{R}) = 1. \tag{2}$$

Ввиду сходимости (1) семейство распределений X_n относительно компактно, т. е.

$$\sup_{n \geqslant 0} \mathbf{P}\{X_n > x\} \to 0 \quad \text{ при } x \to \infty.$$

В настоящей диссертации исследуются условия, при которых асимптотическое поведение вероятности $\overline{\pi}_n(x) \equiv \mathbf{P}\{X_n > x\}$ при n, $x \to \infty$ возможно выписать в явном виде в терминах «локальных характеристик» цепи, прежде всего в терминах распределения F предельного скачка ξ. В том числе, исследуется асимптотика хвоста $\overline{\pi}(x) \equiv \pi(x, \infty)$ инвариантной меры π.

Для любого распределения G в $\mathbf{R}$ функцию $\overline{G}(x) \equiv G(x, \infty)$ называем *хвостом* распределения G.

Простейшим и одновременно с тем очень важным примером асимптотически однородной цепи Маркова является случайное блуждание W_n с задержкой в нуле (называемое в [87, 89] однородной в пространстве цепью Маркова), задаваемое рекуррентным равенством

$$W_{n+1} \;=\; (W_n + \xi_{n+1})^+, \tag{3}$$

где ξ_1, ξ_2, ... суть независимые копии случайной величины ξ. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и

$$M_n = \max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}. \quad (4)$$

Известно (см. например, [29, гл. VI, § 9]), что распределение цепи W_n с нулевым начальным условием $W_0 = 0$ совпадает с распределением M_n, т. е.

$$\mathbf{P}\{W_n > x | W_0 = 0\} = \mathbf{P}\{M_n > x\}. \quad (5)$$

В частности, если $W_0 = 0$, то последовательность W_n является стохастически возрастающей и, следовательно, имеет слабый предел; обозначим через W_∞ случайную величину с этим предельным распределением.

Известно (см. теорему 1 в [29, гл. XII, § 2]), что M_∞ (эквивалентно, W_∞) конечно почти наверное тогда и только тогда, когда $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1. Также известно, что если $\mathbf{E}\max(0,\xi)$ конечно, то $S_n \to -\infty$ почти наверное при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi \in [-\infty, 0)$; если $\mathbf{E}\max(0,\xi) = \infty$, то условия для почти наверное сходимости $S_n \to -\infty$ также давно известны, более подробно см. § 26. В диссертации почти всюду предполагается, что $\mathbf{E}\xi < 0$.

Другой важный пример — частично однородная в пространстве цепь Маркова, занимающая в некотором смысле промежуточное положение между случайным блужданием с задержкой в нуле и асимптотически однородной цепью Маркова.

Определение 2. Следуя [87], будем говорить, что цепь X со значениями в $\mathbf{R}$ является *U-частично однородной в пространстве* (или просто *частично однородной*), если для любого борелевского множества $B \subseteq (U, \infty)$ переходная вероятность $P(y, B)$ совпадает с вероятностью $\mathbf{P}\{y + \xi \in B\}$, когда y пробегает множество (U, ∞). Другими словами, в области (U, ∞) поведение цепи X совпадает с процессом суммирования независимых случайных величин, имеющих общее распределение F. Очевидно, что однородная цепь (случайное блуждание с задержкой в нуле) является 0-частично однородной.

Можно трактовать частично однородную цепь Маркова как *возмущённое* в некоторой окрестности нуля случайное блуждание, а асимптотически однородную цепь, в свою очередь, как ещё более сильно возмущённое случайное блуждание.

Асимптотическое поведение вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова X_n самым существенным образом определяется тем обстоятельством, допускает или нет предельный скачок ξ конечный экспоненциальный момент с положительным показателем. Это хорошо известно на примере W_n — случайного блуждания с задержкой в нуле. Кратко напомним основные факты, известные для стационарного распределения W_n, т. е. для W_∞.

Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$ случайной величины ξ есть функция выпуклая, причём $\varphi(0) = 1$ и $\varphi'(0) = \mathbf{E}\xi < 0$. Поэтому множество $\{\lambda : \varphi(\lambda) \leqslant 1\}$ представляет собой отрезок вида $[0, \beta]$, где

$$\beta = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) \leqslant 1\}.$$

Всюду предполагаем, что $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$. Поэтому число β конечно. Возможны лишь три случая:

(а) $\beta > 0$ и $\varphi(\beta) = 1$ — «крамеровский» случай;

(б) $\beta > 0$ и $\varphi(\beta) < 1$ — «промежуточный» случай;

(в) $\beta = 0$ — случай «тяжёлых хвостов», когда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} = \infty$ для любого $\lambda > 0$.

В работе рассматриваются все три случая, при этом основными являются крамеровский случай и случай тяжёлых хвостов.

Если имеет место крамеровский случай, то хорошо известна оценка, восходящая к Лундбергу и Крамеру: для любого $x \geqslant 0$ справедливо

$$\mathbf{P}\{W_\infty > x\} \ \leqslant \ e^{-\beta x}.$$

Если, кроме того, $\alpha \equiv \varphi'(\beta) = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}$ конечно, то (см., например, [29, гл. XII, § 5])

$$\mathbf{P}\{W_\infty > x\} \ \sim \ \frac{1-p}{\beta\widetilde{a}} e^{-\beta x} \ \text{ при } x \to \infty, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}\{M_\infty > 0\}, \\ \widetilde{a} &= \mathbf{E}\{S_\tau e^{\beta S_\tau}; \tau < \infty\}, \end{aligned}$$

где, в свою очередь,

$$\tau \ = \ \min\{n \geqslant 1 : S_n > 0\}.$$

Поскольку $\mathbf{E}\xi < 0$, то $p < 1$, а τ и S_τ — несобственные случайные величины.

Если имеет место случай тяжёлых хвостов, когда $\beta = 0$, то асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{W_\infty > x\}$ совершенно другое, и при некоторых условиях субэкспоненциальности (подробнее см. § 25) имеет место эквивалентность

$$\mathbf{P}\{W_\infty > x\} \ \sim \ \frac{1}{|\mathbf{E}\xi|} \int_x^\infty \overline{F}(y)dy \ \text{ при } x \to \infty. \tag{7}$$

Если же имеет место промежуточный случай, когда $\varphi(\beta) < 1$, то асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{W_\infty > x\}$ также своеобразно, и при некоторых условиях принадлежности классу $\mathscr{S}(\beta)$ (подробнее см. § 49) имеет место эквивалентность

$$\mathbf{P}\{W_\infty > x\} \ \sim \ \frac{\mathbf{E}e^{\beta W_\infty}}{1-\varphi(\beta)} \overline{F}(x) \ \text{ при } x \to \infty. \tag{8}$$

Крамеровский случай и случай тяжёлых хвостов сильно отличаются не только асимптотическим поведением вероятностей больших уклонений супремума, но и самой природой формирования этих больших уклонений. В крамеровском случае наиболее вероятными траекториями, приводящими к маловероятным большим уклонениям, являются траектории более или менее равномерного движения вверх; в формировании события $\mathbf{P}\{S_n > x\}$ свой вклад вносят все скачки случайного блуждания, причём в приблизительно равной мере. В случае же тяжёлых хвостов наиболее вероятный способ формирования больших уклонений — это присутствие одного большого скачка, сразу приводящего к уровню выше x.

В настоящей диссертации показывается, каким образом приведённая классификация для стационарного распределения случайного блуждания с задержкой в нуле может быть перенесена на асимптотически однородную в пространстве цепь Маркова. При этом также исследуются и достационарные распределения, а кроме того приводятся локальные асимптотики, изучение которых оправдано в случае тяжёлых хвостов. Естественно, что при этом техника доказательств, как и для однородных случайных блужданий, в каждом из трёх случаев принципиально различная, и потребовалось разработать новые подходы; подробнее см. соответствующие главы.

Выделение класса асимптотически однородных в пространстве цепей в качестве основного объекта исследования продиктовано тем обстоятельством, что среди эргодических цепей этот класс представляется максимально широким, для которого возможно вычисление вероятностей больших уклонений. Если не предполагать асимптотической однородности в пространстве, то известны лишь весьма грубые верхние оценки типа $\mathbf{P}\{X_n > x\} \leqslant x\delta(x)$, где $\delta(x)$ — функция, определяемая по общей мажоранте хвостов скачков цепи; см. теоремы 3.1 и 25.1 в [6]. Тесно связанная с этим проблематика существования моментов стационарного распределения в терминах пробных функций подробно рассмотрена Майном и Твиди в [72, гл. 14]. Из их результатов в силу неравенства Чебышёва легко выводятся верхние оценки (также несколько грубые) для вероятностей больших уклонений цепи как в случае степенных хвостов, так и в случае хвостов с конечными экспоненциальными моментами.

Диссертация организована следующим образом.

Известно, что важнейшую роль при исследовании вероятностей больших уклонений, особенно в крамеровском случае, играют различные предельные теоремы в области нормальных уклонений. Поэтому глава I, основанная на работе [92], посвящена предельным теоремам для цепей Маркова со значениями в измеримом пространстве; при этом однородность во времени переходных вероятностей, вообще говоря, не предполагается. В различных предположениях о природе пространства состояний цепи получены утверждения типа закона больших чисел, интегральной и локальной центральной предельной теоремы. Полученные результаты являются наиболее содержательными для невозвратных цепей Маркова.

В главе II изучаются асимптотически однородные в пространстве цепи Маркова в крамеровском случае, когда предельный скачок ξ удовлетворяет условию: существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) = 1$. Выделим следующие основные результаты. Прежде всего показано, что принцип больших уклонений для инвариантного распределения имеет место практически для любой асимптотически однородной цепи Маркова, т. е. почти всегда справедлива логарифмическая (грубая) асимптотика (см. теорему 10)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \pi(x,\infty)}{x} = -\beta.$$

В теореме 14 принцип больших уклонений доказывается для достационарного распределения. Далее основные усилия направлены на поиск условий, позволяющих вычислить точную асимптотику вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. Оказывается, чтобы найти точную асимптотику, недостаточно знать лишь, что цепь асимптотически однородна. Необходима дополнительная информация о скорости сближения распределения скачка $\xi(x)$ к предельному распределению F. Показывается, что упомянутая скорость сближения должна быть, грубо говоря, интегрируемой функцией. Тогда хвост инвариантной меры асимптотически эквивалентен

$$\pi(x,\infty) \ \sim \ ce^{-\beta x} \quad \text{при } x\to\infty.$$

Также найдена точная асимптотика хвоста достационарного распределения; основными являются теоремы 19 в § 20 и 20 в § 22. В частности, найдена зона значений времени n, в которой вероятность $\mathbf{P}\{X_n > x\}$ асимптотически эквивалентна хвосту $\pi(x,\infty)$ инвариантного распределения. Основные результаты главы II опубликованы в работах [86], [87], [88], [89] и [95].

В главе III исследуется случай тяжёлых хвостов. Основными являются теоремы 24 и 25 в § 26 об асимптотике хвоста супремума, когда скачки имеют бесконечное среднее значение; теорема 35 в § 37 об асимптотике конечного по времени максимума частичных сумм типа

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \ \sim \ \frac{1}{|\mathbf{E}\xi|}\int_x^{x+n|\mathbf{E}\xi|}\overline{F}(u)du$$

при $x\to\infty$ равномерно по $n\geqslant 1$; теорема 28 в § 32 о локальной асимптотике распределения суммы, остановленной в случайный момент времени; и, наконец, теорема 36 в § 42, утверждающая, что при весьма общих естественных условиях асимптотически однородная цепь Маркова в случае тяжёлых хвостов имеет следующую асимптотику вероятностей больших уклонений:

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \ \sim \ c\int_x^{x+n|\mathbf{E}\xi|}\overline{F}(u)du$$

при n, $x\to\infty$. Также в § 45 рассматривается случайное блуждание с зависимыми приращениями, когда скачки представляют собой процесс скользящих средних. Изложение в главе III основано на работах [87], [88], [90], [93], [94], [96] и [97].

В главе IV изучается промежуточный случай. Основной является теорема 42 в § 50 об асимптотике вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова в промежуточном случае, в которой выясняются условия, обеспечивающие при n, $x \to \infty$ выполнение асимптотики

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \;\sim\; c\overline{F}(x).$$

Результаты опубликованы в работах [87], [88] и [89].

С точки зрения приложений отметим следующие области применения полученных результатов.

(а) Во многих приложениях X_n описывает «нагрузку» некоторой физической системы и необходимо знать вероятность того, что эта нагрузка превзойдёт некоторый заданный большой уровень x. Это и есть вероятность $\overline{\pi}_n(x)$, приближённое значение которой изучается. Например, в одноканальной системе обслуживания $GI/GI/1$, в которой n-й вызов приходит после $(n-1)$-го через время τ_n и требует обслуживания в течении времени σ_n, время ожидания W_n n-го вызова удовлетворяет реккурентному соотношению

$$W_{n+1} \;=\; (W_n + \sigma_n - \tau_{n+1})^+.$$

Полагая $\xi_n = \sigma_{n-1} - \tau_n$, приходим к случайному блужданию с задержкой в нуле (3). Если же скорость обслуживания зависит от текущей нагрузки (текущего времени ожидания) в системе, то мы получаем марковскую последовательность вида $W_{n+1} = (W_n + \sigma_n(W_n) - \tau_{n+1})^+$, где $\sigma_n(x)$ имеет распределение, зависящее от x, что отражает зависимость скорости обслуживания от текущего состояния системы. Если упомянутая скорость имеет предел при стремлении состояния системы к бесконечности, то мы и приходим к асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова. Можно говорить о *возмущённой* системе обслуживания, а также о системе с *контролем*.

(б) В теории страхования (см., например, [49], [78] или [33, Ch. IX]) в модели Спарре — Андерсена предполагается через моменты времени τ_n наступают страховые случаи с величинами страховых выплат A_n. Если интенсивность страховых взносов равна c, а первоначальный страховой резерв равен x, то вероятность разорения страховой компании после наступления n-го страхового случая равна $\mathbf{P}\{M_n > x\}$, где $\xi_{n+1} = A_n - c\tau_n$, см. (4). Если же пересматривать страховые взносы (т. е. значение интенсивности c) в зависимости от текущего капитала страховой компании после наступления очередного страхового случая, то мы опять приходим к процессу, скачки которого зависят от его состояния.

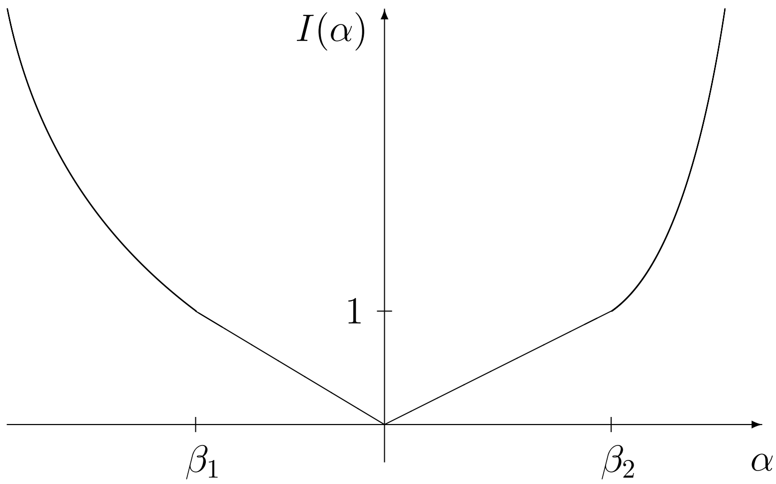
(в) Случайные блуждания и цепи Маркова, скачки которых обладают экспоненциальными моментами, часто возникают при решении статистической задачи о разладке. Например, знание асимптотики стационарного распределения асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова оказывается полезным при исследовании последовательных процедур определения разладки, см. [4].

(г) Полученные результаты позволяют установить существование «моментов» $\mathbf{E}f(X_n)$ для заданного класса растущих функций f, оперировать этими моментами в разного рода задачах оптимизации и оценивать эти моменты с помощью метода Монте–Карло. Кроме того, если установлено, например, что $\overline{\pi}(x) \sim cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$, где какие-либо из параметров c, α или β в явном виде неизвестны, то с помощью метода Монте–Карло можно оценивать также и эти параметры (см., например, [2, гл. 5, § 68], [50, 62, 21]); при этом для получения более полной информации об оценках полезно знать также следующий член асимптотики $\overline{\pi}(x)$, т. е. асимптотическое поведение $\overline{\pi}(x) - cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$ при $x \to \infty$ (вопрос оценки этой разности затрагивается в § 11).

Несколько слов относительно примыкающей (но другой) тематике по большим уклонениям для цепей и процессов Маркова. Большое число работ посвящено многомерным эргодическим цепям Маркова (см. список литературы в [12]). Наиболее совершенные результаты в этом направлении, в том числе точные асимптотики, получены Боровковым и Могульским в [12]. При этом рассматриваются только частично однородные в пространствах $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ цепи Маркова; исследование асимптотически однородных цепей в многомерном случае представляется весьма затруднительным. В одномерном случае ситуация более благоприятная, и в настоящей диссертации удалось разработать подходы к исследованию асимптотически однородных цепей Маркова со значениями в $\mathbf{R}$.

Другое обширное направление исследований — грубые (в основном) теоремы о вероятностях больших уклонений в функциональных пространствах для марковских процессов, связанные с именами Вентцеля и Фрейдлина (см. книгу Вентцеля [14]; см. также § 5.4 в книге Пухальского [77]). В этих монографиях результаты, известные для классических случайных блужданий (т. е. для последовательностей частичных сумм независимых слагаемых), обобщаются на более общие марковские процессы. Достигаемая при этом общность ограничена процессами с так называемыми непрерывными статистиками. Однако эргодические цепи Маркова, например, однородное случайное блуждание на полуоси или осциллирующее блуждание, не удовлетворяют соответствующим условиям непрерывности некоторых характеристик, как это предполагается в [14].

Блуждание типа осциллирующего рассмотрено в работе Дюпии и Эллиса [51], а в несколько более общей постановке в книге тех же авторов [52, Chapter 7]. Изучена цепь Маркова со значениями в $\mathbf{R}^d$, фазовое пространство которой разделено на две области $D_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^d : \vec{x}_1 \leqslant 0\}$ и $D_2 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^d : \vec{x}_1 > 0\}$. В области D_1 цепь имеет скачки с общим распределением F_1, а в области D_2 — с F_2. Дюпии и Эллис нашли функцию уклонений $I(\alpha)$ случайного блуждания такого типа. В случае эргодического одномерного блуждания (т. е. когда F_1 имеет положительное среднее значение, а F_2 — отрицательное) она имеет вид



Здесь $\beta_1 < 0$ и $\beta_2 > 0$ — ненулевые решения уравнений относительно λ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u} F_1(du) &= 1, \\ \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u} F_2(du) &= 1 \end{aligned}$$

соответственно. Функция $I(\alpha)$ выпуклая и кусочно линейная в областях $[\beta_1, 0]$ и $[0, \beta_2]$. При выполнении некоторых дополнительных технических условий авторы доказали принцип больших уклонений типа

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{X_n > n\alpha\} &= I(\alpha), \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{X_n \leqslant -n\alpha\} &= I(-\alpha). \end{aligned}$$

С точки зрения нашего подхода одномерное осциллирующее случайное блуждание есть частный случай 0-частично однородных цепей Маркова. Тем самым из наших результатов для U-частично однородных цепей Маркова напрямую вытекает принцип больших уклонений, причём при существенно более слабых ограничениях на скачки (см. § 15).

ГЛАВА I

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА НЕВОЗВРАТНОГО ТИПА

§ 1. Предварительные замечания

В отличие от остальных глав, в настоящей рассматривается цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями в измеримом пространстве, не являющаяся, вообще говоря, однородной во времени. В различных предположениях о природе пространства состояний цепи получены утверждения типа закона больших чисел, интегральной и локальной центральной предельной теоремы для X_n. Полученные результаты являются наиболее содержательными для невозвратных цепей Маркова.

Пусть S — измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых множеств $\mathscr{B}(S)$. Пусть $P_n(x, B)$, $x \in S$, $B \in \mathscr{B}(S)$, — некоторая переходная вероятность в S; параметр-время n принимает значения из $\mathbf{Z}^+$. В настоящей главе однородность переходной вероятности во времени n не предполагается. Рассмотрим цепь Маркова $X = \{X_n,\ n \in \mathbf{Z}^+\}$ со значениями в S и с переходной вероятностью $P_n(\cdot,\cdot)$, т. е.

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} \in B \,|\, X_n = x\} = P_n(x, B).$$

В § 2 настоящей главы выясняются условия, при которых $f(X_n)/n$ сходится почти наверное к некоторому пределу, где $f\colon S \to \mathscr{Y}$ — функция со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$. Рассматривается так называемое p-гладкое банахово пространство.

В § 3 исследуется поведение во времени характеристического функционала цепи Маркова со значениями в произвольном сепарабельном банаховом пространстве.

В § 4 для цепи Маркова со значениями в конечномерном евклидовом пространстве формулируются условия, при которых X_n удовлетворяет центральной предельной теореме.

В § 5 выводится верхняя оценка вероятности попадания в компакт асимптотически однородной во времени и по пространству (в некотором направлении) цепи Маркова со значениями в $\mathbf{R}^d$.

В § 6 для асимптотически однородной цепи Маркова со значениями на целочисленной решётке $\mathbf{Z}^d$ доказана локальная центральная предельная теорема. В § 7 доказывается аналог этой теоремы для нерешётчатой цепи Маркова со значениями в $\mathbf{R}^d$.

Хотя в условиях теорем явно не оговаривается, является ли цепь Маркова $\{X_n\}$ положительно возвратной, нуль-возвратной или невозвратной, предлагаемые результаты являются наиболее содержательными для невозвратных цепей. Более того, в ряде теорем явно предполагается, что значение цепи X_n «уходит на бесконечность в некотором направлении».

С точки зрения усиленного закона больших чисел и центральной предельной теоремы в литературе лучше всего изучены положительно возвратные по Харрису (эргодические) однородные во времени цепи Маркова (см., например, [72, § 17]). Некоторые результаты, относящиеся к центральной предельной теореме для неоднородных во времени эргодических цепей Маркова можно найти в [17, 18]. Отметим, что для эргодических цепей, в отличие от невозвратных цепей (на изучение которых в основном и направлена настоящая глава), более естественной оказывается задача исследования асимптотического поведения распределения *сумм* значений функции $f\colon S \to \mathbf{R}$ от цепи Маркова, т. е. распределения $f(X_1) + \cdots + f(X_n)$. При этом использование циклической структуры эргодической цепи (циклов по возвращению в атомарное состояние) так или иначе сводит задачу к известным предельным теоремам о суммах независимых случайных величин.

§ 2. Утверждения типа усиленного закона больших чисел для функции от цепи Маркова

2.1. Усиленный закон больших чисел для мартингалов в банаховых пространствах. Пусть $p \in [1, 2]$. Говорят, что банахово пространство $\mathscr{Y}$ с нормой $\|\cdot\|$ является p-гладким, если найдется такая константа $D < \infty$, что для любых векторов x и $y \in \mathscr{Y}$, $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqslant 1$, имеет место неравенство

$$\|x+y\| + \|x-y\| \ \leqslant \ 2 + D\|y\|^p. \tag{9}$$

Из определения вытекает, что p-гладкое банахово пространство $\mathscr{Y}$ является p_1-гладким для любого $p_1 \in [1, p]$.

Любое банахово пространство является 1-гладким при $D = 2$ (неравенство треугольника). Банахово пространство $\mathscr{Y}$ является 2-гладким тогда и только тогда, когда найдется такая константа $D < \infty$, что имеет место неравенство

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \ \leqslant \ 2\|x\|^2 + D\|y\|^2 \tag{10}$$

(см. [75]). Если $\mathscr{Y}$ — гильбертово пространство, оно автоматически является 2-гладким, поскольку неравенство (10) превращается в равенство с $D = 2$ (равенство параллелограмма).

Известен (см. [64, теорема 2.2] и [76]) следующий усиленный закон больших чисел для мартингалов в сепарабельных банаховых пространствах (сепарабельность предполагается для того, чтобы операция сложения случайных элементов со значениями в этом пространстве была измеримой).

Теорема 1. *Пусть последовательность случайных элементов Z_n, $n = 1, 2, \ldots$, со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$ образует мартингал относительно некоторого потока σ-алгебр основного вероятностного пространства. Если для некоторого $p \in [1,2]$ банахово пространство $\mathscr{Y}$ является p-гладким и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\|X_{n+1} - X_n\|^p}{n^p}$$

сходится, то $X_n/n \to 0$ при $n \to \infty$ почти наверное.

2.2. Функция от цепи Маркова. Пусть $\mathscr{Y}$ — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и σ-алгеброй борелевских множеств $\mathscr{B}(\mathscr{Y})$. Через $\mathscr{L}\!im_{n\to\infty} y_n$ обозначаем множество предельных точек последовательности $\{y_n\}$, т. е. множество всех $y \in \mathscr{Y}$ таких, что $y_{n_k} \to y$ для некоторой подпоследовательности индексов $n_k \to \infty$. Множество предельных точек с необходимостью замкнуто.

Пусть f — измеримая функция из S в $\mathscr{Y}$. Обозначим через $\eta_n(x)$, $x \in S$, случайный вектор, отвечающий скачку процесса $Y_n = f(X_n)$, т. е. такой случайный вектор, что для любого $B \in \mathscr{B}(\mathscr{Y})$

$$\mathbf{P}\{\eta_n(x) \in B\} = \mathbf{P}\{f(X_{n+1}) - f(X_n) \in B \mid X_n = x\}.$$

Положим

$$m_n^X(x) = \mathbf{E}\eta_n(x).$$

Здесь и далее под математическим ожиданием понимается интеграл Бохнера.

На множестве случайных величин введём отношение частичного порядка $\leqslant_{\mathrm{st}}$: для любых двух случайных величин η_1 и η_1 пишем $\eta_1 \leqslant_{\mathrm{st}} \eta_2$, если $\mathbf{P}\{\eta_1 > x\} \leqslant \mathbf{P}\{\eta_2 > x\}$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Теорема 2. *Пусть для некоторого $p \in (1,2]$ банахово пространство $\mathscr{Y}$ является p-гладким. Пусть множество $\widetilde{B} \in \mathscr{B}(\mathscr{Y})$ таково, что при $N \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\mathbf{P}\Big\{f(X_n) \in \widetilde{B} \text{ при всех } n \geqslant N\Big\} \ \to\ 1. \tag{11}$$

Пусть для некоторых момента времени $\widetilde{N}$ и замкнутого выпуклого множества M из $\mathscr{B}(\mathscr{Y})$ справедливо включение

$$\{m_n^X(x):\ n \geqslant \widetilde{N},\ f(x) \in \widetilde{B}\} \ \subseteq\ M. \tag{12}$$

Кроме того, пусть семейство случайных величин $\{\|\eta_n(x)\|,\ n \geqslant \widetilde{N},\ f(x) \in \widetilde{B}\}$ обладает интегрируемой мажорантой, т. е. найдётся такая случайная величина η с конечным средним значением, что

$$\|\eta_n(x)\| \ \leqslant_{\mathrm{st}}\ \eta \text{ для любых } n \geqslant \widetilde{N} \text{ и } f(x) \in \widetilde{B}. \tag{13}$$

Тогда почти наверное

$$\mathop{\mathscr{L}\!im}_{n\to\infty} \frac{f(X_n)}{n} \ \subseteq\ M.$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $\widetilde{N} = 0$. Сначала предположим дополнительно, что случайная величина η является мажорантой не только для семейства $\{\|\eta_n(x)\|,\ n \geqslant 0,\ f(x) \in \widetilde{B}\}$, но и для всего семейства $\{\|\eta_n(x)\|,\ n \geqslant 0,\ x \in S\}$, т. е.

$$\|\eta_n(x)\| \ \leqslant_{\mathrm{st}}\ \eta \text{ для любых } n \geqslant 0 \text{ и } x \in S. \tag{14}$$

Прежде всего отметим, что ввиду условий (11) и (12) почти наверное имеет место включение:

$$\mathop{\mathscr{L}\!im}_{n\to\infty} \mathbf{E}\{f(X_{n+1}) - f(X_n) \,|\, X_n\} \equiv \mathop{\mathscr{L}\!im}_{n\to\infty} m_n^X(X_n) \ \subseteq\ M. \tag{15}$$

Для любых числа $c > 0$ и точки $x \in S$ положим

$$B_x^{[c]} = \{u \in S : \|f(u) - f(x)\| \leqslant c\}.$$

Определим переходную вероятность $P_n^{[c]}(x, B)$ и случайный вектор $\eta_n^{[c]}(x)$ равенствами

$$P_n^{[c]}(x, B) \;\equiv\; \begin{cases} P_n(x, B \cap B_x^{[c]}), & \text{если} \quad x \notin B, \\ P_n(x, B \cap B_x^{[c]}) + P_n(x, \{S \setminus B_x^{[c]}\}), & \text{если} \quad x \in B, \end{cases}$$

и

$$\eta_n^{[c]}(x) \;\equiv\; \begin{cases} \eta_n(x), & \text{если} \quad \|\eta_n(x))\| \leqslant c, \\ 0, & \text{если} \quad \|\eta_n(x))\| > c. \end{cases}$$

По построению распределение случайного вектора $\eta_n^{[c]}(x)$ совпадает с распределением разности $f(Z) - f(x)$, где Z имеет распределение $P_n^{[c]}(x, \cdot)$.

Пусть $A > 0$. Рассмотрим цепь Маркова Y_n, $Y_0 = X_0$, с переходными вероятностями $P_n^{[An]}(\cdot, \cdot)$. Цепи Y_n и X_n можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что вероятность несовпадения траекторий Y_n и X_n не будет превосходить

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Y_n \neq X_n \text{ для некоторого } n\} \;&\leqslant\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\|f(X_{n+1}) - f(X_n)\| > An\} \\ &\leqslant\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta > An\} \leqslant \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \end{aligned} \tag{16}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{ \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{f(X_n)}{n} \neq \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{f(Y_n)}{n} \right\} \;\leqslant\; \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \tag{17}$$

Положим

$$m_n^Y(Y_n) \;=\; \mathbf{E}\{f(Y_{n+1}) - f(Y_n) \,|\, Y_n\} \equiv \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(x)\Big|_{x=Y_n}$$

и

$$\Delta_n \;=\; f(Y_{n+1}) - f(Y_n) - m_n^Y(Y_n),$$

так что

$$f(Y_n) - f(Y_0) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} m_k^Y(Y_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \equiv Z_n^0 + Z_n^1.$$

В силу условия (14) на скачки $\eta_n(x)$ имеем оценку

$$\|m_k^Y(Y_k) - m_k^X(Y_k)\| \ \leqslant \ \mathbf{E}\{\eta; \eta > Ak\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Z_n^0}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(Y_k) \right\| \ &\leqslant \ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| m_k^Y(Y_k) - m_k^X(Y_k) \right\| \\ &\leqslant \ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\{\eta; \eta > Ak\}. \end{aligned}$$

Ввиду конечности $\mathbf{E}\eta$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\{\eta; \eta > Ak\} \ \to \ 0$$

при $n \to \infty$ и, следовательно, на всех элементарных исходах

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0}{n} \ = \ \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(Y_k). \tag{18}$$

Из (16) имеем оценку

$$\mathbf{P}\left\{ \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(Y_k) \neq \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(X_k) \right\} \ \leqslant \ \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \tag{19}$$

Поскольку множество M замкнуто и выпукло, из (15) вытекает почти наверное включение

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(X_k) \ \subseteq \ M. \tag{20}$$

Соотношения (18)–(20) влекут оценку

$$\mathbf{P}\left\{ \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0}{n} \subseteq M \right\} \ \geqslant \ 1 - \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \tag{21}$$

Ввиду того, что последовательность Y_n является цепью Маркова и по определению Δ_n имеем равенства

$$\mathbf{E}\{\Delta_n \,|\, Y_0, \ldots, Y_n\} = \mathbf{E}\{\Delta_n \,|\, Y_n\} = 0.$$

Ввиду этого процесс Z_n^1 образует мартингал относительно потока σ-алгебр $\sigma(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$. Докажем, что приращения данного мартингала удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\|\Delta_n\|^p}{n^p} \;<\; \infty. \tag{22}$$

Для любого x по построению Δ_n, в силу неравенства $\|a+b\|^p \leqslant 2^p\|a\|^p + 2^p\|b\|^p$ и ввиду условия (14) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{\|\Delta_n\|^p \,|\, Y_n = x\} \;&=\; \mathbf{E}\|\eta_n^{[An]}(x) - \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(x)\|^p \\
&\leqslant\; 2^p\mathbf{E}\|\eta_n^{[An]}(u)\|^p + 2^p\|\mathbf{E}\eta_n^{[An]}(u)\|^p \\
&\leqslant\; 2^{p+1}\mathbf{E}\{\eta^p; \eta \leqslant An\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\|\Delta_n\|^p}{n^p} \;\leqslant\; 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^p; \eta \leqslant An\}}{n^p}.$$

Последний ряд сходится при любом значении A, так как

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^p; \eta \leqslant An\}}{n^p} \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^p}{n^p}\mathbf{E}\{(\eta/A)^p; \eta/A \leqslant n\} \\
&\leqslant\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^p}{n^p} \sum_{k=1}^{n} k^p \mathbf{P}\{k-1 < \eta/A \leqslant k\} \\
&=\; A^p \sum_{k=1}^{\infty} k^p \mathbf{P}\{k-1 < \eta/A \leqslant k\} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\
&<\; \infty,
\end{aligned}$$

в силу эквивалентности $\sum_{n=k}^{\infty} 1/n^p \sim k/k^p$ (так как $p > 1$) и существования $\mathbf{E}\eta$.

Итак, мартингал Z_n^1 действительно удовлетворяет условию (22) и можно воспользоваться теоремой 1, согласно которой $Z_n^1/n \to 0$ при $n \to \infty$ почти наверное. Следовательно, имеет место следующее равенство почти наверное:

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{f(Y_n) - f(Y_0)}{n} \equiv \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0 + Z_n^1}{n} = \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0}{n}.$$

Утверждение теоремы при дополнительном условии (14) вытекает теперь из (21) в силу произвольности выбора числа A.

Откажемся теперь от выполнения условия (14). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Ввиду условия (11) найдется момент времени $N_1 \geqslant 1$ такой, что

$$\mathbf{P}\{f(X_n) \in \widetilde{B} \text{ для любого } n \geqslant N_1\} \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{23}$$

Рассмотрим вспомогательную, также неоднородную во времени цепь Маркова $\widetilde{X}_n$, у которой переходные вероятности $\widetilde{P}_n(x, \cdot)$ совпадают с $P_n(x, \cdot)$ при $f(x) \in \widetilde{B}$ и равны $\mathbf{I}\{x \in \cdot\}$ при $f(x) \notin \widetilde{B}$. В частности, $\widetilde{\eta}_n(x) = \eta_n(x)$ при $f(x) \in \widetilde{B}$ и $\widetilde{\eta}_n(x) = 0$ при $f(x) \notin \widetilde{B}$. Поэтому в силу (13) приращения $\widetilde{\eta}_n(x)$ удовлетворяют условию (14). Следовательно, по теореме 2 почти наверное справедливо включение

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} f(\widetilde{X}_n)/n \subseteq M.$$

Если при этом рассмотреть не все значения цепи Маркова $\widetilde{X}_n$, а лишь $\{\widetilde{X}_n, n \geqslant N_1\}$ и распределение $\widetilde{X}_{N_1}$ взять совпадающим с распределением X_{N_1}, то ввиду (23) имеем, что траектории цепей X_n и $\widetilde{X}_n$ совпадают при $n \geqslant N_1$ с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} f(X_n)/n \subseteq M\right\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Учитывая произвольность выбора числа $\varepsilon > 0$, приходим к заключению теоремы.

2.3. Усиленный закон больших чисел для одномерной цепи Маркова с асимптотически однородным сносом. В настоящем разделе рассматривается цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой $\mathbf{R}$. Обозначим через $\xi_n(x)$ случайную величину, распределение которой соответствует распределению скачка цепи $\{X_n\}$ из состояния x в момент времени n, т. е. $\mathbf{P}\{x + \xi_n(x) \in B\} = P_n(x, B)$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

Будем говорить, что цепь X_n со значениями в $\mathbf{R}$ является *цепью с асимптотически однородным* (*во времени и в пространстве*) *сносом*, если $\mathbf{E}\xi_n(x)$ сходится при n, $x \to \infty$ к некоторому числу $\mu \in \mathbf{R}$ (при этом не имеется в виду существование $\mathbf{E}\xi_n(x)$ при всех значениях n и x).

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть цепь Маркова X_n имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu \geqslant 0$ и имеет место сходимость почти наверное*

$$X_n \;\to\; \infty \quad \text{\textit{при} } n \to \infty. \tag{24}$$

Пусть для некоторого пространственного уровня U и момента времени N семейство случайных величин $\{|\xi_n(u)|,\ n \geqslant N,\ u \geqslant U\}$ обладает интегрируемой мажорантой, т. е. что существует такая случайная величина ξ с конечным средним значением, что $|\xi_n(u)| \leqslant_{\mathrm{st}} \xi$ для любых $n \geqslant N$ и $u \geqslant U$. Тогда $X_n/n \to \mu$ при $n \to \infty$ почти наверное.

Замечание 1. Простейшие примеры цепей Маркова, удовлетворяющих условиям теоремы, дают (а) обычный процесс суммирования $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... с положительным средним значением и (б) случайное блуждание с задержкой в нуле $X_{n+1} = \max(0, X_n + \xi_n)$.

З а м е ч а н и е 2. Для неприводимой счётной цепи Маркова со значениями в $\mathbf{Z}^+$ условие (24) эквивалентно невозвратности цепи.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\mathbf{E}\xi_n(x) \to \mu$, найдутся $\widetilde{N} > N$ и $\widetilde{U} > U$ такие, что

$$\mathbf{E}\xi_n(x) \in [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon] \;\text{ при } n \geqslant \widetilde{N} \;\text{ и } x \geqslant \widetilde{U}.$$

Ввиду условия (24),

$$\lim_{N_1 \to \infty} \mathbf{P}\{X_n \geqslant \widetilde{U} \text{ для любого } n \geqslant N_1\} \;\to\; 1.$$

Итак, цепь X_n удовлетворяет условиям теоремы 2 при $S = \mathscr{Y} = \mathbf{R}$, $f(x) = x$, $\widetilde{B} = [\widetilde{U}, \infty)$ и $M = [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$. Следовательно, почти наверное справедливо включение

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n \to \infty} X_n/n \;\subseteq\; [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon].$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, теорема доказана.

§ 3. Изменение во времени значения характеристического функционала цепи Маркова

Характеристический функционал суммы независимых слагаемых равен произведению характеристических функционалов самих слагаемых. В настоящем параграфе выясняется, в какой степени это утверждение сохраняется для цепи Маркова со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$.

3.1. Оценка близости значения характеристического функционала цепи к произведению характеристических функционалов скачков.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda : \mathscr{Y} \to \mathbf{R}$ — *линейный функционал. Для любых* $n \geqslant 1$, $k \leqslant n$ *и комплексного числа* $\varphi \in \mathbf{C}$, $|\varphi| \leqslant 1$, *справедливо неравенство (здесь* i — *мнимая единица)*

$$\left|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)} - \varphi^{n-k}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_k)}\right| \;\leqslant\; \sum_{j=k}^{n-1} \delta_j |\varphi|^{n-j-1},$$

где

$$\delta_j \;=\; \sup_{x\in\mathscr{Y}} |\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_j(x))} - \varphi|. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $j \in [k+1, n]$. В силу линейности λ и марковости $\{X_n\}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_j)} \;&=\; \mathbf{E}\Big\{\mathbf{E}\Big\{e^{i\lambda(X_j - X_{j-1})}e^{i\lambda(X_{j-1})}\Big|\, X_{j-1}\Big\}\Big\} \\ &=\; \int_{\mathscr{Y}} (\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_{j-1}(x))})e^{i\lambda(x)}\mathbf{P}\{X_{j-1}{\in}dx\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_j)} - \varphi\mathbf{E}e^{i\lambda(X_{j-1})}\right| \;&=\; \left|\int_{\mathscr{Y}} \Big(\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_{j-1}(x))} - \varphi\Big)e^{i\lambda(x)}\mathbf{P}\{X_{j-1}{\in}dx\}\right| \\ &\leqslant\; \delta_{j-1},\end{aligned}$$

ввиду (140). Отсюда выводим неравенства

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)} - \varphi^{n-k}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_k)}\right| \;&\leqslant\; \sum_{j=k+1}^{n} \left|\varphi^{n-j}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_j)} - \varphi^{n-(j-1)}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_{j-1})}\right| \\ &\leqslant\; \sum_{j=k+1}^{n} \delta_{j-1}|\varphi|^{n-j},\end{aligned}$$

Лемма доказана.

3.2. Оценка близости в терминах множеств высокой вероятности. В формуле (25) величина δ_j определялась как максимальное по всему фазовому пространству отклонение значения характеристического функционала скачка цепи от некоторого комплексного числа $\varphi \in \mathbf{C}$. В формулируемой ниже лемме значение δ_j определяется как максимальное отклонение значения характеристического функционала скачка цепи от φ не на всем фазовом пространстве, а лишь на некотором множестве; при применении этой леммы в следующих параграфах соответствующие множества имеют вероятность близкую к 1.

Пусть B_0, B_1, …— некоторые множества в $\mathscr{Y}$. Для $k \leqslant n$ обозначим событие

$$B_{k,n} \;=\; \Big\{X_j \in B_j \text{ для любого } j \in [k,n]\Big\}.$$

События $B_{k,n}$ образуют невозрастающую по n последовательность.

Лемма 2. *Пусть $\lambda : \mathscr{Y} \to \mathbf{R}$ — линейный функционал. Для любых $n \geqslant 1$, $k \leqslant n$ и комплексного числа $\varphi \in \mathbf{C}$, $|\varphi| \leqslant 1$, справедливо неравенство*

$$\Big|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)} - \varphi^{n-k}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_k)}\Big| \;\leqslant\; \sum_{j=k}^{n-1} \delta_j |\varphi|^{n-j-1} + 2\Big(1 - \mathbf{P}\{B_{k,n-1}\}\Big),$$

где

$$\delta_j \;=\; \sup_{x \in B_j} |\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_j(x))} - \varphi|. \tag{26}$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $k = 0$. Для любого n выберем произвольную точку x_n из множества B_n. Определим вспомогательную цепь $\widetilde{X}_n$ со скачками $\widetilde{\xi}_n(x)$, положив $\widetilde{\xi}_n(x) = \xi_n(x)$ при $x \in B_n$ и $\widetilde{\xi}_n(x) = \xi_n(x_n)$ при $x \notin B_n$. По построению и ввиду (26) для цепи $\widetilde{X}_n$ выполняется

$$\delta_j \;=\; \sup_{x \in \mathscr{Y}} |\mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{\xi}_j(x))} - \varphi|.$$

Поэтому по лемме 1 имеем оценку

$$\Big|\mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{X}_n)} - \varphi^n\mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{X}_0)}\Big| \;\leqslant\; \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j |\varphi|^{n-j-1}.$$

Положим $\widetilde{X}_0 = X_0$. Тогда ввиду марковости и совпадения скачков двух цепей на событии $B_{0,n-1}$ значения X_n и $\widetilde{X}_n$ совпадают с вероятностью, не меньшей $\mathbf{P}\{B_{0,n-1}\}$. Поэтому

$$\left|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)} - \mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{X}_n)}\right| \ \leqslant\ 2\Big(1 - \mathbf{P}\{B_{0,n-1}\}\Big),$$

что и завершает доказательство оценки леммы.

§ 4. Центральная предельная теорема для цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве

В настоящем параграфе исследуется цепь Маркова в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Для скалярного произведение двух векторов-строк ξ и $\eta \in \mathbf{R}^d$ используем обозначение $\langle \xi, \eta \rangle$. Под вектором-столбцом ξ^T понимаем транспонированный вектор-строку ξ.

4.1. Центральная предельная теорема. В следующей теореме выясняются достаточные условия, при которых цепь Маркова со значениями в $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет центральной предельной теореме.

Теорема 4. *Пусть невозрастающая последовательность множеств $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots$ в $\mathbf{R}^d$ такова, что при $N \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{X_n \in B_n \text{ для любого } n \geqslant N\} \ \to\ 1. \tag{27}$$

Пусть для некоторого момента времени $\widetilde{N}$ семейство $\{\|\xi_n(x)\|^2,\ n \geqslant \widetilde{N},\ x \in B_0\}$ интегрируемо равномерно по n и x. Если для некоторых вектора $\mu \in \mathbf{R}^d$ и симметричной неотрицательно определенной матрицы σ^2 размеров $d \times d$ имеют место соотношения

$$\sup_{x \in B_n} \|\mathbf{E}\xi_n(x) - \mu\| \ =\ o(1/\sqrt{n}), \tag{28}$$

$$\sup_{x \in B_n} \|\mathbf{Cov}(\xi_n(x),\, \xi_n(x)) - \sigma^2\| \ \to\ 0 \tag{29}$$

при $n \to \infty$, то распределение случайного вектора $n^{-1/2}(X_n - n\mu)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к d-мерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей σ^2.

Доказательство будет проведено методом характеристических функций; далее $\lambda \in \mathbf{R}^d$. Ввиду условия равномерной интегрируемости семейства квадратов скачков справедливо разложение

$$\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\, \xi_j(x)-\mu\rangle} \;=\; 1 + i\langle\lambda,\, \mathbf{E}\xi_j(x) - \mu\rangle - \frac{1}{2}\lambda\mathbf{E}(\xi_j(x)-\mu)^T(\xi_j(x)-\mu)\lambda^T + o(\|\lambda\|^2)$$

при $\lambda \to 0$ равномерно по $j \geqslant \widetilde{N}$ и $x \in B_0$. Учитывая здесь условия (28) и (29), получаем соотношение

$$\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\, \xi_j(x)-\mu\rangle} \;=\; 1 - \lambda\sigma^2\lambda^T/2 + \varepsilon_j(\lambda, x)(\|\lambda\|/\sqrt{j} + \|\lambda\|^2),$$

где $\varepsilon_j(\lambda, x) \to 0$ при $\lambda \to 0$ и $j \to \infty$ равномерно по $x \in B_j$. Фиксируем произвольным образом $\lambda \in \mathbf{R}^d$ и $\varepsilon > 0$. В силу последнего соотношения и условия (27) найдется $k \geqslant \widetilde{N}$ такое, что для любого $j \geqslant k$

$$|\mathbf{E}e^{i\langle\lambda/\sqrt{n},\, \xi_j(x)-\mu\rangle} - (1 - \lambda\sigma^2\lambda^T/2n)| \;\leqslant\; \varepsilon/\sqrt{nj},$$

равномерно по $x \in B_n$ и

$$\mathbf{P}\{X_j \in B_j \text{ для любого } j \geqslant k\} \;\geqslant\; 1 - \varepsilon.$$

Применяя теперь к цепи $\frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}$ лемму 2 при $\varphi = 1 - \lambda\sigma^2\lambda^T/2n$, получаем оценку

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} - \left(1 - \frac{\lambda\sigma^2\lambda^T}{2n}\right)^{n-k}\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_k - k\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle}\right| \;&\leqslant\; \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{j}} + 2\varepsilon \\ &\leqslant\; 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Поскольку для любого фиксированного k

$$\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_k - k\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} \;\to\; 1$$

при $n \to \infty$ и

$$\left(1 - \frac{\lambda\sigma^2\lambda^T}{2n}\right)^{n-k} \ \to \ e^{-\lambda\sigma^2\lambda^T/2},$$

выводим оценку

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\,\frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} - e^{-\lambda\sigma^2\lambda^T/2}\right| \ \leqslant \ 3\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, теорема доказана.

4.2. Центральная предельная теорема для одномерной цепи Маркова с асимптотически однородным сносом. В настоящем разделе результат теоремы 4 конкретизируется для цепи Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой $\mathbf{R}$.

Теорема 5. *Пусть цепь X имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu > 0$ и выполнено условие* (24)*. Пусть для некоторых момента времени $\widetilde{N}$ и пространственного уровня $\widetilde{U}$ семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(x),\ n \geqslant \widetilde{N},\ x \geqslant \widetilde{U}\}$ интегрируемо равномерно по n и x. Если при $n,\ x \to \infty$ имеют место соотношения*

$$\mathbf{E}\xi_n(x) \ = \ \mu + o(1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{x}), \tag{30}$$

$$\mathbf{D}\xi_n(x) \ \to \ \sigma^2 > 0, \tag{31}$$

то распределение случайной величины $(X_n - n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$ слабо сходится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Так как семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(x),\ n \geqslant \widetilde{N},\ x \geqslant \widetilde{U}\}$ равномерно интегрируемо, то семейство случайных величин $\{|\xi_n(x)|,\ n \geqslant \widetilde{N},\ x \geqslant \widetilde{U}\}$ обладает интегрируемой мажорантой и цепь X_n удовлетворяет условиям теоремы 3. В силу теоремы 3, $X_n/n \to \mu$ при $n \to \infty$. Следовательно, множества $B_n = [n\mu/2, \infty)$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{P}\{X_n \in B_n \text{ для любого } n \geqslant N\} \ \to \ 1$$

при $N \to \infty$. Ввиду условий (30) и (31), для множеств B_n справедливы соотношения (28) и (29). Применение теоремы 18 завершает доказательство.

§ 5. Локальная оценка для распределения цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве

5.1. Верхняя оценка вероятности попадания значения цепи Маркова в компакт. Пусть случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, со значениями в $\mathbf{R}$ независимы и одинаково распределены. Известна (см., например, теорему 9 в [23, гл. III]) следующая оценка для функции концентрации распределения сумм $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$: существует такая постоянная c, зависящая лишь от распределения ξ_1, что для любых $x \in \mathbf{R}$ и $n \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\{S_n \in (x, x+1]\} \ \leqslant \ c/\sqrt{n}.$$

В формулируемой ниже теореме это утверждение обобщается на цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Как и прежде, $\xi_n(x)$ используется для обозначения скачка цепи в момент времени n из состояния x. Обозначим характеристическую функцию скачка $\xi_n(x)$ через $\varphi_n(\lambda, x)$, $\lambda \in \mathbf{R}^d$.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция некоторого случайного вектора $\xi \in \mathbf{R}^d$ с невырожденным распределением. Под невырожденностью понимается то свойство, что распределение ξ не сосредоточено ни на какой гиперплоскости; другими словами, (симметричная неотрицательно определенная) матрица ковариаций распределения F_r, $F_r(B) = \{\xi \in B \,|\, \|\xi\| \leqslant r\}$, невырождена хотя бы для одного значения $r > 0$ (а следовательно, и для всех достаточно больших r). Нам понадобится следующая

Лемма 3. *Для любого случайного вектора ξ с невырожденным распределением найдется такое положительное число $\delta > 0$, что $|\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\,\xi\rangle}| \leqslant e^{-\delta\|\lambda\|^2}$*

для $\|\lambda\| \leqslant \delta$.

Доказательство. Пусть r таково, что матрица ковариаций σ^2 распределения F_r невырождена. Поэтому найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $\langle \lambda\sigma^2, \lambda \rangle \geqslant \delta_1 \|\lambda\|^2$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}^d$. Обозначим через μ среднее значение распределения F_r. Поскольку

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}\{e^{i\langle \lambda, \xi\rangle} \mid \|\xi\| \leqslant r\}\right| &= \left|\mathbf{E}\{e^{i\langle \lambda, \xi-\mu\rangle} \mid \|\xi\| \leqslant r\}\right| \\ &= 1 - \langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2 + o(\|\lambda\|^2)\end{aligned}$$

при $\lambda \to 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что при $\|\lambda\| < \delta$

$$\left|\mathbf{E}\{e^{i\langle \lambda, \xi\rangle} \mid \|\xi\| \leqslant r\}\right| \leqslant 1 - \delta\|\lambda\|^2.$$

Следовательно, при $\|\lambda\| < \delta$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \xi\rangle}\right| &= \left|\mathbf{E}\{e^{i\langle \lambda, \xi\rangle} \mid \|\xi\| \leqslant r\}\mathbf{P}\{\|\xi\| \leqslant r\} + \mathbf{E}\{e^{i\langle \lambda, \xi\rangle} \mid \|\xi\| > r\}\mathbf{P}\{\|\xi\| > r\}\right| \\ &\leqslant \left|\mathbf{E}\{e^{i\langle \lambda, \xi\rangle} \mid \|\xi\| \leqslant r\}\right|\mathbf{P}\{\|\xi\| \leqslant r\} + \mathbf{P}\{\|\xi\| > r\} \\ &\leqslant 1 - \delta\|\lambda\|^2\mathbf{P}\{\|\xi\| \leqslant r\}.\end{aligned}$$

Утверждение леммы вытекает теперь из неравенства $1 + h \leqslant e^h$, верного для любого действительного числа h.

Обозначим единичный куб с «левой нижней» вершиной $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ через $\square(x)$:

$$\square(x) = \{y = (y_1, \ldots, y_d) : y_j \in [x_j, x_j + 1] \ \text{ для любого } j = 1, \ldots, d\}.$$

Теорема 6. *Пусть для некоторых невозрастающей последовательности множеств* $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots$ *и числа* $\varepsilon > 0$ *выполняются следующие два соотношения:*

$$\mathbf{P}\Big\{X_k \notin B_k \text{ для некоторого } k \geqslant n\Big\} = O(n^{-d/2}) \qquad (32)$$

при $n \to \infty$ *и*

$$\sup_{x \in B_n, \|\lambda\| \leqslant \varepsilon} |\varphi_n(\lambda, x) - \varphi(\lambda)| \;=\; O(\delta_n), \tag{33}$$

где

$$\delta_n \;=\; \begin{cases} n^{-1} & \text{при} \quad d = 1, \\ (n \ln n)^{-1} & \text{при} \quad d = 2, \\ n^{-d/2} & \text{при} \quad d \geqslant 3. \end{cases} \tag{34}$$

Тогда найдется такая постоянная c_1*, что имеет место равномерное по* n *и* $x \in \mathbf{R}^d$ *неравенство*

$$\mathbf{P}\,\{X_n \in \square(x)\} \;\leqslant\; c_1 n^{-d/2}.$$

З а м е ч а н и е 3. Условия, достаточные для выполнения (32) при $d = 1$ для множеств $B_n = [na, \infty)$, $a \in \mathbf{R}$, приведены в конце настоящего параграфа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности считаем, что число $\delta > 0$, доставляемое леммой 3, равно ε. В силу этой леммы для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\int_{[-\varepsilon,\,\varepsilon]^d} |\varphi(\lambda)|^j d\lambda \;\leqslant\; \int_{\mathbf{R}^d} e^{-j\varepsilon\|\lambda\|^2} d\lambda = \left(\frac{2\pi}{j\varepsilon}\right)^{d/2}. \tag{35}$$

Оценим значение характеристической функции $\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\,X_n\rangle}$ в окрестности нуля. Применим лемму 2 к цепи X_n при $\varphi = \varphi(\lambda)$ и $k = n/2$. Ввиду условий (32) и (33), делаем вывод о существовании $c_2 < \infty$ такого, что равномерно по $\|\lambda\| \leqslant \varepsilon$ имеет место оценка

$$\left|\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\,X_n\rangle}\right| \;\leqslant\; |\varphi(\lambda)|^{n/2} + c_2\delta_n \sum_{j=1}^{n/2} |\varphi(\lambda)|^j + O(n^{-d/2}). \tag{36}$$

Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_d)$ с независимыми координатами, каждая из которых имеет общее распределение с плотностью (см. [29, гл. XVI, § 3])

$$p(z) \ = \ (1-\cos z)/\pi z^2, \quad z \in \mathbf{R}, \tag{37}$$

и характеристической функцией, $\lambda_1 \in \mathbf{R}$,

$$\psi(\lambda_1) = \mathbf{E} e^{i\lambda_1\eta_1} \ = \ \begin{cases} 1-|\lambda_1|, & \text{если} \quad |\lambda_1| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |\lambda_1| > 1. \end{cases} \tag{38}$$

Предполагаем, что η не зависит от X_n. Характеристическая функция суммы $X_n + \eta/\varepsilon$ равна $\mathbf{E} e^{i\langle \lambda,\, X_n \rangle} \psi(\lambda/\varepsilon)$, где $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1)\cdots\psi(\lambda_d)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Поскольку характеристическая функция $|\psi(\lambda)|$ интегрируема, сумма $X_n + \eta/\varepsilon$ имеет ограниченную непрерывную плотность $p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z)$, которая восстанавливается по следующей формуле обращения (см., например, § 3 и 7 гл. XV в [29]):

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle \lambda,\, z\rangle} \mathbf{E} e^{i\langle \lambda,\, X_n \rangle} \psi(\lambda/\varepsilon) d\lambda, \quad z \in \mathbf{R}^d.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) \ &\leqslant \ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} |\mathbf{E} e^{i\langle \lambda,\, X_n \rangle}| \psi(\lambda/\varepsilon) d\lambda \\ &\leqslant \ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\varepsilon,\, \varepsilon]^d} |\mathbf{E} e^{i\langle \lambda,\, X_n \rangle}| d\lambda, \end{aligned}$$

ввиду определения $\psi(\lambda)$. Используя далее оценки (36) и (35), приходим к неравенствам

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) \ \leqslant \ \left(\frac{2}{n\delta}\right)^{d/2} + c_2\delta_n \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{j\delta}\right)^{d/2} + O(n^{-d/2}).$$

Сумма во втором слагаемом из правой части неравенства есть величина порядка $O(\sqrt{n})$ при $d=1$, порядка $O(\ln n)$ при $d=2$ и порядка $O(1)$ при $d \geqslant 3$. Поэтому найдется такое c_3, что

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) \ \leqslant \ c_3 n^{-d/2},$$

и для любой u-окрестности $\square_u(x)$ куба $\square(x)$

$$\mathbf{P}\{X_n + \eta \in \square_u(x)\} \ \leqslant \ c_3(1+2u)^d n^{-d/2}. \tag{39}$$

Выберем $u > 0$ таким образом, чтобы $\mathbf{P}\{\|\eta/\varepsilon\| \leqslant u\} \geqslant 1/2$. Тогда ввиду независимости X_n и η справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X_n + \eta/\varepsilon \in \square_u(x)\} \ &\geqslant \ \mathbf{P}\{X_n \in \square(x),\ \|\eta/\varepsilon\| \leqslant u\} \\
&= \ \mathbf{P}\{X_n \in \square(x)\}\mathbf{P}\{\|\eta/\varepsilon\| \leqslant u\} \\
&\geqslant \ \mathbf{P}\{X_n \in \square(x)\}/2.
\end{aligned}$$

Вместе с (39) последнее неравенство влечёт оценку леммы.

5.2. Условия, достаточные для выполнения соотношения (32) в одномерном случае. Пусть $d = 1$, левый хвост начального распределения цепи удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}\{X_0 \leqslant -x\} \ = \ O(1/\sqrt{x}) \ \text{ при } x \to \infty,$$

и найдется такая случайная величина η со средним значением $m = a + \delta$, $\delta > 0$, и конечной дисперсией, что при всех значениях n и x имеет место неравенство

$$\xi_n(x) \ \geqslant_{\mathrm{st}} \ \eta.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\Big\{X_k < na \text{ для некоторого } k \geqslant n\Big\} \ = \ O(1/\sqrt{n}).$$

Действительно, пусть η_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, суть независимые копии η и $S_n = \eta_0 + \dots + \eta_{n-1}$. Зададим цепь X и величины η_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, на одном вероятностном пространстве таким образом, чтобы $\xi_n(x) \geqslant \eta_n$ почти наверное для любых n и x. Тогда на событии $X_0 \geqslant -n\delta/2$ имеем $X_k \geqslant S_k - k\delta/2$ для любого $k \geqslant n$.

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X_k < ka \text{ для некоторого } k \geqslant n\} \\
&\qquad \leqslant \mathbf{P}\{X_0 < -n\delta/2\} + \mathbf{P}\{S_k - k\delta/2 < ka \text{ для некоторого } k \geqslant n\} \\
&\qquad\quad = O(1/\sqrt{n}) + \mathbf{P}\{(S_k - km)/k < -\delta/2 \text{ для некоторого } k \geqslant n\}.
\end{aligned}
$$

Последовательность $(S_k - km)/k$, $k = 1, 2, \ldots$, образует обратный мартингал; в силу неравенства Колмогорова для мартингалов

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left\{\frac{S_k - km}{k} < -\frac{\delta}{2} \text{ для некоторого } k \geqslant n\right\}
&\leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geqslant n} \frac{|S_k - km|}{k} > \frac{\delta}{2}\right\} \\
&\leqslant \frac{4\mathbf{E}(S_n - nm)^2}{\delta^2 n^2} \\
&= O(1/n) = O(1/\sqrt{n}),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Локальная центральная предельная теорема в решётчатом случае

Пусть $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots$ — некоторая невозрастающая последовательность множеств в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. В настоящем и в следующем параграфах рассматривается *асимптотически однородная во времени и в пространстве* (*в направлении множеств* B_n) *цепь Маркова* со значениями в $\mathbf{R}^d$, т. е. такая цепь X_n, что распределение скачка $\xi_n(x)$ слабо сходится к распределению некоторой случайной величины ξ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in B_n$.

Предполагаем, что «предельный скачок» ξ имеет конечные среднее значение $\mu \in \mathbf{R}^d$ и матрицу ковариаций $\sigma^2 > 0$ порядка d. Предполагаем, что распределение ξ не сосредоточенно ни на какой гиперплоскости, т. е. симметричная неотрицательно определенная матрица σ^2 невырождена. Через Q обозначим матрицу, обратную к матрице σ^2.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, со значениями в $\mathbf{Z}$ имеют конечное среднее значение μ и дисперсию $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$. Пусть наибольший общий делитель чисел из множества $\{k \in \mathbf{Z}\colon \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$ равен единице; это означает, что $\mathbf{Z}$ — минимальная решетка для распределения ξ_1. Известна (см., например, теорему 3 в [29, гл. XV, § 5]) локальная теорема для распределения сумм $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, согласно которой

$$\mathbf{P}\left\{S_n = k\right\} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(k-n\mu)^2/2n\sigma^2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

при $n \to \infty$ равномерно по всем $k \in \mathbf{Z}$. В формулируемой ниже теореме это утверждение обобщается на цепь Маркова X со значениями на целочисленной решетке $\mathbf{Z}^d$.

Обозначим $\varphi_n(\lambda, x) \equiv \mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\,\xi_n(x)-\mu\rangle}$ и $\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\,\xi-\mu\rangle}$. В настоящем параграфе предполагаем, что распределение ξ решётчатое, причем $\mathbf{Z}^d$ — минимальная решётка, в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]^d \setminus [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d} |\varphi(\lambda)| \;<\; 1. \tag{40}$$

В одномерном случае $d = 1$ последнее соотношение эквивалентно тому, что решетка $\mathbf{Z}$ является минимальной для распределения ξ.

Теорема 7. *Пусть при $n \to \infty$*

$$(X_n - n\mu)n^{-1/2} \;\Rightarrow\; N(0, \sigma^2). \tag{41}$$

Кроме того, пусть выполняются следующие два соотношения:

$$\mathbf{P}\Big\{X_k \notin B_k \text{ \textit{для некоторого} } k \geqslant n\Big\} \;=\; o(n^{-d/2}) \tag{42}$$

при $n \to \infty$ *и*

$$\sup_{x\in B_n,\ \lambda\in[-\pi,\pi]^d} |\varphi_n(\lambda, x) - \varphi(\lambda)| \ = \ o(\delta_n), \tag{43}$$

где δ_n *определено в* (34). *Тогда равномерно по всем* $k \in \mathbf{Z}^d$ *имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{X_n = k\} \ = \ \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\left\langle (k-n\mu)Q,\, k-n\mu\right\rangle/2n} + o(n^{-d/2}).$$

Замечание 4. Достаточные для слабой сходимости (41) условия приведены в теореме 5.

Доказательство. Справедлива следующая формула обращения

$$\mathbf{P}\{X_n = k\} \ = \ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle\lambda,\, k\rangle} \mathbf{E} e^{i\langle\lambda,\, X_n\rangle} d\lambda.$$

Следовательно,

$$n^{d/2}\mathbf{P}\{X_n = k\} \ = \ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi\sqrt{n},\, \pi\sqrt{n}]^d} e^{-i\langle\lambda,\, k-n\mu\rangle/\sqrt{n}} \mathbf{E} e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} d\lambda.$$

Учитывая также, что при любом $z \in \mathbf{R}^d$

$$\frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\langle zQ,\, z\rangle/2} \ = \ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle\lambda,\, z\rangle - \langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2} d\lambda, \tag{44}$$

получаем при $z = (k - n\mu)/\sqrt{n}$ для любого $A > 0$ равенство и неравенство

$$\begin{aligned}
&\left| n^{d/2}\mathbf{P}\{X_n = k\} - \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\langle (k-n\mu)Q,\, k-n\mu\rangle/2n} \right| \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^d} \left| \int_{[-\pi\sqrt{n},\, \pi\sqrt{n}]^d} e^{-i\langle\lambda,\, k-n\mu\rangle/\sqrt{n}} \left(\mathbf{E} e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} - e^{-\langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2} \right) d\lambda \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_{\mathbf{R}^d\setminus[-\pi\sqrt{n},\, \pi\sqrt{n}]^d} e^{-i\langle\lambda,\, k-n\mu\rangle/\sqrt{n} - \langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2} d\lambda \right| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-A,A]^d} \left| \mathbf{E} e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} - e^{-\langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2} \right| d\lambda \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi\sqrt{n},\, \pi\sqrt{n}]^d\setminus[-A,\, A]^d} \left| \mathbf{E} e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} \right| d\lambda \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d\setminus[-A,\, A]^d} e^{-\langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2} d\lambda \\
&\quad \equiv I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Ввиду слабой сходимости (41), характеристическая функция $\mathbf{E}e^{i\left\langle \lambda,\, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \right\rangle}$ сходится при $n \to \infty$ равномерно по λ из любого компакта к характеристической функции $e^{-\langle \lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2}$ нормального закона. Поэтому $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $A > 0$. Кроме того, $I_3 \to 0$ при $A \to \infty$, поскольку матрица σ^2 строго положительно определенная. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$I_2 \;\to\; 0 \quad \text{при } n,\ A \to \infty. \tag{45}$$

Применим лемму 2 к цепи X_n при $k = n/2$ и $\varphi = \varphi(\lambda/\sqrt{n})$. Ввиду условий (42) и (43) имеет место оценка

$$\left|\mathbf{E}e^{i\left\langle \lambda,\, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \right\rangle}\right| \;\leqslant\; |\varphi(\lambda/\sqrt{n})|^{n/2} + o(\delta_n)\sum_{j=1}^{n/2} |\varphi(\lambda/\sqrt{n})|^j + o(n^{-d/2}) \tag{46}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $\lambda \in [-\pi\sqrt{n},\, \pi\sqrt{n}]^d$. В силу условия (40) и леммы 3 существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\lambda \in [-\pi,\, \pi]^d$

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant e^{-\delta\|\lambda\|^2}.$$

Следовательно, для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\int_{[-\pi\sqrt{n},\, \pi\sqrt{n}]^d \setminus [-A,\, A]^d} |\varphi(\lambda/\sqrt{n})|^j d\lambda \;&\leqslant\; \int_{\mathbf{R}^d \setminus [-A,\, A]^d} e^{-j\delta\|\lambda\|^2/n} d\lambda \\ &=\; \left(\frac{n}{j\delta}\right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^d \setminus [-A\sqrt{k\delta/n},\, A\sqrt{k\delta/n}]^d} e^{-\|\lambda\|^2} d\lambda.\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (46), получаем, что I_2 не превосходит

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{2}{\delta}\right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^d \setminus [-A\sqrt{\delta/2},\, A\sqrt{\delta/2}]^d} e^{-\|\lambda\|^2} d\lambda + o(\delta_n)\sum_{j=1}^{n/2}\left(\frac{n}{j\delta}\right)^{d/2}\right) + o(1).$$

Последняя величина стремится к нулю при $n,\ A \to \infty$, поскольку сумма во втором слагаемом есть величина порядка $O(n)$ при $d = 1$, порядка $O(n \ln n)$ при $d = 2$ и порядка $O(n^{d/2})$ при $d \geqslant 3$. Сходимость (45), а вместе с ней и сама теорема доказаны.

§ 7. Локальная центральная предельная теорема в нерешётчатом случае

В настоящем параграфе, как и в предыдущем, рассматривается асимптотически однородная во времени и в пространстве (также в направлении множеств B_n) цепь Маркова X, но распределение предельной случайной величины ξ предполагается нерешётчатым. Более того, распределение скалярного произведения $\langle\lambda,\xi\rangle$ предполагается нерешётчатым для любого $\lambda\in\mathbf{R}^d$. Поэтому для любых $0<\varepsilon<a$ выполняется

$$\sup_{\lambda\in[-a,a]^d\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]^d}|\varphi(\lambda)| \ < \ 1. \tag{47}$$

Обозначим параллелепипед с «левой нижней» вершиной $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbf{R}^d$ и со сторонами длины $r_1,\ \ldots,\ r_d$ через $\square(x,r_1,\ldots,r_d)=\square(x,r)$, $r=(r_1,\ldots,r_d)$:

$$\square(x,r)=\Big\{y=(y_1,\ldots,y_d):y_j\in[x_j,x_j+r_j] \text{ для любого } j=1,\ldots,d\Big\}.$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда для любого фиксированного набора чисел $r_1>0,\ \ldots,\ r_d>0$ имеет место равномерное по $x\in\mathbf{R}^d$ соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{X_n\in\square(x,r)\right\} \ = \ \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}}e^{-\left\langle(x-n\mu)Q,\,x-n\mu\right\rangle/2n}\times\prod_{j=1}^d r_j+o(n^{-d/2}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы эквивалентно следующему: при $n\to\infty$ равномерно по x

$$\mathbf{P}\left\{X_n\in\square(x,r)\right\} \ = \ \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}}\int_{\square(x,r)}e^{-\left\langle(t-n\mu)Q,\,t-n\mu\right\rangle/2n}dt+o(n^{-d/2}).$$

Рассмотрим случайный вектор $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_d)$ с независимыми координатами, каждая из которых имеет общее распределение с плотностью (37) и характеристической функцией (38). Предполагаем, что η не зависит от X_n.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Характеристическая функция суммы $X_n + \varepsilon^2\eta$ равна $\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\, X_n\rangle}\psi(\varepsilon^2\lambda)$, где $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1)\cdots\psi(\lambda_d)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Поскольку характеристическая функция $|\psi(\lambda)|$ интегрируема в $\mathbf{R}^d$, сумма $X_n + \varepsilon^2\eta$ имеет ограниченную непрерывную плотность $p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z)$, которая для любого $z \in \mathbf{R}^d$ может быть восстановлена по следующей формуле обращения (см., например, § 3 и 7 гл. XV в [29]):

$$p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\psi(\varepsilon^2\lambda)e^{-i\langle\lambda,\, z\rangle}\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\, X_n\rangle}d\lambda.$$

Следовательно,

$$n^{d/2}p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\psi(\varepsilon^2\lambda/\sqrt{n})e^{-i\langle\lambda,\, z-n\mu\rangle/\sqrt{n}}\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle}d\lambda.$$

Из этого равенства и формулы (44) выводим

$$\begin{aligned}\Delta_n \;\equiv\; &\left|n^{d/2}p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z) - \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}}e^{-\left\langle(z-n\mu)Q,\, z-n\mu\right\rangle/2n}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\left|\psi(\varepsilon^2\lambda/\sqrt{n})\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} - e^{-\langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2}\right|d\lambda.\end{aligned}$$

Отсюда, ввиду компактности носителя функции $\psi(\lambda)$, получаем для любого $A > 0$ неравенство

$$\begin{aligned}\Delta_n \;\leqslant\; &\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-A,\, A)^d}\left|\psi(\varepsilon^2\lambda/\sqrt{n})\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle} - e^{-\langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2}\right|d\lambda \\ &+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\sqrt{n}/\varepsilon^2,\, \sqrt{n}/\varepsilon^2]^d\setminus[-A,\, A]^d}\left|\mathbf{E}e^{i\left\langle\lambda,\, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right\rangle}\right|d\lambda \\ &+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d\setminus[-A,\, A]^d}e^{-\langle\lambda\sigma^2,\, \lambda\rangle/2}d\lambda.\end{aligned}$$

Ровно такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5, показывают, что каждое из трех слагаемых в правой части последней оценки стремится к нулю при n, $A \to \infty$ равномерно по $z \in \mathbf{R}^d$; при этом вместо свойства (40) отделимости характеристической функции от нуля используется (47). Итак,

$$p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z) \;=\; \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}}e^{-\left\langle(z-n\mu)Q,\, z-n\mu\right\rangle/2n} + o(n^{-d/2}) \qquad (48)$$

при $n \to \infty$ равномерно по $z \in \mathbf{R}^d$.

Положим

$$\begin{aligned}\square_\varepsilon^+(x,r) &= \{y=(y_1,\ldots,y_d)\colon y_j \in [x_j-\varepsilon,\, x_j+r_j+\varepsilon]\},\\ \square_\varepsilon^-(x,r) &= \{y=(y_1,\ldots,y_d)\colon y_j \in [x_j+\varepsilon,\, x_j+r_j-\varepsilon]\}.\end{aligned}$$

Из определения плотности (37) вытекает, что $\mathbf{P}\{|\eta_1| \geqslant t\} \leqslant 1/t$. Значит,

$$\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \notin [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d\} \leqslant \sum_{j=1}^d \mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta_j \notin [-\varepsilon,\,\varepsilon]\} \leqslant d\varepsilon.$$

Поскольку ввиду независимости X_n и η

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n+\varepsilon^2\eta \in \square_\varepsilon^+(x,r)\} &\geqslant \mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r),\ \varepsilon^2\eta \in [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d\}\\ &= \mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\}\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \in [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d\}\\ &\geqslant \mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\}(1-d\varepsilon),\end{aligned}$$

имеем из (48) оценку сверху

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\} &\leqslant \frac{\mathbf{P}\{X_n+\varepsilon^2\eta \in \square_\varepsilon^+(x,r)\}}{1-d\varepsilon}\\ &= \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\left\langle (x-n\mu)Q,\, x-n\mu\right\rangle/2n} \times \frac{\prod_{j=1}^d (r_j+2\varepsilon)}{1-d\varepsilon} + o(n^{-d/2})\end{aligned} \tag{49}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $x \in \mathbf{R}^d$. Поэтому (можно использовать также теорему 6) найдется постоянная c такая, что для любого $z \in \mathbf{R}^d$

$$\mathbf{P}\{X_n \in \square(z,r)\} \leqslant cn^{-d/2}.$$

Из этой оценки следует неравенство

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{X_n+\varepsilon^2\eta \in \square_\varepsilon^-(x,r),\ \varepsilon^2\eta \notin [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d\}\\ &\qquad = \int_{u\notin[-\varepsilon,\,\varepsilon]^d} \mathbf{P}\{X_n \in \square_\varepsilon^-(x-u,r)\}\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \in du\}\\ &\qquad\qquad \leqslant cn^{-d/2}\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \notin [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d\} \leqslant cn^{-d/2}d\varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда, а также из неравенства

$$\mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \square^-_\varepsilon(x,r),\ \varepsilon^2\eta \in [-\varepsilon,\,\varepsilon]^d\} \ \leqslant\ \mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\},$$

вытекает следующая оценка снизу:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\} &\geqslant \mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \square^-_\varepsilon(x,r)\} - cn^{-d/2}d\varepsilon \\ &= \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\left\langle (x-n\mu)Q,\, x-n\mu \right\rangle/2n} \times \prod_{j=1}^{d}(r_j - 2\varepsilon) + o(n^{-d/2}) - cn^{-d/2}d\varepsilon, \end{aligned} \tag{50}$$

в силу (48). Объединение оценок сверху (49) и снизу (50), ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$, завершает доказательство теоремы.

ГЛАВА II

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В КРАМЕРОВСКОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается однородная во времени эргодическая цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой, имеющая асимптотически однородные на бесконечности скачки. Предполагается, что распределение «предельного» скачка ξ цепи $\{X_n\}$ имеет отрицательное среднее значение и удовлетворяет условию Крамера, т. е. уравнение $\mathbf{E}e^{\beta\xi} = 1$ имеет положительное решение β. Изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{X_n > x\}$ при n, $x \to \infty$. В частности, выделяются зоны значений времени n, в которых эта вероятность асимптотически эквивалентна хвосту стационарного распределения.

§ 8. Асимптотика супремума случайного блуждания

Пусть, как и прежде, ξ_1, ξ_2, $\ldots$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$ на $(-\infty, \infty)$; $F(+0) < 1$. Обозначим $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, и

$$M = \sup\{S_n, n \geqslant 0\}.$$

Предполагаем, что среднее $\mathbf{E}\max(0, \xi_1)$ существует и $a = \mathbf{E}\xi_1 \in [-\infty, 0)$; ввиду этого условия S_n уходит на $-\infty$ и, соответственно, M конечно почти наверное.

Напомним, что $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi_1}$ и $\beta = \sup\{\lambda \geqslant 0 : \varphi(\lambda) \leqslant 1\}$. Поскольку $\mathbf{P}\{\xi_1 > 0\} > 0$, то $\beta < \infty$. Рассматриваем «крамеровский случай», когда

$\beta > 0$ и $\varphi(\beta) = 1$. Хорошо известна оценка, восходящая к Крамеру:

$$\mathbf{P}\{W_\infty > x\} \ \leqslant \ e^{-\beta x}, \quad x \geqslant 0.$$

Чтобы выписать асимптотику последней вероятности, рассмотрим момент остановки $\tau \equiv \min\{n \geqslant 1 : S_n > 0\}$ и первую положительную сумму $\chi = S_\tau$. Так как $a < 0$, то τ и χ — две дефектные случайные величины. Обозначим

$$p \equiv \mathbf{P}\{M > 0\}, \qquad \widetilde{a} \equiv \mathbf{E}\{\chi e^{\beta\chi}; \tau < \infty\}.$$

Теорема 9. *Если случайная величина ξ_1 имеет нерешётчатое распределение, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ *и* $\varphi'(\beta) < \infty$;

(ii) $\mathbf{P}\{M > x\} \sim \dfrac{1-p}{\beta\widetilde{a}} e^{-\beta x}$ *при* $x \to \infty$;

(iii) $\mathbf{P}\{M > x\} \sim c e^{-\lambda x}$ *при* $x \to \infty$ *для некоторых* c, $\lambda \in (0, \infty)$.

Если случайная величина ξ_1 имеет решётчатое распределение с шагом h, то утверждения (i)–(iii) *остаются эквивалентными, если взять x кратным шагу решётки h, а правую часть в* (ii) *заменить на*

$$\frac{h(1-p)}{(1-e^{-\beta h})\widetilde{a}} e^{-\beta(x+h)}.$$

Импликация (i)⇒(ii) хорошо известна как оценка Крамера и может быть найдена в [49] или [29, гл. XII, § 6]. Результат, аналогичный импликации (iii)⇒(i) доказан в [79] для решётчатого распределения F.

Доказательство импликации (iii)⇒(i). Так как $\xi_1 \leqslant M$ и $\lambda > 0$, то $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1/2} < \infty$ и, соответственно, $\beta > 0$.

Предположим, что $\varphi(\beta) < 1$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо $\varphi(\beta + \varepsilon) = \infty$ и $\mathbf{E}e^{(\beta+\varepsilon)M} \geqslant \varphi(\beta+\varepsilon) = \infty$. Следовательно, ввиду эквивалентности (iii) имеем $\beta \geqslant \lambda$. В частности, $\mathbf{E}e^{\beta M} = \infty$. С другой стороны, предположение

$\varphi(\beta) < 1$ и неравенство $e^{\beta M} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta S_n}$ влекут, что

$$\mathbf{E}e^{\beta M} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\beta) = (1 - \varphi(\beta))^{-1} < \infty.$$

Получаем противоречие. Значит $\beta > 0$ и $\varphi(\beta) = 1$.

Предположим, что $\varphi'(\beta) = \infty$. Тогда (см. [29, гл. XII]) $\mathbf{P}\{M \geqslant x\} = o(e^{-\beta x})$. В силу (iii) имеем $\beta < \gamma$ и $\mathbf{E}e^{(\beta+\varepsilon)M} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из предположения $\varphi'(\beta) = \infty$ вытекает также, что $\varphi(\beta + \varepsilon) = \infty$. Таким образом, $\mathbf{E}e^{(\beta+\varepsilon)M} = \infty$ и приходим к противоречию. Поэтому $\varphi'(\beta) < \infty$ и доказательство завершено.

Изложение в настоящем параграфе следует работе [88].

§ 9. Большие уклонения асимптотически однородных цепей

Итак, пусть $P(x, B)$, $x \in \mathbf{R}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, — некоторая однородная во времени переходная вероятность в $\mathbf{R}$. Рассматривается цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями в $\mathbf{R}$ и с переходной вероятностью $P(\cdot, \cdot)$. Пусть π_n — распределение X_n: $\pi_n(B) = \mathbf{P}\{X_n \in B\}$. Обозначаемм через $\xi(x)$ случайную величину с тем же распределением, что и у скачка цепи $\{X_n\}$ из состояния x:

$$\mathbf{P}\{x + \xi(x) \in B\} \; = \; P(x, B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Далее в настоящей главе рассматривается *асимптотически однородная* (*в пространстве*) *цепь Маркова* X, т. е. такая цепь, распределение скачка $\xi(x)$ которой имеет слабый предел при $x \to \infty$. Пусть распределение $\xi(x)$ слабо сходится к распределению F и пусть ξ — случайная величина с распределением F. Предполагаем, что $\mathbf{E}\xi \in [-\infty, 0)$ и $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$.

Рассматривается крамеровская ситуация, когда предельный скачок ξ удовлетворяет условию: существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) \equiv \mathbf{E}e^{\beta\xi} = 1$.

Предполагаем, что X_n — эргодическая Харрисова цепь, имеющая единственное инвариантное распределение π. Тогда распределение X_n сходится при $n \to \infty$ к π в метрике полной вариации, т. е. выполнено условие (1). Ввиду этого обстоятельства семейство распределений X_n относительно компактно, т. е.

$$\sup_{n\geqslant 0} \mathbf{P}\{X_n > x\} \to 0 \quad \text{при } x \to \infty. \tag{51}$$

Как отмечалось во введении, простейшим примером цепи Маркова описанного типа является случайное блуждание W_n с задержкой в нуле (называемое в [87, 89] однородной в пространстве цепью Маркова), задаваемое рекуррентным равенством

$$W_{n+1} \;=\; (W_n + \xi_n)^+,$$

где ξ_0, ξ_1, … — суть независимые копии случайной величины ξ. Во введении же отмечалось, что распределение цепи W_n с нулевым начальным условием $W_0 = 0$ совпадает с распределением M_n, т. е. справедливо равенство (5). Поэтому стационарное распределение W_n совпадает с распределением супремума случайного блуждания, описанном в предыдущем параграфе.

Достационарные распределения W_n в случае существования абсолютно непрерывной компоненты у распределения ξ хорошо изучены Боровковым в работе [5]. Теоремы 7–11 этой работы дают асимптотические разложения для вероятности $\mathbf{P}\{\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} S_k > x,\ S_n \leqslant x - y\}$ в широких зонах изменения значений n, x и y.

Отметим также интересный подход Добрушина и Печерского [19] к доказательству принципа больших уклонений через исследование вероятностей больших уклонений процессов с независимыми приращениями на бесконечном интервале.

В настоящей диссертации мы демонстрируем три различных подхода, с помощью которых можно переносить результаты для случайного блуждания с задержкой в нуле на асимптотически однородные цепи Маркова. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства, но в то же время и свои ограничения.

Начинаем мы с подхода, основанном на использовании так называемых *тождеств равновесия*. Этот подход является достаточно экономным для получения вероятностей больших уклонений стационарного распределения. Более того, можно исследовать точность аппроксимации в соответствующих теоремах. Но при этом упомянутый подход не позволяет исследовать достационарные распределения. Основываясь на тождестве равновесия, автором были найдены условия, при которых хвост стационарного распределения асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова убывает экспоненциальным образом подобно оценке (6) (или теореме 9) для хвоста распределения супремума частичных сумм (см. [86] и [6, § 27, теоремы 3, 4 и 5]). Сформулируем соответствующие утверждения. Начнем с принципа больших уклонений (грубой асимптотики), который справедлив в исключительно широких условиях. Мы приводим его в несколько более общей формулировке, нежели в [86] и [6].

Теорема 10. *Если скачки асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова X_n удовлетворяют условию*

$$\sup_y \mathbf{E}e^{\lambda\xi(y)} \ < \ \infty \qquad \text{при любом } \lambda < \beta, \tag{52}$$

то

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln \pi(x,\infty)}{x} \ \leqslant \ -\beta, \tag{53}$$

Если скачки цепи удовлетворяют условию

$$\pi(y,\infty) \ > \ 0 \qquad \text{при любом } y, \tag{54}$$

то

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\ln \pi(x,\infty)}{x} \ \geqslant \ -\beta, \tag{55}$$

Таким образом, из условий (52) и (54) следует выполнение принципа больших уклонений (см., например, [83, стр. 3]) с функцией уклонений $I(t) = -\beta t$. Доказательство теоремы основано главным образом на использовании техники тождеств равновесия и приводится в § 10.

Чтобы найти точную асимптотику вероятности $\pi(x, \infty)$, недостаточно знать, что цепь асимптотически однородна. Необходима дополнительная информация о скорости сближения распределения скачка $\xi(x)$ к предельному распределению F.

Теорема 11. *Пусть распределение F нерешётчато, $\mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty$ и скачки цепи X_n удовлетворяют условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t} |\mathbf{P}\{\xi(y) \leqslant t\} - \mathbf{P}\{\xi \leqslant t\}| \, dt \ \leqslant \ \delta(y), \tag{56}$$

где $\delta(y)$ — ограниченная правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$, т. е. $\delta(uy) \sim u^{-\alpha}\delta(y)$ при $y \to \infty$ и любом фиксированном $u > 0$. Если

$$\int_0^{\infty} \delta(y) \, dy \ < \ \infty \tag{57}$$

(так что $\alpha \geqslant 1$), то хвост инвариантного распределения π имеет асимптотику

$$\pi(x, \infty) \ = \ ce^{-\beta x} + o(e^{-\beta x}) \quad \text{при } x \to \infty, \tag{58}$$

где

$$c \ = \ \frac{1}{\beta \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} - 1) e^{\beta y} \, \pi(dy) \in [0, \infty). \tag{59}$$

Если цепь X_n принимает значения на решётке $\{n\Delta, \ n \in \mathbf{Z}\}$, $\Delta > 0$, причём эта решётка минимальная для распределения F, то

$$\pi(n\Delta) \ = \ c_\Delta e^{-\beta n\Delta} + o(e^{-\beta n\Delta}) \quad \text{при } n \to \infty, \tag{60}$$

где

$$c_\Delta \ = \ \frac{\Delta}{\mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\mathbf{E}e^{\beta\xi(k\Delta)} - 1) e^{\beta k\Delta} \pi(k\Delta) \in [0,\infty). \tag{61}$$

В [6] приведены условия, достаточные для положительности константы c. Именно, если $\pi(y,\infty) > 0$ и $\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} \geqslant 1-\gamma(y)$ при всех y, где $\gamma(y) \geqslant 0$ и $\int_1^\infty \gamma(y)y(\ln y)\,dy < \infty$, то $c > 0$. Мы не воспроизводим в настоящей диссертации сооветствующие рассуждения, поскольку в § 23 последнее условие несколько ослабляется, а доказательство при этом существенно усовершенствуется по сравнению с доказательством соответствующей теоремы 5 из [6, § 27].

Условие (57) означает, что, грубо говоря, скорость сближения распределения $\xi(x)$ к ξ должна быть интегрируемой функцией. В последнем параграфе настоящей главы приведён пример, показывающий, что выполнение условий (56) и (57) в известном смысле необходимо для справедливости асимптотики (58).

В § 11 при дополнительных естественных предположениях на $\delta(x)$ уточняется порядок малости члена $o(e^{-\beta x})$ в (58). Мы приводим рассуждения, изложенные в § 9 из [87].

Второй подход к изучению вероятностей больших уклонений асимптотически однородных цепей Маркова основан на использовании теорем о больших уклонениях для сумм независимых случайных величин, учитывающих табу-вероятности. При исследовании логарифмической асимптотики достационарного распределения асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова можно построить миноранту и мажоранту довольно простой структуры, а именно, можно минорировать и мажорировать нашу цепь с помощью случайного блуждания с задержкой в некоторой точке. Используя этот подход, Боровков и Коршунов в работе [89, теорема 1] обобщили теорему 10 на достационарные распределения — доказали принцип больших уклонений для достационарных распределений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящей диссертации этому вопросу посвящён § 13. Предварительно в § 12 обсуждаются свойства функции уклонений, оценки точности нормальной аппроксимации сумм независимых одинаково распределённых случайных величин в решётчатом и нерешётчатом случаях, точная асимптотика вероятностей больших уклонений сумм и асимптотика табу-вероятностей больших уклонений.

В работе [89] Боровков и Коршунов обобщили результаты об асимптотическом поведении вероятности $\mathbf{P}\{W_n > x\}$ при n, $x \to \infty$ на цепи Маркова со значениями на действительной оси. Был изучен случай так называемой U-*частично однородной* (*в пространстве*) *цепи Маркова*, см. определение 2 во введении. В настоящей диссертации частично однородным цепям посвящён § 14.

В упомянутой работе [89] изучение U-частично однородной цепи основано на формуле полной вероятности по последнему попаданию во множество $(-\infty, U]$:

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{X_k \leqslant U,\, X_j > U \text{ для любого } j \in [k+1, n],\, X_n > x\}.$$

Согласно марковскому свойству общее слагаемое в последней сумме равно

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X_k \leqslant U,\, X_j > U \text{ для любого } j \in [k+1, n],\, X_n > x\} \\
&\quad = \int_{-\infty}^{U} \mathbf{P}\{X_k \in du\} \int_{U}^{\infty} P(u, dv) \\
&\qquad \times \mathbf{P}\{X_j > U \text{ для любого } j \in [k+2, n],\, X_n > x \mid X_{k+1} = v\}.
\end{aligned}$$

Поскольку цепь является U-частично однородной, стохастическое поведение цепи выше уровня U совпадает с процессом суммирования с общим распределением отдельного слагаемого F. Это обстоятельство позволяет использовать для вычисления последней вероятности теорему о вероятностях больших уклонений с запретами для сумм независимых одинаково распределённых случайных величин.

Для нахождения точной асимптотики вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи данный подход неприемлем, поскольку в общем случае для *любого сколь угодно высокого* уровня U стохастическое поведение цепи выше этого выбранного уровня не может быть описано процессом суммирования независимых слагаемых. Поэтому предлагается использовать новую технику доказательства.

Очень кратко третий подход к доказательству состоит в следующем. Сначала к исходной цепи применяется преобразование Крамера с соответствующим параметром. В результате получается некоторый объект, который мы называем марковской эволюцией масс. Основным отличием марковской эволюции масс от обычной цепи Маркова является то, что скачки первой могут иметь общую массу («вероятность») отличную от единицы, в том числе и больше единицы. Далее развивается теория предельных теорем для марковской эволюции масс и для цепей Маркова, в том числе доказываются аналоги центральной предельной теоремы. После этого к марковской эволюции масс применяется обратное преобразование Крамера, что и позволяет вычислить асимптотику вероятности события $\{X_n > x\}$.

Итак, во второй половине главы получена точная асимптотика вероятности $\mathbf{P}\{X_n > x\}$ при n, $x \to \infty$ для асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова X_n при выполнении условий типа (56) и (57). Найдена зона значений времени n, в которой вероятность $\mathbf{P}\{X_n > x\}$ асимптотически эквивалентна хвосту $\pi(x, \infty)$ инвариантного распределения. Эта вторая половина главы организована следующим образом. Основными являются теоремы 19 в § 20 и 20 в § 22 об асимптотике вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В предваряющих §§ 16–19 развивается необходимая теория. В частности, в § 16 обсуждается понятие и некоторые свойства марковской эволюции масс. В § 17 доказываются локальная центральная предельная теорема и локальная теорема восстановления для асимптотически однородной цепи Маркова. § 18 и 19 посвящены более тонким асимптотическим свойствам распределения марковской эволюции масс. Завершает главу § 24, в котором построен простой пример асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова, демонстрирующий неулучшаемость основных условий теоремы 19, относящихся к интегрируемости скорости сходимости распределения $\xi(x)$ к распределению ξ.

§ 10. Доказательство теорем 10 и 11

10.1. Доказательство принципа больших уклонений — теоремы 10. Наши рассуждения будут серьёзно опираться на так называемое тождество равновесия (см. лемму 1 в [71] или [6, § 9]). Приведём наиболее удобную для наших целей формулировку этого тождества, верного для произвольной цепи Маркова X_n со значениями в $\mathbf{R}$.

Теорема 12. *Пусть $V(x)$ — неотрицательная пробная функция. Обозначим средний снос $V(X_n)$ в состоянии x через*

$$v(x) \;\equiv\; \mathbf{E}V(x+\xi(x)) - V(x).$$

Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max(0, v(x))\pi(dx) \;<\; \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\pi(dx) \;\geqslant\; 0.$$

Если, кроме того, существует число $c<\infty$ такое, что для всех x

$$\mathbf{E}|V(x+\xi(x)) - V(x)| \;\leqslant\; c(1+|v(x)|),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\pi(dx) \ = \ 0.$$

Чтобы доказать неравенство (53), фиксируем произвольно $\lambda < \beta$ и рассмотрим пробную функцию $V(x) = e^{\lambda x}$. Для неё средний снос равен

$$v(x) \ = \ \mathbf{E}e^{\lambda(x+\xi(x))} - e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\mathbf{E}e^{\lambda\xi(x)} - 1).$$

Поскольку условие (52) выполнено для любого числа из интервала $[\lambda, \beta)$, то семейство случайных величин $e^{\lambda\xi(x)}$ равномерно интегрируемо. Отсюда и ввиду асимптотической однородности имеем сходимость

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi(x)} \to \mathbf{E}e^{\lambda\xi} < 1.$$

Поэтому найдутся $\varepsilon > 0$ и $U \in \mathbf{R}$ такие, что при $x \geqslant U$ выполняется

$$v(x) \ \leqslant \ -\varepsilon e^{\lambda x}.$$

Отсюда по теореме 12 имеем

$$\begin{aligned} 0 \ &\leqslant \ \left(\int_{-\infty}^{U} + \int_{U}^{\infty}\right) e^{\lambda x}(\mathbf{E}e^{\lambda\xi(x)} - 1)dx \\ &\leqslant \ e^{\lambda U} \sup_x \mathbf{E}e^{\lambda\xi(x)} - \varepsilon \int_{U}^{\infty} e^{\lambda x}\pi(dx). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{U}^{\infty} e^{\lambda x}\pi(dx) \ \leqslant \ \frac{e^{\lambda U}}{\varepsilon} \sup_x \mathbf{E}e^{\lambda\xi(x)} \equiv c_1 < \infty.$$

Остаётся воспользоваться неравенством Чебышёва, в силу которого для любого $x \geqslant U$

$$\pi(x, \infty) \leqslant c_1 e^{-\lambda x},$$

откуда

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln \pi(x, \infty)}{x} \ \leqslant \ -\lambda.$$

Так как параметр $\lambda < \beta$ выбран произвольно, то грубая оценка сверху (53) доказана.

Доказательство нижней оценки (55) несколько более длинно и поэтому мы не приводим его здесь; см. § 27 в [6, § 9]).

10.2. Доказательство теоремы 11.

Лемма 4. *В условиях теоремы* 11

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{\beta x}\pi(dx) \ < \ \infty.$$

Доказательство. В силу (57) при любом x существует

$$\Delta(x) \ = \ \int_x^{\infty} \delta(y)\,dy,$$

так что $\Delta'(x) = -\delta(x)$, $\Delta(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Оценим средний снос пробной функции $V(x) = \Delta(x)e^{\beta x}$:

$$\begin{aligned} v(x) \ &\equiv \ \mathbf{E}V(x+\xi(x)) - V(x) \\ &= \ e^{\beta x}[\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}\Delta(x+\xi(x)) - \Delta(x)]. \end{aligned}$$

При $x \to \infty$ имеем равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}\Delta(x+\xi(x)) \ &= \ \mathbf{E}\{e^{\beta\xi(x)}\Delta(x+\xi(x)); \xi(x) > -x/2\} + O(e^{-\beta x/2}) \\ &= \ \mathbf{E}\{e^{\beta\xi}\Delta(x+\xi); \xi > -x/2\} + r(x) + O(e^{-\beta x/2}), \end{aligned}$$

где путём интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} |r(x)| \ &= \ \left|\int_{-x/2}^{\infty} e^{\beta y}\Delta(x+y)(\mathbf{P}\{\xi(x) \leqslant y\} - \mathbf{P}\{\xi \leqslant y\})\right| \\ &\leqslant \ \sup_{y \geqslant x/2} \Delta(y)\left|\int_{-x/2}^{\infty} e^{\beta y} d_y(\mathbf{P}\{\xi(x) \leqslant y\} - \mathbf{P}\{\xi \leqslant y\})\right| \\ &\leqslant \ \beta \sup_{y \geqslant x/2} \Delta(y) \int_{-x/2}^{\infty} |\mathbf{P}\{\xi(x) \leqslant y\} - \mathbf{P}\{\xi \leqslant y\}| e^{\beta y} dy \\ &= \ o(\delta(x)), \end{aligned}$$

ввиду условия (56), сходимости $\Delta(x) \to 0$ и правильного изменения функции $\delta(x)$ на бесконечности. Следовательно,

$$v(x) \ = \ e^{\beta x}[\mathbf{E}e^{\beta\xi}\Delta(x+\xi) - \Delta(x) + o(\delta(x))]. \tag{62}$$

По формуле Тэйлора имеем, $0 \leqslant \theta = \theta(\xi) \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} b(x) \ &\equiv \ \mathbf{E}e^{\beta\xi}\Delta(x+\xi) - \Delta(x) \\ &= \ \mathbf{E}e^{\beta\xi}\Delta(x) + \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}\Delta'(x+\theta\xi) - \Delta(x) \\ &= \ -\mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}\delta(x+\theta\xi) \\ &\leqslant \ -\mathbf{E}\{\xi e^{\beta\xi}\delta(x+\theta\xi); \xi \leqslant A\} \end{aligned}$$

для любого $A > 0$. В силу правильного изменения функции $\delta(x)$ получаем оценку

$$\mathbf{E}\{\xi e^{\beta\xi}\delta(x+\theta\xi); \xi \leqslant -\sqrt{x}\} \ = \ O(e^{-\beta\sqrt{x}/2}) = o(\delta(x)).$$

Кроме того, при $x \to \infty$ равномерно по $\xi \in [-\sqrt{x}, A]$

$$\delta(x+\theta\xi) \sim \delta(x).$$

Поэтому для любого фиксированного A

$$b(x) \ \leqslant \ -\delta(x)\mathbf{E}\{\xi e^{\beta\xi}; -\sqrt{x} \leqslant \xi \leqslant A\} + o(\delta(x)).$$

Существует достаточно большое A такое, что

$$\mathbf{E}\{\xi e^{\beta\xi}; \xi \leqslant A\} \ = \ m > 0.$$

Поэтому при достаточно больших x справедливо неравенство

$$b(x) \ \leqslant \ -\frac{3m}{4}\delta(x),$$

подставив которое в (62), получим при достаточно больших x

$$v(x) \ \leqslant \ -\frac{m}{2}\delta(x)e^{\beta x}. \tag{63}$$

Следовательно, по неравенству равновесия из теоремы 12 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\pi(dx) \ \geqslant \ 0.$$

Отсюда и из оценки (63) вытекает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{\beta x}\pi(dx) \ < \ \infty.$$

Лемма доказана.

Перейдём к доказательству непосредственно теоремы 11. Обозначим

$$F_x(y) = \mathbf{P}\{\xi(x) \leqslant y\}, \qquad F(y) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant y\}$$

и

$$\varphi(x,\lambda) \ \equiv \ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} P(x, x+dy).$$

При $\lambda \leqslant \beta$ в силу уравнения (2) имеем равенство

$$\Pi(\lambda) \ \equiv \ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\pi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\varphi(x,\lambda)\pi(dx).$$

Отсюда

$$\Pi(\lambda) \ \equiv \ \frac{1}{1-\varphi(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}(\varphi(x,\lambda)-\varphi(\lambda))\pi(dx). \tag{64}$$

Так как $e^{\beta y}(1-F_x(y)) \to 0$ и $e^{\beta y}(1-F(y)) \to 0$ при $y \to \infty$, то после интегрирования по частям получим для любых $\lambda \leqslant \beta$ и x равенство

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda)-\varphi(\lambda) \ &= \ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} d(F_x(y)-F(y)) \\ &= \ -\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}(F_x(y)-F(y))dy. \end{aligned} \tag{65}$$

По лемме 4 при всяком $\lambda < \beta$ можно произвести следующее интегрирование по частям

$$\Pi(\lambda) \ = \ -\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} d\overline{\pi}(x) = -\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\overline{\pi}(x)dx. \tag{66}$$

Подставляя (65) и (66) в (64) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}(1-\varphi(\lambda))\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\overline{\pi}(x)dx &= -\int_{-\infty}^{\infty}\pi(dx)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x+y)}(F_x(y)-F(y))dy\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\pi(dx)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z}(F_x(z-x)-F(z-x))dz\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z}dz\int_{-\infty}^{\infty}(F_x(z-x)-F(z-x))\pi(dx).\end{aligned}$$

Пусть $\lambda = \beta - \mu$, $\mu > 0$. Тогда полученное равенство можно записать в виде

$$(1-\varphi(\lambda))\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x}e^{\beta x}\overline{\pi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu z}dR(z), \tag{67}$$

где

$$dR(z) = e^{-\beta z}\int_{-\infty}^{\infty}(F_x(z-x)-F(z-x))\pi(dx)dz. \tag{68}$$

Имеем

$$|R(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{z} e^{-\beta t}dt = \frac{1}{\beta}e^{\beta z} \to 0 \quad \text{при } z \to -\infty. \tag{69}$$

Полная вариация функции $R(z)$ конечна. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}R &= \int_{-\infty}^{\infty}|R(z)|dz\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta z}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(z-x)-F(z-x)|\pi(dx)dz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x}\pi(dx)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta(z-x)}|F_x(z-x)-F(z-x)|dz\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x}\delta(x)\pi(dx) < \infty\end{aligned}$$

по условию (56) и лемме 4.

Пусть $H(t)$ — функция восстановления случайной величины $\widetilde{\xi}$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\xi} \in dx\} = e^{\beta x}\mathbf{P}\{\xi \in dx\}.$$

По условию теоремы,

$$0 < \widetilde{a} \equiv \mathbf{E}\widetilde{\xi} = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty.$$

Поэтому при любом $\lambda < \beta$

$$\frac{1}{1-\varphi(\lambda)} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu y} dH(y).$$

Отсюда и из (67) вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x} e^{\beta x} \overline{\pi}(x) dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu z} dR(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu y} dR(y).$$

Поскольку это верно для любого $\mu \in (0, \beta)$, то

$$e^{\beta x} \overline{\pi}(x) dx \;=\; d_x \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y) dR(y).$$

Интегрируя последнее равенство по x, $z - \varepsilon \leqslant x \leqslant z$, $\varepsilon > 0$, получаем

$$\int_{x-\varepsilon}^{x} e^{\beta x} \overline{\pi}(x) dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (H(z-y) - H(z-\varepsilon-y)) dR(y).$$

Дальнейшие рассуждения проведём в предположении нерешётчатости случайной величины ξ и, следовательно, нерешётчатости $\widetilde{\xi}$. При всяком фиксированном $\varepsilon > 0$ по локальной теореме восстановления (см., например, [29]):

$$|H(t) - H(t-\varepsilon) - \varepsilon/\widetilde{a}| \;\leqslant\; r(t),$$

где функция $r(t)$ ограничена, убывает и $r(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому

$$\left| \int_{x-\varepsilon}^{x} e^{\beta x} \overline{\pi}(x) dx - \frac{\varepsilon}{\widetilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dR(y) \right| \;\leqslant\; \int_{-\infty}^{\infty} r(z-y) |dR(y)|.$$

При всяком фиксированном y имеем $r(z-y) \to 0$ при $z \to \infty$. Кроме того, $r(z-y) \leqslant r(-y)$ при $z \geqslant 0$, причём, по свойству конечности полной вариации функции R,

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(-y) |dR(y)| \;\leqslant\; r(-\infty) \int_{-\infty}^{\infty} |dR(y)| < \infty.$$

Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(z-y)|dR(y)| \ \to \ 0 \quad \text{при } z \to \infty,$$

и, следовательно,

$$\int_{x-\varepsilon}^{x} e^{\beta x}\overline{\pi}(x)dx \ = \ \frac{\varepsilon}{\widetilde{a}}(R(\infty) - R(-\infty)) + o(1) = \frac{\varepsilon R(\infty)}{\widetilde{a}} + o(1),$$

при $z \to \infty$ в силу (69). Функция $\overline{\pi}(x)$ не возрастает, поэтому

$$\varepsilon e^{\beta z}\overline{\pi}(z-\varepsilon) \ \geqslant \ \frac{\varepsilon R(\infty)}{\widetilde{a}} + o(1) \geqslant \varepsilon e^{\beta(z-\varepsilon)}\overline{\pi}(z).$$

Отсюда вытекает требуемая асимптотика:

$$\overline{\pi}(z) \ = \ e^{-\beta z}(c + o(1)),$$

где, используя замену $z - x = u$, получаем

$$\begin{aligned} c \equiv \frac{\varepsilon R(\infty)}{\widetilde{a}} \ &= \ -\frac{1}{\widetilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta z} \int_{-\infty}^{\infty} (F_x(z-x) - F(z-x))\pi(dx)dz \\ &= \ -\frac{1}{\widetilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x}\pi(dx) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta u}(F_x(u) - F(u))dz \\ &= \ \frac{1}{\beta\widetilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x}(\varphi(x,\beta) - 1))\pi(dx). \end{aligned} \tag{70}$$

Вычисления в решётчатом случае аналогичны. Теорема 11 доказана.

§ 11. Оценка второго члена асимптотики $\overline{\pi}(x)$ в крамеровском случае

Простоты ради рассмотрим цепь $\{X_n\}$, принимающую значения в $\mathbf{Z}^+$. Везде ниже $x, y \in \mathbf{Z}^+$. Как и прежде, предполагаем асимптотическую однородность цепи и выполнение условий теоремы 11.

Теорема 13. (а) *Пусть существует целое $k \geqslant 1$ такое, что*

$$\varphi^{(k+1)}(\beta) = \mathbf{E}\xi^{k+1}e^{\beta\xi} \ < \ \infty, \tag{71}$$

$$\sup_y \mathbf{E}\xi^{k+1}(y)e^{\beta\xi(y)} \ < \ \infty, \tag{72}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t}|\mathbf{P}\{\xi(y) \leqslant t\} - \mathbf{P}\{\xi \leqslant t\}|\, dt \ \leqslant \ \frac{c_1}{y^{k+1}}. \tag{73}$$

Тогда

$$\overline{\pi}(x) = ce^{-\beta x} + O(x^{-k}e^{-\beta x}) \quad \text{при } x \to \infty.$$

(б) *Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\sup_y \mathbf{E}e^{(\beta+\varepsilon)\xi(y)} \ < \ \infty, \tag{74}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t}|\mathbf{P}\{\xi(y) \leqslant t\} - \mathbf{P}\{\xi \leqslant t\}|\, dt \ \leqslant \ c_2 e^{-\varepsilon y}. \tag{75}$$

Тогда для некоторого $\delta > 0$ выполняется

$$\overline{\pi}(x) = ce^{-\beta x} + o(e^{-(\beta+\delta)x}) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Доказательство. (а) Пусть $\widetilde{\xi}$ — случайная величина с распределением

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(dt) &= \mathbf{P}\{\widetilde{\xi} \in dt\} = e^{\beta t}\,\mathbf{P}\{\xi \in dt\}, \\ \widetilde{a} &\equiv \mathbf{E}\widetilde{\xi} = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty, \\ \widetilde{H}(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{F}^{*(j)}(-\infty, y] \end{aligned}$$

— функция восстановления для случайной величины $\widetilde{\xi}$. При доказательстве теоремы 11 в предыдущем параграфе показано, что

$$\left| \int_{z-1}^{z} e^{\beta x}\pi(x)dx - \frac{1}{\widetilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dR(y) \right| \ \leqslant \ \int_{-\infty}^{\infty} r(z-y)\,|dR(y)|, \tag{76}$$

где $r(z) = |\widetilde{H}(z) - \widetilde{H}(z-1) - 1/\widetilde{a}|$ и

$$dR(y) \ = \ e^{\beta y}\sum_{x=0}^{\infty}(F_x(y-x) - F(y-x))\pi(x)dy, \qquad \pi(x) = \pi(\{x\}).$$

Там же было показано, что полная вариация функции R конечна. Оценим полную вариацию функции R на множестве $[N,\infty)$. По теореме 11 имеем $e^{\beta x}\pi(x) \leqslant c_3$ равномерно по x и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_N^\infty |dR(y)| &\leqslant \int_N^\infty e^{\beta y}\sum_{x=0}^\infty |F_x(y-x)-F(y-x)|\pi(x)dy \\
&= \sum_{x=0}^\infty e^{\beta x}\pi(x)\int_N^\infty e^{\beta(y-x)}|F_x(y-x)-F(y-x)|\,dy \\
&\leqslant \sum_{x=0}^\infty c_3\int_{N-x}^\infty e^{\beta t}|F_x(t)-F(t)|\,dt \\
&= \left(\sum_{x=0}^{N/2}+\sum_{x=N/2}^\infty\right) c_3\int_{N-x}^\infty e^{\beta t}|F_x(t)-F(t)|\,dt \\
&= \Sigma_1+\Sigma_2.
\end{aligned}$$

Оценим Σ_1. По неравенству типа Чебышёва и ввиду условий (71), (72) имеем

$$\begin{aligned}
\int_y^\infty e^{\beta t}F_x(t)\,dt &= \frac{1}{\beta}e^{\beta t}F_x(t)\Big|_y^\infty - \frac{1}{\beta}\int_y^\infty e^{\beta t}\,dF_x(t) \\
&\leqslant c_4 y^{-(k+1)},
\end{aligned}$$

$$\int_y^\infty e^{\beta t}F(t)\,dt \leqslant c_5 y^{-(k+1)}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \leqslant c_3(c_4+c_5)\sum_{x=0}^{N/2}\frac{1}{(N-x)^{k+1}} = O(N^{-k}).$$

Оценим Σ_2, используя условие (73):

$$\Sigma_2 \leqslant c_3\sum_{x=N/2}^\infty \frac{c_1}{x^{k+1}} = O(N^{-k}).$$

Таким образом,

$$\operatorname*{\mathbf{Var}}_{[N,\infty)} R(y) \equiv \int_N^\infty |dR(y)| = O(N^{-k}), \quad N\to\infty. \tag{77}$$

Ввиду условия (71) существует $(k+1)$-й момент случайной величины $\widetilde{\xi}$. Поэтому по следствию 1 из [80] справедлива оценка

$$r(x) \equiv |\widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(x-1) - 1/\widetilde{a}| \leqslant c_6 x^{-k},$$

причём $\sup_x r(x) = c_7 < \infty$. Подставляя оценки для r в (76), получаем

$$\begin{aligned}
\left|\pi(N)e^{\beta N}\frac{1-1/e}{\beta} - \frac{1}{\widetilde{a}}\int_{-\infty}^{\infty} dR(y)\right| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} r(N-y)\,|dR(y)| \\
&= \left(\int_{-\infty}^{N/2} + \int_{N/2}^{\infty}\right) r(N-y)\,|dR(y)| \\
&\leqslant c_6(N/2)^{-k}\int_{-\infty}^{N/2} |dR(y)| + c_7\int_{N/2}^{\infty} |dR(y)| \\
&= O(N^{-k}),
\end{aligned}$$

в силу конечности полной вариации функции R и (77). Отсюда вытекает утверждение (а) теоремы.

(б) Если выполнены условия (74) и (75) теоремы, то

$$\mathop{\mathbf{Var}}_{[N,\infty)} R(y) \;=\; O(e^{-\varepsilon N/2}), \quad N \to \infty. \tag{78}$$

В силу (74) $\mathbf{E}e^{\varepsilon_0\widetilde{\xi}} < \infty$ для любого $\varepsilon_0 < \varepsilon$. Кроме того, $\mathbf{E}\widetilde{\xi}^2 = \mathbf{E}\xi^2 e^{\beta\xi} < \infty$. Поэтому по теореме из [81] для некоторого $\varepsilon_1 > 0$

$$r(x) \equiv |\widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(x-1) - 1/\widetilde{a}| = o\left(e^{-\varepsilon_1 x}\right), \quad x \to \infty. \tag{79}$$

Из (78) и (79) вытекает утверждение (б) теоремы при $\delta = \min(\varepsilon/2, \varepsilon_1)$. Отметим, что, как следует из [81], существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\mathbf{E}e^{z\widetilde{\xi}} = \mathbf{E}e^{(\beta+z)\xi} \neq 1$ для всех z из полосы $0 < \mathrm{Re} z \leqslant \varepsilon_2$; в качестве ε_1 можно взять любое число ε_1 из интервала $(0, \varepsilon_2)$. Теорема доказана.

§ 12. Вероятности больших уклонений сумм случайных величин

12.1. Функция уклонений. В настоящем разделе напоминается понятие функции уклонений, а также её некоторые свойства (см., например, § 8, гл. 8 в

[3] или § 1, раздел 7 в [10]). Нам понадобятся следующие обозначения: $m = \mathbf{E}\xi$, $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$, $\lambda_+ = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$ (здесь и всюду далее предполагаем, что $\lambda_+ > 0$),

$$\alpha_+ = \lim_{\lambda\to\lambda_+} \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_+} d\ln\varphi(\lambda)/d\lambda.$$

Если случайная величина ξ ограничена сверху, то $\lambda_+ = \infty$ и α_+ совпадает с существенным супремумом множества значений ξ, т. е. с $\sup\{x : F(x){<}1\}$. Если случайная величина ξ не ограничена сверху и $\lambda_+ = \infty$, то $\alpha_+ = \infty$. Если же случайная величина ξ не ограничена сверху и λ_+ конечно, то α_+ может принимать a priori любое значение из интервала $(m, \infty]$, в том числе и отрицательное.

Хорошо известно (см., например, [29, гл. XVI, § 7]), что функция $\ln\varphi(\lambda)$ строго выпуклая. Поэтому для $\alpha \in [m, \alpha_+)$ максимум по λ разности $\alpha\lambda - \ln\varphi(\lambda)$ достигается в той единственной точке $\lambda(\alpha)$, в которой касательная к функции $\ln\varphi(\lambda)$ паралельна прямой $\alpha\lambda$, т. е. в которой $d\ln\varphi(\lambda)/d\lambda = \alpha$. Функция $\lambda(\alpha)$ возрастает; $\lambda(m){=}0$. Функция

$$\Lambda(\alpha) \equiv \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda - \ln\varphi(\lambda)\} = \alpha\lambda(\alpha) - \ln\varphi(\lambda(\alpha)), \quad \alpha \in [m, \alpha_+), \tag{80}$$

называется *функцией уклонений*. Дифференцирование последнего равенства приводит к соотношению $\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha)$; следовательно, функция Λ строго выпуклая. Имеем $\Lambda(m){=}\Lambda'(m){=}0$.

В случае, когда $\alpha_+ < \infty$ и $\lambda_+ < \infty$, доопределим функцию $\Lambda(\alpha)$ при $\alpha \geqslant \alpha_+$ линейным образом $\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+ - 0) + (\alpha - \alpha_+)\lambda_+$, положив при этом $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_+ - 0)$. Если $\alpha_+{<}\infty$ и $\lambda_+ = \infty$, т. е. если случайная величина ξ ограничена сверху (с необходимостью числом α_+), положим $\Lambda(\alpha_+) = -\ln\mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\}$ и $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha > \alpha_+$ в случае $\mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\} > 0$; $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha \geqslant \alpha_+$ в случае $\mathbf{P}\{\xi{=}\alpha_+\} = 0$. Отметим, что к таким значениям функции уклонений при $\alpha > \alpha_+$ приводит формальный поиск супремума в (80).

Если случайная величина ξ неограничена сверху, то функция $\Lambda(\alpha)$ конечна и непрерывно дифференцируема при всех $\alpha \geqslant 0$. Если случайная величина ξ ограничена сверху (т. е. если $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+ < \infty$), то функция $\Lambda(\alpha)$ терпит единственный разрыв в точке $\alpha = \alpha_+$.

12.2. Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений сумм. Известен (см., например, [10, § 1, лемма 7]) принцип больших уклонений для сумм независимых случайных величин, согласно которому для любого фиксированного $\alpha \geqslant m$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \ \to \ -\Lambda(\alpha). \tag{81}$$

Этот принцип остаётся верным и в следующей более сильной форме. Пусть $\alpha_1 > m$ — произвольное число такое, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Тогда при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \ = \ -\Lambda(\alpha) + o(1), \tag{82}$$

равномерно по $\alpha \in [m, \alpha_1]$. Левая часть в (82) равна $-\infty$, если $\Lambda(\alpha) = \infty$. Утверждение в равномерной форме вытекает из (81) ввиду равномерной непрерывности функции $\Lambda(\alpha)$ на компакте $[m, \alpha_1]$ и монотонности по α левой части (82).

В следующих двух вспомогательных разделах приводятся равномерные по параметру уточнения центральной предельной теоремы для сумм решётчатых и нерешётчатых слагаемых.

12.3. Равномерная по параметру локальная центральная предельная теорема (решётчатый случай). В этом разделе ξ_k будут предполагаться решётчатыми, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi < \infty$. Пусть числа b и h таковы, что $\mathbf{P}\{\xi = b + kh,\ k \in \mathbf{Z}\} = 1$, причём решётка с шагом h — минимальная, обладающая этим свойством. Известна [15, § 43] локальная теорема для распределения сумм S_n, согласно которой

$$\mathbf{P}\left\{S_n = nb + kh\right\} - \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-(nb+kh-nm_1)^2/2n\sigma^2} \;=\; o(1/\sqrt{n})$$

при $n \to \infty$ равномерно для всех $k \in \mathbf{Z}$. В формулируемой ниже лемме приводятся условия, при которых это утверждение справедливо равномерно по параметру, от которого зависит распределение ξ. Именно, рассматриваются решётчатые случайные величины $\xi_k^{[r]}$, распределение которых зависит от некоторого параметра r из произвольного параметрического множества и при каждом r является решётчатым с минимальной решёткой $\{b + kh,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Лемма 5. *Пусть семейство (по r) случайных величин $\{\xi^{[r]2}\}$ равномерно интегрируемо и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\sup_r \sup_{\mu \in [\varepsilon, 2\pi/h - \varepsilon]} |\mathbf{E} e^{i\mu\xi^{[r]}}| \;<\; 1. \tag{83}$$

(здесь i — мнимая единица). Тогда равномерно по k и r имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{S_n^{[r]} = nb + kh\} - \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{[r]}} e^{-(nb+kh-nm_1^{[r]})^2/2n\sigma^{[r]2}} \;=\; o(1/\sqrt{n}). \tag{84}$$

Замечание 5. Так как при любом r распределение $\xi^{[r]}$ решётчатое с минимальным шагом решётки равным h, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $|\mathbf{E} e^{i\mu\xi^{[r]}}| < 1$ равномерно по $\mu \in [\varepsilon, 2\pi/h - \varepsilon]$ и условие (83) является лишь равномерным по r аналогом этого соотношения.

Доказательство леммы 5. Из условия равномерной интегрируемости квадратов случайных величин вытекает, что в окрестности точки $\mu = 0$ имеет место разложение

$$\mathbf{E} e^{i\mu(\xi^{[r]} - m_1^{[r]})} = 1 - \sigma^{[r]2}\mu^2/2 + o(\mu^2),$$

причём равномерно по параметру r. В частности, характеристические функции $\mathbf{E}e^{i\mu(S_n^{[r]}-nm_1^{[r]})/\sqrt{n}\sigma^{[r]}}$ сходятся к характеристической функции $e^{-\mu^2/2}$ стандартного нормального закона равномерно по μ из любого компакта и равномерно по r. Эти обстоятельства и условие (83) позволяют нам далее дословно воспользоваться доказательством локальной теоремы из [15, § 43].

Из леммы 5 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть семейство (по r)случайных величин $\{\xi^{[r]2}\}$ равномерно интегрируемо. Кроме того, пусть конечное множество $K \subset \mathbf{Z}$ таково, что наибольший общий делитель чисел из K равен единице и для любых $k \in K$, r выполняется неравенство $\mathbf{P}\{\xi^{[r]} = b + kh\} \geqslant \varepsilon$, при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда равномерно по k и r имеет место соотношение* (84).

12.4. Равномерное по параметру разложение в центральной предельной теореме (нерешётчатый случай). Пусть теперь ξ_k нерешётчаты с нулевым средним значением и конечным третьим моментом $m_3 = \mathbf{E}\xi^3$. Известно (см., например, теорему 1 в [29, гл. XVI, § 4]) следующее разложение для распределения суммы $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, уточняющее центральную предельную теорему: при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n\mathbf{D}\xi_1}} \leqslant u\right\} - \Phi(u) - \frac{m_3}{6\,\sigma^3\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u) \;\; = \;\; o(1/\sqrt{n})$$

равномерно для всех u, где $\Phi(u)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В этом вспомогательном разделе приводится обобщение этого разложения на случай, когда распределение ξ зависит от некоторого параметра r из произвольного параметрического множества. Именно, рассматриваются случайные величины $\xi_k^{[r]}$, каждая из которых имеет нерешётчатое распределение с нулевым средним значением, единичной дисперсией и конечным третьим моментом $m_3^{[r]} = \mathbf{E}(\xi^{[r]})^3$.

Лемма 6. *Пусть для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$, не содержащего нуль, выполняется*

$$\sup_r \sup_{\mu\in K} |\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}| \ < \ 1 \tag{85}$$

(здесь i — мнимая единица). Кроме того, пусть семейство (по r) случайных величин $\{\xi^{[r]3}\}$ равномерно интегрируемо. Тогда функция распределения $F_n^{[r]}(u)$ случайной величины $S_n^{[r]}/\sqrt{n}$ удовлетворяет при $n \to \infty$ равномерному по $u \in \mathbf{R}$ и r соотношению

$$F_n^{[r]}(u) - \Phi(u) - \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u) \ = \ o(1/\sqrt{n}).$$

З а м е ч а н и е 6. Так как при любом r распределение $\xi^{[r]}$ нерешётчатое, то для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$, не содержащего нуль, выполняется

$$\sup_{\mu\in K} |\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}| < 1$$

и условие (85) является лишь равномерным аналогом этого соотношения.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует рассуждениям из [29, гл. XVI, § 4] и основано на приведённой там оценке (4.4): для любого $\varepsilon > 0$

$$\left|F_n^{[r]}(u) - \Psi(u)\right| \ \leqslant \ \int_{-a\sqrt{n}}^{a\sqrt{n}} \left|\frac{(\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}/\sqrt{n}})^n - \psi(\mu)}{\mu}\right| d\mu + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \tag{86}$$

где функция ограниченной вариации

$$\Psi(u) \ = \ \Phi(u) + \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u),$$

имеет преобразование Фурье

$$\psi(\mu) \ \equiv \ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu u} d\Psi(u) = e^{-\mu^2/2}\left[1 + \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(i\mu)^3\right],$$

а постоянная a выбрана столь большой, что $24|\Psi'(u)| < \varepsilon a$ при всех u и r. Такой выбор a возможен ввиду равномерной ограниченности третьих моментов.

Разобьём интервал интегрирования в (86) на две части. В силу условия (85) максимум $|\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}|$ по области $0 < \delta \leqslant |\mu| \leqslant a < \infty$ строго меньше единицы. Как отмечается в [29, гл. XVI, § 4], отсюда вытекает, что интеграл по области $|\mu| \in [\delta\sqrt{n}, a\sqrt{n}]$ стремится к нулю быстрее любой степени числа $1/n$. Далее, ввиду равномерной интегрируемости кубов случайных величин, третьи производные функций $\ln \mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}$ непрерывны в некоторой окрестности нуля равномерно по r. Тогда в соответствии с [29, гл. XVI, § 2] найдётся $\delta > 0$ такое, что при $|\mu| \leqslant \delta\sqrt{n}$ подынтегральное выражение в (86) допускает оценку

$$\left|\frac{(\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}/\sqrt{n}})^n - \psi(\mu)}{\mu}\right| \leqslant e^{-\mu^2/4}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|\mu| + \frac{m_3^{[r]2}}{72n}|\mu|^5\right),$$

и поэтому при больших n правая часть в (86) меньше $1000\varepsilon/\sqrt{n}$. Ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

12.5. Точная асимптотика вероятностей больших уклонений сумм.

Определение 3. Распределение F_λ называем *преобразованием Крамера распределения F в точке* λ, если $F_\lambda(du) = e^{\lambda u}F(du)/\varphi(\lambda)$, в случае существования преобразования Лапласа для распределения F в точке λ.

Распределение F_λ при $\lambda = \lambda(\alpha)$ называем *преобразованием Крамера $F^{(\alpha)}$ с параметром α над распределением F*, а случайную величину с распределением $F^{(\alpha)}$ обозначаем $\xi^{(\alpha)}$. Отметим, что $\xi^{(\alpha)} = \xi$ при $\alpha = m$. По определению $\mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)} = \alpha$,

$$\begin{aligned}\sigma^{(\alpha)2} = \mathbf{D}\xi^{(\alpha)} &= \varphi''(\lambda)/\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)} - \alpha^2 \\ &= (\ln\varphi(\lambda))''\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)}.\end{aligned}$$

Дифференцируя тождество $\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)} = \alpha$ по переменной α и учитывая равенство $\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha)$, приходим к соотношению

$$\sigma^{(\alpha)2} = 1/\Lambda''(\alpha). \tag{87}$$

В частности, $\Lambda''(m) = 1/\mathbf{D}\xi$.

В следующих двух леммах приводятся обобщения теоремы А из [65] и утверждений из [23] . Обозначаем $\gamma = \sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)\sqrt{n}$.

Лемма 7. *Пусть распределение F нерешётчатое, а числа α_1 и α_2 таковы, что $m \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_+$; если $\alpha_1 = m$, то дополнительно предполагаем конечность $\mathbf{E}|\xi|^3$. Тогда при $n \to \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ имеет место равенство*

$$\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} = e^{-n\Lambda(\alpha)}e^{\gamma^2/2}(1 - \Phi(\gamma))(1 + o(1)).$$

З а м е ч а н и е 7. В ходе доказательства будет установлено более сильное соотношение, уточняющее порядок малости остатка $o(1)$ (см. (89)).

Предложенное в лемме асимптотическое равенство является универсальным в том отношении, что оно содержит в себе аппроксимацию распределения сумм как в области нормальных, так и в области больших уклонений. Например, поскольку $1 - \Phi(\gamma) \sim e^{-\gamma^2/2}/\sqrt{2\pi}\gamma$ при $\gamma \to \infty$, то получаем следующее

Следствие 2. *Если $\mathbf{E}\xi < \alpha_1$, то при $n \to \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$*

$$\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

Кроме того, если $\mathbf{E}|\xi|^3 < \infty$ и $y_n \to \infty$, $y_n = o(\sqrt{n})$, то последняя асимптотика имеет место при $n \to \infty$ равномерно по $\alpha \in [\mathbf{E}\xi + y_n/\sqrt{n}, \alpha_2]$.

С другой стороны, в окрестности точки $\alpha = m$ справедливо разложение $\Lambda(\alpha) = \gamma^2/2n + O(|\alpha - m|^3)$, из которого вытекает

Следствие 3. *Если $\mathbf{E}|\xi|^3 < \infty$, то при $n \to \infty$ равномерно в области $\alpha \in [m, m + o(n^{-1/3})]$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \sim 1 - \Phi(\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)\sqrt{n}) \sim 1 - \Phi((\alpha - \mathbf{E}\xi)\sqrt{n}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Пусть $\{\xi_k^{(\alpha)}\}$ — набор независимых копий величины $\xi^{(\alpha)}$; $\zeta_k^{(\alpha)} = (\xi_k^{(\alpha)} - \alpha)/\sigma^{(\alpha)}$. Положим

$$S_n^{(\alpha)} = \xi_1^{(\alpha)} + \cdots + \xi_n^{(\alpha)}, \qquad F_n^{(\alpha)}(u) = \mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1^{(\alpha)} + \cdots + \zeta_n^{(\alpha)}}{\sqrt{n}} \leqslant u\right\}. \tag{88}$$

Справедлива «формула обращения» (см., например, [3], § 8, гл. 8)

$$\mathbf{P}\{S_n \in du\} \;=\; \varphi^n(\lambda(\alpha))e^{-\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} \in du\}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \;&=\; \varphi^n(\lambda(\alpha))\int_x^\infty e^{-\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} \in du\}\\ &=\; \varphi^n(\lambda(\alpha))e^{-\lambda(\alpha)\alpha n}\int_0^\infty e^{-\lambda(\alpha)\sigma^{(\alpha)}\sqrt{n}u}dF_n^{(\alpha)}(u).\end{aligned}$$

Вспоминая определение функции Λ и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \;=\; e^{-n\Lambda(\alpha)}\gamma\int_0^\infty e^{-\gamma u}(F_n^{(\alpha)}(u) - F_n^{(\alpha)}(0))du.$$

Набор случайных величин $\{\zeta_1^{(\alpha)}, \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$ удовлетворяет условиям леммы 6. Применяя её к оценке разности $F_n^{(\alpha)}(u) - F_n^{(\alpha)}(0)$ в последнем равенстве, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \;=\; e^{-n\Lambda(\alpha)}\gamma\Bigg[&\int_0^\infty e^{-\gamma u}(\Phi(u) - \Phi(0))du\\ &+\frac{m_3^{(r)}}{6\sigma^{(\alpha)3}\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-\gamma u}\left((1-u^2)\Phi'(u) - \Phi'(0)\right)du\\ &+o(1/\sqrt{n})\int_0^\infty e^{-\gamma u}du\Bigg].\end{aligned}$$

Отметим теперь, что справедливо тождество

$$\int_0^\infty e^{-\gamma u}e^{-u^2/2}du = e^{\gamma^2/2}(1 - \Phi(\gamma))\sqrt{2\pi}$$

(оно получается, если выделить полный квадрат в показателе экспоненты). Дифференцирование этого тождества по γ позволяет найти значения интегралов $\int_0^\infty u^k e^{-\gamma u} e^{-u^2/2} du$, $k = 1, 2, 3$. Поступая таким образом, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\gamma u}(\Phi(u) - \Phi(0))du &= e^{\gamma^2/2}(1 - \Phi(\gamma))/\gamma, \\ \int_0^\infty e^{-\gamma u}((1 - u^2)\Phi'(u) - \Phi'(0))du &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} - \gamma^2 e^{\gamma^2/2}(1 - \Phi(\gamma)) - \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} e^{\gamma^2/2}(1 - \Phi(\gamma)) + \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}}\left(O\left(\frac{1}{1+\gamma^2}\right) + o(1)\right). \quad (89)$$

Последнее соотношение влечёт утверждение леммы.

Лемма 8. *Пусть распределение F решётчатое с минимальной решёткой $\{b + kh, k \in \mathbf{Z}\}$, а числа α_1 и α_2 таковы, что $m \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_+$; если $\alpha_1 = m$, то дополнительно предполагаем конечность $\mathbf{E}\xi^2$. Тогда при $x = nb + kh$, $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{S_n = x\} \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}} e^{-n\Lambda(x/n)},$$

равномерно по x таким, что $\alpha = x/n \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Доказательство. В решётчатом случае формула обращения принимает вид

$$\mathbf{P}\{S_n = x\} \;=\; \varphi^n(\lambda(\alpha)) e^{-\lambda(\alpha)\alpha n} \mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} = x\}.$$

Семейство случайных величин $\{\xi_1^{(\alpha)}, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$ удовлетворяет условиям следствия 1. Поэтому $\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} = x\} \sim h/\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}$; отсюда вытекает требуемая асимптотика.

Следствие 4. *Если* $\alpha_1 > m$, *то при* $n \to \infty$ *равномерно по* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *таким, что* $(\alpha - b)n/h$ *— целое число,*

$$\mathbf{P}\{S_n/n > \alpha\} \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}(1 - e^{\lambda(\alpha)h})} e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

12.6. Асимптотика табу-вероятностей больших уклонений сумм. Положим $M_-^{(\alpha)} = \min\limits_{k>0} S_k^{(\alpha)}$, $b(v, \alpha) = \mathbf{P}\{M_-^{(\alpha)} > v\}$. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение об асимптотике вероятности

$$q_n(v, x) \equiv \mathbf{P}\{S_k > v \text{ при всех } k < n, S_n > x\}.$$

Лемма 9. *Пусть* α_1 *и* α_2 *— произвольные числа такие, что* $0<\alpha_1<\alpha_2$ *и* $\Lambda(\alpha_2) < \infty$; $v_0 \in \mathbf{R}$. *Тогда при* $x\to\infty$ *равномерно по* v *и* n *таким, что* $v \leqslant v_0$ *и* $x/n \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *имеет место соотношение*

$$n^{-1} \ln q_n(v, x) \geqslant -\Lambda(x/n) + o(1).$$

Если, кроме того, $\alpha_2 < \alpha_+$, *то имеет место эквивалентность*

$$q_n(v, x) \sim b(v, x/n)\mathbf{P}\{S_n > x\}.$$

Доказательство второго утверждения фактически содержится в [7, 8]. Единственное затруднение состоит в том, что в [7, 8] используется дополнительное условие Крамера на характеристическую функцию распределения F. Однако это дополнительное условие используется лишь для корректной ссылки на предшествующие результаты, содержащие равномерные асимптотики вероятностей больших уклонений. В нашем же изложении эти равномерные асимптотики (следствие 2 и лемма 8) получены без использования условия Крамера на характеристическую функцию.

Первое утверждение леммы можно вывести из второго, применяя метод срезок подобно тому, как это проделано при доказательстве леммы 7 в [10, § 1]. Лемма доказана.

12.7. Некоторые результаты, касающиеся асимптотики сумм вероятностей $\mathbf{P}\{S_k > x\}$. Пусть $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ и $\varphi'(\beta) < \infty$; в частности, $\alpha_+ \geqslant \varphi'(\beta) > 0$. Положим $\alpha_0 \equiv \varphi'(\beta)/\varphi(\beta) = \varphi'(\beta)$. Имеем $\alpha_0 \in (0, \alpha_+]$, $\lambda(\alpha_0) = \beta$ и $\Lambda(\alpha_0) = \beta\alpha_0$.

Для функции восстановления, построенной по суммам S_k, при $x \to \infty$ справедливо равенство

$$H(x) \equiv \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{P}\{S_k > x\} \;=\; (c_H + o(1))e^{-\beta x}. \tag{90}$$

Если случайная величина ξ нерешётчатая, то $c_H = 1/\beta\alpha_0$. Если ξ решётчатая с минимальной решёткой $\{kh,\ k \in \mathbf{Z}\}$, то $c_H = h/(1 - e^{-\beta h})\alpha_0$, а x следует брать кратным h.

Чтобы проверить (90), рассмотрим функцию восстановления $H^{(\alpha_0)}$, построенную по суммам $S_k^{(\alpha_0)}$ с положительным средним сносом. Тогда справедлива формула обращения

$$H(x) \;=\; e^{-\beta x}\int_x^{\infty} e^{-\beta(u-x)} H^{(\alpha_0)}(du).$$

Применение локальной теоремы восстановления для $H^{(\alpha_0)}$ приводит к (90) (ср. также с [11], где асимптотика $H(x)$ изучена более полно).

Всюду в дальнейшем $n_0 = n_0(x) = x/\alpha_0$. Асимптотика частичных сумм вероятностей $\mathbf{P}\{S_k > x\}$ описывается в следующей лемме.

Лемма 10. *Пусть $\varphi(\lambda) < \infty$ при некотором $\lambda > \beta$, т. е. $\lambda_+ > \beta$, и функция $y(x) \to \infty$ такова, что $y(x) = o(x^{1/6})$ при $x \to \infty$. Тогда имеет место равномерное по $y \geqslant -y(x)$ соотношение*

$$\sum_{k\leqslant y\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} > x\} = (c_H + o(1))e^{-\beta x}\Phi(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)}) \quad \text{при } x \to \infty;$$

в решётчатом случае следует брать x кратным шагу решётки.

Прежде, чем приступить к доказательству, введём ещё одну функцию. Обозначим

$$V(\alpha) = \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha}.$$

Поскольку

$$V'(\alpha) = \frac{\lambda(\alpha)\alpha - \Lambda(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\ln\varphi(\lambda(\alpha))}{\alpha^2},$$

то $V'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (0, \alpha_0)$; $V'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_0$ и $V'(\alpha_0) = 0$. Таким образом, функция $V(\alpha)$ достигает в точке α_0 своего минимального значения на $(0, \infty)$, равного $\Lambda(\alpha_0)/\alpha_0 = \beta$. Имеем $V''(\alpha_0){=}1/\alpha_0\sigma^{(\alpha_0)2}$.

Доказательство леммы 10. В силу следствий 2 и 4 равномерно по $|k| \leqslant 2y(x)\sqrt{x} = o(x^{2/3})$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_{n_0+k} > x\} \;&\sim\; \frac{\alpha_0 c_H}{\sqrt{2\pi n_0}\sigma^{(\alpha_0)}} e^{-(n_0+k)\Lambda\left(\frac{x}{n_0+k}\right)} \\ &=\; \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi x}\sigma^{(\alpha_0)}} e^{-xV\left(\frac{x}{n_0+k}\right)}.\end{aligned} \tag{91}$$

Ввиду равенств $V(\alpha_0){=}\beta$ и $V'(\alpha_0){=}0$ имеем разложение

$$V\left(\frac{x}{n_0+k}\right) = \beta + \frac{V''(\theta)}{2}\left(\frac{x}{n_0+k} - \alpha_0\right)^2,$$

где θ находится между α_0 и $x/(n_0+k)$; в частности, $\theta \to \alpha_0$. Поскольку

$$\frac{x}{n_0+k} - \alpha_0 \;=\; \frac{\alpha_0}{1+k/n_0} - \alpha_0 = -\frac{\alpha_0^2 k}{x}(1 + O(k/x))$$

и

$$V''(\theta) = V''(\alpha_0) + O(k/x) = \frac{1}{\alpha_0\sigma^{(\alpha_0)2}}(1 + O(k/x))$$

равномерно по $|k| \leqslant 2y(x)\sqrt{x}$, то при таких значениях k имеем

$$e^{-xV\left(\frac{x}{n_0+k}\right)} \;=\; e^{-\beta x} e^{-\alpha_0^3(k/\sqrt{x})^2/2\sigma^{(\alpha_0)2} + o(1)}. \tag{92}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Подставляя (92) в (91), получаем равномерно по всем y_1 и y_2 таким, что $y_2 - y_1 \geqslant \varepsilon$, $|y_1|$, $|y_2| \leqslant 2y(x)$ следующую эквивалентность:

$$\sum_{k=y_1\sqrt{x}}^{y_2\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} > x\} \;\sim\; e^{-\beta x}\frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi x}\sigma^{(\alpha_0)}} \sum_{k=y_1\sqrt{x}}^{y_2\sqrt{x}} e^{-\alpha_0^3(k/\sqrt{x})^2/2\sigma^{(\alpha_0)2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\sim\ e^{-\beta x}\frac{\alpha_0^{3/2}c_H}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(\alpha_0)}}\int_{y_1}^{y_2} e^{-\alpha_0^3 t^2/2\sigma^{(\alpha_0)2}}\,dt\\
&=\ c_H e^{-\beta x}\Biggl(\Phi\Bigl(y_2\frac{\alpha_0^{3/2}}{\sigma^{(\alpha_0)}}\Bigr)-\Phi\Bigl(y_1\frac{\alpha_0^{3/2}}{\sigma^{(\alpha_0)}}\Bigr)\Biggr). \qquad (93)
\end{aligned}
$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышёва имеем

$$
\mathbf{P}\{S_{n_0+k}>x\}\leqslant e^{-\lambda x}\varphi^{n_0+k}(\lambda).
$$

Суммируя это неравенство по $k\leqslant -2y(x)\sqrt{x}$ и полагая $\lambda=\lambda(x/(n_0-2y(x)\sqrt{x}))$, получаем оценку

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\leqslant -2y(x)\sqrt{x}}\mathbf{P}\{S_{n_0+k}>x\}\ &\leqslant\ n_0 e^{-\lambda x}\varphi^{n_0-2y(x)\sqrt{x}}(\lambda)\\
&=\ (x/\alpha_0)e^{-xV(x/(n_0-2y(x)\sqrt{x}))}.
\end{aligned}
$$

Отсюда, ввиду (92),

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\leqslant -2y(x)\sqrt{x}}\mathbf{P}\{S_{n_0+k}>x\}\ &\leqslant\ cxe^{-\beta x}e^{-2\alpha_0^3y^2(x)/\sigma^{(\alpha_0)2}}\\
&=\ o\Bigl(e^{-\beta x}e^{-\alpha_0^3y^2(x)/2\sigma^{(\alpha_0)2}}\Bigr). \qquad (94)
\end{aligned}
$$

Соотношения (93) и (94) влекут утверждение леммы.

Следствие 5. *Пусть $\lambda_+>\beta$, $v_0\in\mathbf{R}$ и функция $y(x)\to\infty$ такова, что $y(x)=o(x^{1/6})$ при $x\to\infty$. Тогда равномерно по $y\geqslant -y(x)$ и $v\leqslant v_0$ при $x\to\infty$ имеет место соотношение (обозначение $q_n(v,x)$ — из леммы 9)*

$$
\sum_{k\leqslant y\sqrt{x}}q_{n_0+k}(v,x)=b(v,\alpha_0)(c_H+o(1))e^{-\beta x}\Phi(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)});
$$

в решётчатом случае следует брать x кратным шагу решётки.

В частности, если последовательности целых чисел $k_1(x)$ и $k_2(x)$ таковы, что $k_1(x)<k_2(x)$ и $k_2(x)-k_1(x)=o(\sqrt{x})$, то при $x\to\infty$ справедлива оценка

$$
\sum_{k\in[k_1(x),k_2(x)]}q_k(v,x)=o(e^{-\beta x}).
$$

Доказательство. Основной вклад в сумму в лемме 10 вносят слагаемые, отвечающие значениям k порядка $o(x)$. При таких значениях k функция $b(v, x/(n_0+k))$ стремится к $b(v, \alpha_0)$. Поэтому следствие вытекает из лемм 9 и 10.

§ 13. Принцип больших уклонений для асимптотически однородной цепи

В настоящем и следующем параграфах исследуется крамеровский случай, когда $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ и $\alpha_0 = \varphi'(\beta) < \infty$.

13.1. Однородная цепь с нулевым начальным условием. В настоящем разделе приводятся некоторые свойства распределения максимума $M_n = \max\{0, S_1, \ldots, S_n\}$. Отметим, что из (82) вытекает соотношение

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{S_n > x\} \;=\; -V(x/n) + o(1) \tag{95}$$

при $x \to \infty$ равномерно по n таким, что $x/n \in (0, \alpha_1]$, где как и прежде

$$V(\alpha) = \Lambda(\alpha)/\alpha.$$

Здесь $\alpha_1 > 0$ — произвольное число такое, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Очевидно также, что обе части в (95) равны $-\infty$, если $\Lambda(x/n) = \infty$.

Введём в рассмотрение непрерывные функции $\widetilde{V}(\alpha)$ и $\widetilde{\lambda}(\alpha)$:

$$\widetilde{V}(\alpha) \equiv \inf_{\alpha' \geqslant \alpha} V(\alpha') \;=\; \begin{cases} \beta & \text{при } \alpha \leqslant \alpha_0, \\ V(\alpha) & \text{при } \alpha \geqslant \alpha_0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\lambda}(\alpha) \;\equiv\; \begin{cases} \beta & \text{при } \alpha \leqslant \alpha_0, \\ \lambda(\alpha) & \text{при } \alpha \geqslant \alpha_0. \end{cases}$$

В следующей лемме формулируется принцип больших уклонений для M_n.

Лемма 11. *Пусть $\alpha_1 > 0$ таково, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Тогда при $x \to \infty$ имеет место соотношение*

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{M_n > x\} = -\widetilde{V}(x/n) + o(1),$$

равномерно по n таким, что $x/n \in (0, \alpha_1]$; $\ln \mathbf{P}\{M_n > x\} = -\infty$, если $\Lambda(x/n) = \infty$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in [\beta, \lambda_+)$. Тогда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} \geqslant 1$ и последовательность $e^{\lambda S_n}$ образует субмартингал. Поэтому по неравенству Дуба для неотрицательных субмартингалов для любого x действует оценка

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} = \mathbf{P}\Big\{\sup_{k \leqslant n} e^{\lambda S_k} > e^{\lambda x}\Big\} \leqslant e^{-\lambda x}\mathbf{E}e^{\lambda S_n}. \tag{96}$$

Правая часть последнего неравенства равна

$$e^{-\lambda x}\varphi^n(\lambda) = \exp\{-n(\lambda x/n - \ln \varphi(\lambda))\}.$$

Если $\alpha \equiv x/n \in [\alpha_0, \infty)$, то $\lambda(\alpha) \geqslant \beta$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \ \leqslant \ e^{-\lambda(\alpha)x}\varphi^n(\lambda(\alpha)) = e^{-n\Lambda(x/n)} = e^{-xV(x/n)}. \tag{97}$$

Кроме того, из (96) при $\lambda = \beta$ вытекает оценка Лундберга — Крамера

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \ \leqslant \ e^{-\beta x}, \tag{98}$$

верная для любых n и x. Объединяя последние две оценки, получаем при любых n и x неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \ \leqslant \ e^{-x\widetilde{V}(x/n)}. \tag{99}$$

Используя верное для любого $m \leqslant n$ неравенство $\mathbf{P}\{M_n > x\} \geqslant \mathbf{P}\{S_m > x\}$ и полагая в (95) $m = n$ в случае $x/n \geqslant \alpha_0$ и $m = x/\alpha_0$ иначе, получаем при $x \to \infty$ следующую оценку снизу

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{M_n > x\} \ \geqslant \ -\widetilde{V}(x/n) + o(1). \tag{100}$$

Из (99) и (100) вытекает утверждение леммы.

В следующей лемме несколько обобщается теорема 10 из [5] в части, касающейся зоны значений времени n, в которой хвосты распределений M_n и M_∞ эквивалентны.

Лемма 12. *Пусть $y(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$ имеет место равномерная по $n \geqslant x/\alpha_0 + y(x)\sqrt{x}$ эквивалентность*

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \sim \mathbf{P}\{M_\infty > x\}.$$

Доказательство. Известна (см., например, [29, гл. XII, § 5]) оценка Крамера, согласно которой при $x \to \infty$ (в случае решётчатого распределения отдельного слагаемого x следует брать кратным шагу решётки)

$$\mathbf{P}\{M_\infty > x\} \ \sim \ ce^{-\beta x}, \quad c \in (0,1). \tag{101}$$

Пусть $\lambda \in [0,\beta]$. Тогда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} \leqslant 1$ и последовательность $e^{\lambda S_n}$ образует супермартингал. Поэтому по неравенству Дуба для неотрицательных супермартингалов для любого x действует оценка

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\geqslant n+1} S_k > x\Big\} \ = \ \mathbf{P}\Big\{\sup_{k\geqslant n+1} e^{\lambda S_k} > e^{\lambda x}\Big\} \leqslant e^{-\lambda x}\mathbf{E}e^{\lambda S_n+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{M_\infty > x\} - \mathbf{P}\{M_n > x\} \ &\leqslant \ e^{-\lambda x}\mathbf{E}e^{\lambda S_{n+1}} \\ &= \ e^{-\lambda x}\varphi^{n+1}(\lambda) \leqslant e^{-n(\lambda x/n - \ln\varphi(\lambda))}.\end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv x/n < \alpha_0$, то $\lambda(\alpha) < \beta$ и, соответственно,

$$\mathbf{P}\{M_\infty > x\} - \mathbf{P}\{M_n > x\} \ \leqslant \ e^{-n\Lambda(x/n)}.$$

Функция Λ строго выпуклая и её вторая производная на отрезке $[0,\alpha_0]$ отделена снизу от нуля некоторым числом $\delta > 0$; поэтому

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha) \ &\geqslant \ \Lambda(\alpha_0) + \Lambda'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \delta(\alpha - \alpha_0)^2/2 \\ &= \ \beta\alpha + \delta(\alpha - \alpha_0)^2/2.\end{aligned}$$

Рассматриваемую зону значений времени n можно характеризовать неравенством $\alpha_0 - \alpha \geqslant y(x)/\sqrt{n}$ (вообще говоря, изменив значения функции y в конечное число раз). В этой зоне вследствие двух последних неравенств имеем

$$\mathbf{P}\{M_\infty > x\} - \mathbf{P}\{M_n > x\} \leqslant e^{-\beta x} e^{-\delta y^2(x)/2} = o(e^{-\beta x}) \text{ при } x \to \infty,$$

что в сочетании с (101) завершает доказательство.

13.2. Верхние оценки вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящем разделе предполагается, что вещественнозначная цепь Маркова X асимптотически однородна.

Лемма 13. *Пусть $\lambda_1 \in [\beta, \lambda_+)$, а если $\lambda_+ < \infty$ и $\varphi'(\lambda_+) < \infty$, то дополнительно допускаем возможность $\lambda_1 = \lambda_+$. Обозначим через α_1 конечное решение уравнения $\lambda(\alpha)=\lambda_1$. Пусть для любого $\lambda \in [0, \lambda_1)$ начальное распределение цепи имеет конечный экспоненциальный момент $\mathbf{E}e^{\lambda X_0} < \infty$, а скачки цепи удовлетворяют условию*

$$\sup_{u<0} \mathbf{E}e^{\lambda(u+\xi(u))} < \infty, \qquad \sup_{u\geqslant 0} \mathbf{E}e^{\lambda\xi(u)} < \infty. \tag{102}$$

Тогда при $x \to \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \overline{\pi}_n(x) \leqslant -\widetilde{V}_1(x/n) + o(1), \tag{103}$$

равномерно по всем значениям n таким, что отношение x/n ограничено сверху. Здесь непрерывная функция $\widetilde{V}_1(\alpha)$ задается равенством

$$\widetilde{V}_1(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \text{если } \alpha \leqslant \alpha_0, \\ \Lambda(\alpha)/\alpha, & \text{если } \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \\ (\Lambda(\alpha_1) + (\alpha - \alpha_1)\lambda_1)/\alpha, & \text{если } \alpha \geqslant \alpha_1. \end{cases}$$

Замечание 8. По определению функция $\widetilde{V}_1(\alpha)$ совпадает с функцией $\widetilde{V}(\alpha)$ на множестве $\alpha \leqslant \alpha_1$. Если $\lambda_+ < \infty$, $\varphi'(\lambda_+) < \infty$ и $\lambda_1 = \lambda_+$, то $\alpha_1 = \alpha_+ < \infty$ и $\widetilde{V}_1(\alpha) = \widetilde{V}(\alpha)$ при всех значениях α. В общем случае $\widetilde{V}_1 \leqslant \widetilde{V}$.

Доказательство леммы 13. Пусть λ_2 — произвольное число, меньшее λ_1, α_2 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_2$ и $\widetilde{V}_2(\alpha)$ — функция, построенная как $\widetilde{V}_1(\alpha)$ с заменой λ_1 и α_1 на λ_2 и α_2 соответственно.

Для любого $U > 0$ определим случайную величину $\Xi(U)$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\Xi(U) > y\} = \max\left(\sup_{u<U} \mathbf{P}\{u + \xi(u) > U + y\},\ \sup_{u\geqslant U} \mathbf{P}\{\xi(u) > y\}\right).$$

Из слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$ вытекает, что $\Xi(U)$ слабо сходится к ξ при $U \to \infty$, причём в силу условия (102) сходятся и экспоненциальные моменты: для любого $\lambda \in [0, \lambda_2]$

$$\mathbf{E}e^{\lambda\Xi(U)} \to \mathbf{E}e^{\lambda\xi} \text{ при } U \to \infty.$$

Обозначим $\varphi(U, \lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\Xi(U)}$, $\beta(U) = \sup\{\lambda : \varphi(U, \lambda) \leqslant 1\}$, $\alpha_0(U) = \varphi'(U, \beta(U))$, $\Lambda(U, \alpha)$ — функцию уклонений случайной величины $\Xi(U)$, $\lambda(U, \alpha) = \Lambda'(U, \alpha)$, $\alpha_2(U)$ — решение уравнения $\lambda(U, \alpha) = \lambda_2$ и

$$\widetilde{V}_2(U, \alpha) = \begin{cases} \beta(U), & \text{если } \alpha \leqslant \alpha_0(U), \\ \Lambda(U, \alpha)/\alpha, & \text{если } \alpha_0(U) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2(U), \\ (\Lambda(U, \alpha_2(U)) + (\alpha - \alpha_2(U))\lambda_2)/\alpha, & \text{если } \alpha \geqslant \alpha_2(U). \end{cases}$$

Все эти величины определены при достаточно больших значениях U. На множестве $\alpha \leqslant \alpha_2$ (α_2 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_2$) функция уклонений $\Lambda(U, \alpha)$ сходится к $\Lambda(\alpha)$ и, соответственно,

$$\widetilde{V}_2(U, \alpha) \to \widetilde{V}_2(\alpha) \text{ при } U \to \infty. \tag{104}$$

Рассмотрим однородную цепь Маркова $Y_n(U) = (Y_{n-1}(U) + \Xi_n(U))^+$, где $\Xi_n(U)$ — независимые копии случайной величины $\Xi(U)$. По построению для любых начальных состояний v и u, подчинённых условиям $v \leqslant u$ и $u \geqslant U$, выполняется неравенство $v + \xi(v) \leqslant_{\mathrm{st}} u + \Xi(U)$. Поэтому однородная цепь $U + Y_n(U)$ мажорирует по вероятности исходную цепь X_n. В частности,

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \leqslant \mathbf{P}\{U + Y_n(U) > x\}.$$

Отсюда и из (99) получаем оценку

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \leqslant e^{-(x-U)\widetilde{V}(U,(x-U)/n)}.$$

Утверждение леммы вытекает теперь из неравенства $\widetilde{V}_2(U,\alpha) \leqslant \widetilde{V}(U,\alpha)$, сходимости (104) и произвольности выбора числа λ_2, меньшего λ_1.

В случае, когда случайная величина ξ ограничена сверху, предельным переходом по λ_1, $\lambda_1 \to \infty$, (соответственно, $\alpha_1 \to \alpha_+$) получаем из леммы 13 следующее

Следствие 6. *Пусть $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+ < \infty$, т. е. случайная величина ξ ограничена сверху значением α_+. Пусть для любого $\lambda > 0$ выполнено условие (102) и $\mathbf{E}e^{\lambda X_0}$ конечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x \to \infty$ имеют место соотношение*

$$x^{-1}\ln\overline{\pi}_n(x) \;\leqslant\; -\widetilde{V}(x/n) + o(1)$$

равномерно по n таким, что $x/n \leqslant \alpha_+ - \varepsilon$, и сходимость

$$x^{-1}\ln\overline{\pi}_n(x) \;\to\; -\infty$$

равномерно по n таким, что $x/n \geqslant \alpha_+ + \varepsilon$.

13.3. Оценки снизу для вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящем разделе рассматривается асимптотически однородная цепь Маркова X со значениями в $\mathbf{R}$. Начальное распределение цепи полагается произвольным.

Лемма 14. *Пусть α_1 — произвольное число бо́льшее α_0 (в случае ограниченности случайной величины ξ предполагаем дополнительно, что $\alpha_1 < \alpha_+$). Пусть для любого уровня $u \in \mathbf{R}$ найдётся $n_0 = n_0(u)$ такое, что*

$$\mathbf{P}\{X_{n_0} > u\} \;>\; 0. \tag{105}$$

Тогда при $x \to \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \overline{\pi}_n(x) \geqslant -\widetilde{V}(x/n) + o(1),$$

равномерно по тем значениям n, для которых $\alpha_0 \leqslant x/n \leqslant \alpha_1$.

Если, кроме того, для любого $u \in \mathbf{R}$ найдётся n_0 такое, что

$$\inf_{n \geqslant n_0} \mathbf{P}\{X_n > u\} \ > \ 0, \tag{106}$$

то при $x \to \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \overline{\pi}_n(x) \geqslant -\beta + o(1),$$

равномерно по тем значениям n, для которых $x/n \leqslant \alpha_0$.

З а м е ч а н и е 9. Ввиду слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$ и условия $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$ найдётся уровень U такой, что для любого $u \geqslant U$ выполняется неравенство $\mathbf{P}\{\xi(u) > \delta\} \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Поэтому для выполнения условия (105) необходимо и достаточно, чтобы при некотором n событие $\{X_n > U\}$ имело положительную вероятность. Соответственно, условие (106) эквивалентно тому, что при некотором N вероятности событий $\{X_n > U\}$ равномерно по $n \geqslant N$ отделены от нуля.

З а м е ч а н и е 10. Достаточным условием для выполнения (106) является слабая сходимость распределения (эргодичность) цепи X_n к распределению неограниченной сверху случайной величины X_∞.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Для любого u рассмотрим случайную величину $\eta(u)$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta(u) > y\} = \inf_{v \geqslant u} \mathbf{P}\{\xi(v) > y\}.$$

По построению $\eta(u) \leqslant_{\mathrm{st}} \xi(v)$ для любых u и v, связанных неравенством $u \leqslant v$. В силу асимптотической однородности цепи $\eta(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$. Обозначим через $T_i(u) = \eta_1(u)+\cdots+\eta_i(u)$ сумму i независимых копий случайной величины $\eta(u)$. По построению для любых $u \leqslant v \leqslant y$ и m справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X(v,k) > v \text{ при всех } k < m,\ X(v,m) > v + y\}\\ \geqslant\ \mathbf{P}\{T_k(u) > 0 \text{ при всех } k < m,\ T_m(u) > y\}. \qquad (107)\end{aligned}$$

Для любого момента времени $N < n$ вероятность для X_n превзойти уровень x можно оценить снизу следующим образом ($U \geqslant 0$):

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_n(x) &\geqslant \mathbf{P}\{X_N > U,\ X(k) > X(N) \text{ при } N < k < n, X_n - X(N) > x\}\\ &= \mathbf{P}\{X(N) > U\}\\ &\quad\times\mathbf{P}\{X(k) > X(N) \text{ при } N < k < n, X_n - X(N) > x | X(N) > U\}\\ &\equiv p_1 p_2. \qquad (108)\end{aligned}$$

Оценим снизу p_1 и p_2. В силу условия (105) для любого фиксированного U найдется N такое, что $p_1 > 0$. Используя (107) при $y = x$ и $m = n - N$, получаем следующую оценку для p_2:

$$p_2 \ \geqslant\ \mathbf{P}\{T_k(U) > 0 \text{ при всех } k < n - N,\ T_{n-N}(U) > x\}.$$

Подставляя полученные оценки в (108), приходим к неравенству

$$\overline{\pi}_n(x)\ \geqslant\ p_1\mathbf{P}\{T_k(U) > 0 \text{ при всех } k < n - N,\ T_{n-N}(U) > x\}. \qquad (109)$$

Отсюда в силу леммы 9 получаем при $x \to \infty$ следующую оценку:

$$x^{-1}\ln\overline{\pi}_n(x)\ \geqslant\ \widetilde{V}_{\eta(U)}(x/(n-N)) + o(1), \qquad (110)$$

равномерно по n таким, что $\alpha_0 \leqslant x/(n-N) \leqslant \alpha_1$, где $\widetilde{V}_{\eta(U)}$ — функция $\widetilde{V}$, отвечающая случайной величине $\eta(U)$.

Так как семейство случайных величин $\eta(u)$ стохастически не убывает и слабо сходится к ξ, то $\widetilde{V}_{\eta(u)}(\alpha) \to \widetilde{V}(\alpha)$ при $u \to \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Поэтому из (110), ввиду произвольности выбора уровня U, вытекает первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения леммы положим $N = n - x/\alpha_0$ (с известной оговоркой о целочисленности N). Пусть U — произвольный уровень. В силу условия (106) найдётся n_0 такое, что при всех $N \geqslant n_0$ вероятность $p_1 = p_1(N)$ не меньше некоторого положительного числа δ. Неравенство (109) превращается в следующее

$$\overline{\pi}_n(x) \;\geqslant\; \delta \mathbf{P}\{T_k(U) > 0 \text{ при всех } k < x/\alpha_0,\ T_{x/\alpha_0}(U) > x\}.$$

Оценивая последнюю вероятность с помощью леммы 9, получаем при $x \to \infty$ соотношение

$$x^{-1} \ln \overline{\pi}_n(x) \;\geqslant\; \widetilde{V}_{\eta(U)}(\alpha_0) + o(1),$$

равномерно по тем значениям n, для которых $x/n \leqslant \alpha_0$, что, как и ранее, завершает доказательство.

13.4. Грубая (логарифмическая) асимптотика вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи. В настоящем разделе также предполагается, что цепь Маркова X принимает значения в $\mathbf{R}$ и является асимптотически однородной. Из доказанных выше лемм 13, 14 и следствия 6 вытекает следующая

Теорема 14. *Пусть $\lambda_1 \in [\beta, \lambda_+)$ и α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Пусть для любого $\lambda \in (0, \lambda_1)$ начальное распределение цепи имеет конечный экспоненциальный момент $\mathbf{E}e^{\lambda X_0}$, а скачки цепи удовлетворяют условию* (102). *Пусть выполнено условие* (106). *Тогда при $x \to \infty$ имеет место равенство*

$$x^{-1} \ln \overline{\pi}_n(x) \;=\; -\widetilde{V}(x/n) + o(1), \tag{111}$$

равномерно по n таким, что $x/n \leqslant \alpha_1$.

Пусть теперь $\mathbf{E}e^{\lambda X_0} < \infty$ *для всех* $\lambda < \lambda_+$ *и справедливо* (102). *Тогда* (111) *имеет место, если* $x \to \infty$, $n \to \infty$ *так, что* $x/n \to \alpha$, $\Lambda(\alpha+0) < \infty$.

Отметим, что условие на X_0 может быть ослаблено в зависимости от того, как растут n и x.

§ 14. Точная асимптотика $\overline{\pi}_n(x)$ для частично однородной цепи

Пусть X — U-частично однородная Харрисова цепь со значениями в $\mathbf{R}$ и $0 < \beta < \lambda_+$. Предполагаем, что мера π_n сходится к некоторой (с необходимостью инвариантной) неограниченной справа мере π в метрике полной вариации, т. е. выполнено условие (1).

В настоящем параграфе предполагаем, что при некотором λ_1 из интервала (β, λ_+) скачки цепи удовлетворяют условию

$$\sup_{u \leqslant U} \int_0^\infty e^{\lambda_1 v} P(u, dv) \ < \ \infty, \tag{112}$$

а начальное распределение π_0 имеет конечный экспоненциальный момент того же порядка:

$$\mathbf{E}e^{\lambda_1 X_0} \ < \ \infty. \tag{113}$$

Пусть α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha)=\lambda_1$. Справедлива следующая

Теорема 15. *Пусть распределение F нерешётчатое.*

(a) *Пусть* $y = y_n(x) \in \mathbf{R}$ *таково, что* $n = x/\alpha_0 + y\sqrt{x}$; $z(x)$ — *любая функция такая, что* $z \in \mathbf{R}$. *Тогда при* $x \to \infty$ *равномерно по всем значениям* n *таким, что* $y_n(x) \geqslant z$, *имеет место соотношение*

$$\overline{\pi}_n(x) = (c(\alpha_0) + o(1))e^{-\beta x}\Phi(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)}),$$

где $\Phi(v)$ — *функция распределения стандартного нормального закона, константа* $c(\alpha_0) > 0$ *не зависит от начального распределения цепи* X *(см.* (120)).

В частности, если $\widehat{y}(x) \to \infty$, *то при* $x \to \infty$ *имеет место равномерная по* $n \geqslant x/\alpha_0 + \widehat{y}(x)\sqrt{x}$ *асимптотика*

$$\overline{\pi}_n(x) \sim c(\alpha_0)e^{-\beta x}.$$

(б) *Если* $x/n \to \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, *то при* $x \to \infty$

$$\overline{\pi}_n(x) \sim c(\alpha)n^{-1/2}e^{-xV(x/n)},$$

где непрерывная по α *функция* $c(\alpha)$, *зависящая от начального распределения цепи* X, *задаётся при* $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ *формулой* (124).

Доказательство. В основе последующих рассмотрений лежит формула полной вероятности по последнему попаданию цепи во множество $(-\infty, U]$:

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_n(x) &= \int_U^\infty \pi_0(dv)q_n(U-v, x-v) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\infty}^U \pi_k(du)\int_U^\infty P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v), \end{aligned} \tag{114}$$

где

$$\begin{aligned} q_k(U-v, x-v) &\equiv \mathbf{P}\{X_l > U,\ l=1,\dots,k-1; X_k > x | X_0 = v\} \\ &= \mathbf{P}\{S_l > U-v,\ l=1,\dots,k-1;\ S_k > x-v\}, \end{aligned}$$

в силу U-частичной однородности цепи. $\int_U^\infty$ в (114) понимается как $\int_{U+0}^\infty$. Обозначение $q_k(v,x)$ было введено в лемме 9.

Разбивая область интегрирования в интегралах по переменной v на две части $(U, U_1]$ и (U_1, ∞), получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\Bigg|\overline{\pi}_n(x) - \int_U^{U_1} \pi_0(dv)q_n(U-v,x-v) \\ &\qquad\qquad - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\infty}^U \pi_k(du)\int_U^{U_1} P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v)\Bigg| \\ &\leqslant \int_{U_1}^\infty \pi_0(dv)q_n(U-v,x-v) + \sum_{k=0}^{n-1}\sup_{u\leqslant U}\int_{U_1}^\infty P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v). \end{aligned} \tag{115}$$

Наша ближайшая цель — выбрать уровень $U_1 = U_1(x)$, растущий достаточно медленно, но так, чтобы оценка в правой части была бесконечно малой по сравнению с объявленной асимптотикой $\overline{\pi}_n(x)$ во всем спектре уклонений.

Поскольку $q_k(U-v, x-v) \leqslant \mathbf{P}\{S_k > x-v\}$, то в силу экспоненциального неравенства Чебышёва для любого $\lambda \geqslant \beta$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \ &\leqslant\ e^{-(x-v)\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi^{n-k-1}(\lambda)\\ &\leqslant\ ne^{v\lambda}e^{-x\lambda}\varphi^n(\lambda),\end{aligned}$$

так как $\varphi(\lambda) \geqslant 1$. Если $x/n \geqslant \alpha_0$, то полагая здесь $\lambda{=}\lambda(x/n)$, получаем при таких n неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \ &\leqslant\ ne^{v\lambda(x/n)}e^{-xV(x/n)}\\ &\leqslant\ c_1xe^{v\lambda(x/n)}e^{-xV(x/n)}.\end{aligned}$$

Если же $x/n \leqslant \alpha_0$, то применим неравенство (90), в силу которого

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \ \leqslant\ c_2e^{v\beta}e^{-\beta x}.$$

Итак, при любом значении n правая часть в (115) не превосходит

$$\begin{aligned}c_3xe^{-x\widetilde{V}(x/n)}\left(\int_{U_1}^{\infty}\pi_0(dv) + \sup_{u\leqslant U}\int_{U_1}^{\infty}P(u,dv)\right)e^{-v\widetilde{\lambda}(x/n)}\\ \leqslant c_4xe^{-x\widetilde{V}(x/n)}e^{-U_1(\lambda_1-\widetilde{\lambda}(x/n))},\end{aligned}$$

ввиду условий (112) и (113).

В каждом из двух случаев (а) и (б) найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda_1 - \widetilde{\lambda}(x/n) > \varepsilon$ при всех достаточно больших x. Положим $U_1 = 2\varepsilon^{-1}\ln x$. Тогда правая часть последней оценки не превосходит $c_4e^{-x\widetilde{V}(x/n)}/x$. Учитывая это обстоятельство в (115), приходим при $x \to \infty$ к соотношению

$$\overline{\pi}_n(x) \ =\ \int_U^{U_1}\pi_0(dv)q_n(U-v, x-v)$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{U}\pi_k(du)\int_{U}^{U_1}P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v)$$
$$+o(e^{-x\widetilde{V}(x/n)}/\sqrt{n}). \tag{116}$$

Дальнейший ход вычислений существенно различается в случаях (а) и (б) теоремы.

Случай (а). Разбивая сумму в равенстве (116) на две и учитывая неравенство $\widetilde{V}(x/n)\geqslant\beta$, получаем

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_n(x) &= \int_{U}^{U_1}\pi_0(dv)q_n(U-v,x-v)\\ &+\left(\sum_{k=0}^{\ln x}+\sum_{k=\ln x}^{n-1}\right)\int_{-\infty}^{U}\pi_k(du)\int_{U}^{U_1}P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v)\\ &+o(e^{-x\beta})\\ &\equiv I_0+\Sigma_1+\Sigma_2+o(e^{-x\beta}).\end{aligned} \tag{117}$$

Основной вклад в асимтотику вероятности $\overline{\pi}_n(x)$ вносит вторая из сумм, в то время как вклад остальных слагаемых пренебрежимо мал. Проверим это.

Равномерно по $k>\ln x$ имеет место сходимость по вариации π_k к π при $x\to\infty$. Следовательно, имеет место эквивалентность

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\sim \int_{-\infty}^{U}\pi(du)\int_{U}^{U_1}P(u,dv)\sum_{k=\ln x}^{n-1}q_{n-k-1}(U-v,x-v)\\ &\sim \int_{-\infty}^{U}\pi(du)\int_{U}^{U_1}P(u,dv)b(U-v,\alpha_0)c_He^{-\beta(x-v)}\Phi\Big(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)}\Big),\end{aligned} \tag{118}$$

ввиду следствия 5, где, как и ранее, $b(U-v,\alpha)=\mathbf{P}\{M_-^{(\alpha)}>U-v\}$.

Покажем относительную малость интеграла I_0 и суммы Σ_1. Последовательно используя второе утверждение следствия 5 и условия (113), (112), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}I_0+\Sigma_1 &= o(e^{-\beta x})\left(\int_{U}^{U_1}\pi_0(dv)e^{\beta v}+\sup_{u\leqslant U}\int_{U}^{U_1}P(u,dv)\right)e^{\beta v}\\ &= o(e^{-\beta x}).\end{aligned} \tag{119}$$

Подставляя (119) и (118) в (117), получаем утверждение (а) теоремы с константой

$$c(\alpha_0) \;=\; \frac{1}{\beta\alpha_0}\int_{-\infty}^{U}\pi(du)\int_{U}^{\infty} b(U-v,\alpha_0)e^{\beta v}P(u,dv). \tag{120}$$

С л у ч а й (б). Разобъём сумму в равенстве (116) на две:

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_n(x) \;&=\; \int_{U}^{U_1}\pi_0(dv)q_n(U-v,x-v)\\ &\quad+\left(\sum_{k=0}^{n^{1/7}}+\sum_{k=n^{1/7}}^{n-1}\right)\int_{-\infty}^{U}\pi_k(du)\int_{U}^{U_1}P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v)\\ &\quad+o\left(\frac{e^{-xV(x/n)}}{\sqrt{n}}\right)\\ &\equiv\; I_0+\Sigma_1+\Sigma_2+o\Big(e^{-xV(x/n)}/\sqrt{n}\Big).\end{aligned} \tag{121}$$

Поскольку $x/n \to \alpha \in (\alpha_0,\alpha_1)$, по лемме 9 при $x\to\infty$ равномерно по $k=o(n)$ и $v=o(x)$ имеет место соотношение

$$q_{n-k}(U-v,x-v) \;=\; \mathbf{P}\{S_{n-k}>x-v\}(b(U-v,\alpha)+o(1)). \tag{122}$$

Кроме того, по следствию 2 имеем при $k=o(n)$ равномерно по $v\in[U,U_1)$ (соответственно, $v^2/n \leqslant U_1^2/n\to 0$) соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_{n-k}>x-v\} \;&=\; \frac{\widehat{c}(\alpha)+o(1)}{\sqrt{n-k}}e^{-(n-k)\Lambda(\frac{x-v}{n-k})}\\ &=\; (\widehat{c}(\alpha)+o(1))n^{-1/2}e^{-(n-k)\Lambda(\frac{x}{n-k})+v\lambda(\frac{x}{n-k})+o(1)}\\ &\sim\; \widehat{c}(\alpha)n^{-1/2}e^{-xV(\frac{x}{n-k})+v\lambda(\alpha)+o(v)},\end{aligned}$$

где функция $\widehat{c}(\alpha)=1/\sqrt{2\pi}\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)$ непрерывна по α. Продолжая вычисления, выводим равномерное по $k\leqslant n^{1/7}$ и $v\leqslant U_1{=}O(\ln n)$ соотношение

$$\mathbf{P}\{S_{n-k}>x-v\} \;\sim\; (\widehat{c}(\alpha)+o(1))n^{-1/2}e^{-xV(x/n)-\alpha^2kV'(x/n)+v\lambda(\alpha)+o(v)}.$$

Как отмечалось в разделе 12.7, $V'(\alpha)=\alpha^{-2}\ln\varphi(\lambda(\alpha))$. Отсюда, учитывая (122), имеем асимптотику

$$I_0+\Sigma_1 \;\sim\; c(\alpha)n^{-1/2}e^{-xV(x/n)}, \tag{123}$$

где

$$c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)} \times\Bigg[\int_U^\infty \pi_0(dv) + \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\varphi^k(\lambda(\alpha))}\int_{-\infty}^U \pi_k(du)\int_U^\infty P(u,dv)\Bigg] b(U-v,\alpha)e^{\lambda(\alpha)v}. \qquad (124)$$

Покажем, что сумма Σ_2 в (121) пренебрежимо мала по сравнению с Σ_1. При $k \geqslant n^{1/7}$ и $v \leqslant U_1 = O(\ln n)$ для достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{x-v}{n-k} \geqslant \frac{x}{n} + \frac{n^{1/8}}{x}$. Так как $x/n \to \alpha > \alpha_0$, то, в частности, $\frac{x-v}{n-k} > \alpha_0$. Поэтому ввиду экспоненциального неравенства Чебышёва и неравенства

$$V\Big(\frac{x-v}{n-k}\Big) \geqslant V(x/n) + V'(x/n)\frac{n^{1/8}}{x}$$

(верного ввиду выпуклости функции V) имеем при $k \geqslant n^{1/7}$ и $v \leqslant U_1$ оценки

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_{n-k} > x-v\} &\leqslant e^{v\lambda((x-v)/(n-k))}e^{-xV((x-v)/(n-k))}\\ &\leqslant e^{v\lambda_1}e^{-xV(x/n)}e^{-n^{1/9}}.\end{aligned}$$

Отсюда и из условия (112) вытекает, что $\Sigma_2 = o(e^{-xV(x/n)}/\sqrt{n})$. Подставляя эту оценку и асимптотику (123) в (121), получаем утверждение (б) теоремы.

Пусть распределение F решётчатое с минимальной решёткой $\{kh, k \in \mathbf{Z}\}$, а цепь X в области (U,∞) принимает значения тоже лишь из этой решётки. Тогда утверждения теоремы для вероятностей $\overline{\pi}_n(x)$ остаются справедливыми, если ограничиться лишь значениями x из решётки, а константы $c(\alpha_0)$ и $c(\alpha)$ домножить на $\beta h/(1-e^{-\beta h})$ и $\lambda(\alpha)h/(1-e^{-\lambda(\alpha)h})$ соответственно.

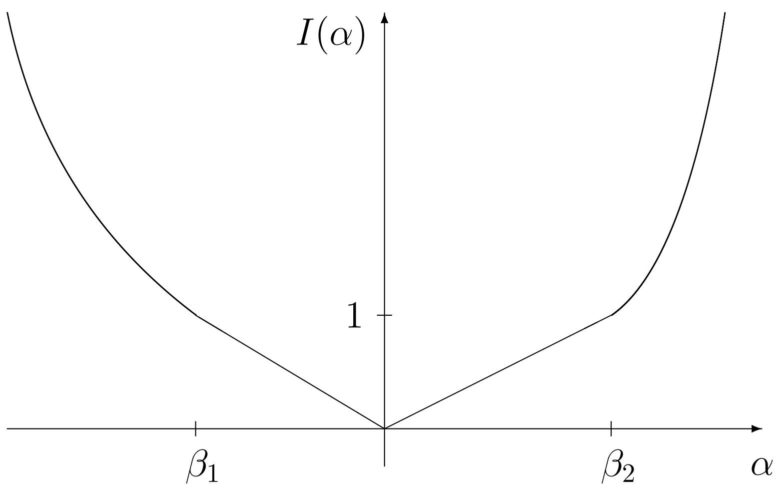
§ 15. Осциллирующее случайное блуждание

В настоящем коротком параграфе мы обсуждаем важный частный пример частично однородного случайного блуждания, а именно, осциллирующее случайное блуждание.

Пусть X_n — цепь Маркова со значениями в $\mathbf{R}$, фазовое пространство которой разделено на две области однородности стохастического поведения $\{x \leqslant 0\}$ и $\{x > 0\}$. Пусть в области ниже нуля цепь имеет скачки с общим распределением F_1, а в области выше нуля — с F_2. Рассматриваем случай эргодического блуждания, т. е., в частности, F_1 имеет положительное среднее значение, а F_2 — отрицательное.

С точки зрения нашего подхода одномерное осциллирующее случайное блуждание есть частный случай 0-частично однородных цепей Маркова. Поэтому из наших результатов для U-частично однородных цепей Маркова напрямую вытекает принцип больших уклонений, причём при существенно более слабых ограничениях на скачки, чем, скажем в [52, гл. 7].

Из результатов § 13 вытекает, что функция уклонений $I(\alpha)$ осциллирующего случайного блуждания имеет вид



Здесь $\beta_1 < 0$ и $\beta_2 > 0$ — ненулевые решения уравнений относительно λ

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u} F_1(du) \ = \ 1,$$
$$\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u} F_2(du) \ = \ 1$$

соответственно. Функция $I(\alpha)$ выпуклая и кусочно линейная в областях $[\beta_1, 0]$ и $[0, \beta_2]$. При этом условия, достаточные для выполнения принципа больших уклонений типа

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{X_n > n\alpha\} \; = \; I(\alpha),$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{X_n \leqslant -n\alpha\} \; = \; I(-\alpha),$$

могут быть сведены к следующим:

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\beta_2 u} F_1(du) \; < \; \infty,$$
$$\int_{\mathbf{R}} e^{\beta_1 u} F_2(du) \; < \; \infty.$$

Ясно, что из результатов § 14 немедленно вытекает точная асимптотика вероятностей больших уклонений для осциллирующего случайного блуждания.

§ 16. Марковская эволюция масс

Цепь Маркова X_n с распределением π_n может рассматриваться как *марковская эволюция единичной массы* в пространстве $\mathbf{R}$. Именно, в момент времени $n = 0$ единичная масса распределена в пространству $\mathbf{R}$ в соответствии с законом π_0. В следующий момент времени $n = 1$ масса перераспределяется с соответствии с функцией перехода $P(\cdot, \cdot)$, т. е. из точки $u \in \mathbf{R}$ элемент массы размазывается по $\mathbf{R}$ в соответствии с законом $P(u, \cdot)$. Поэтому в момент времени $n = 1$ распределение совокупной единичной массы есть π_1, т. е. масса любого измеримого множества $B \subseteq \mathbf{R}$ будет равна $\pi_1(B)$. И так далее, для любого момента времени n.

Введём в рассмотрение понятие *обобщённого переходного ядра* $Q(u, B)$, $u \in \mathbf{R}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, обладающего всеми свойствами обычного марковского переходного ядра за тем исключением, что функция $Q(u, \mathbf{R})$ аргумента u является лишь неотрицательной, не обязательно тождественно равной единице. Таким образом, допускаются значения $Q(u, \mathbf{R})$ как меньше единицы, так и больше. Ясно, что классическим марковским переходным ядром является функция

$$Q^*(u, B) \;=\; \frac{Q(u, B)}{Q(u, \mathbf{R})}.$$

Пусть в $\mathbf{R}$ задана некоторая неотрицательная мера Q_0. Тогда обобщённое переходное ядро $Q(u, B)$ порождает семейство неорицательных мер $\{Q_n\}$, определяемых рекуррентным равенством

$$Q_{n+1}(B) \;=\; (Q_n Q)(B) \equiv \int_{\mathbf{R}} Q(u, B) Q_n(du), \quad n \geqslant 0.$$

Определим *марковскую эволюцию масс* (или просто *марковскую массу*) Y_n, соответствующую обобщённому переходному ядру $Q(\cdot, \cdot)$, следующим образом: в момент времени $n = 0$ масса $Q_0(\mathbf{R})$ распределена в $\mathbf{R}$ в соответствии с законом Q_0. Во временной переход $n \to n+1$ элемент массы Y_n из состояния $u \in \mathbf{R}$ изменяется в $Q(u, \mathbf{R})$ раз и новый элемент массы Y_{n+1} распределяется по пространству в соответствии с мерой $Q(u, B)/Q(u, \mathbf{R})$. Следовательно, в любой момент времени n масса будем распределена в соответствии с законом $Q_n(\cdot)$, т. е. масса любого измеримого множества $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ будет равна $Q_n(B)$. Если для классической цепи Маркова используется понятие значение цепи Маркова X_n в момент времени n, то в случае марковской эволюции масс мы будем использовать понятие элемент массы Y_n в момент времени n и обозначение $\mathrm{Mes}\{Y_n \in B\}$ для массы множества B в момент времени n.

Отметим что семейство конечномерных распределений масс $(Y_0, \ldots, Y_n)$ не является, вообще говоря, согласованным. Например, если $Q(u, \mathbf{R}) \equiv 2$, то масса множества $B_0 \times \cdots \times B_n \times \mathbf{R}$ ровно в два раза превосходит массу множества $B_0 \times \cdots \times B_n$. Поэтому, вообще говоря, не имеет места аналог формулы полной вероятности. Тем не менее, при вычислении массы измеримого множества B в момент времени n можно «перебрать» все траектории элемента массы, приводящие во множество B, и «просуммировать» массы, переносимые вдоль этих траекторий в соответствии с обобщённым переходным ядром. Например, пусть дано два измеримых непересекающихся непустых множества B и $B_1 \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$. Тогда для вычисления меры множества B в момент времени n справедлива следующая формула по последнему пребыванию элемента массы во множестве B_1:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mes}\{Y_n \in B\} &= \mathrm{Mes}\{Y_0 \notin B_1, \dots, Y_{n-1} \notin B_1,\, Y_n \in B\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{Mes}\{Y_k \in B_1,\, Y_{k+1} \notin B_1, \dots, Y_{n-1} \notin B_1,\, Y_n \in B\} \\ &\quad + \mathrm{Mes}\{Y_{n-1} \in B_1,\, Y_n \in B\}. \qquad (125)\end{aligned}$$

Отметим дополнительно, что здесь

$$\begin{aligned}&\mathrm{Mes}\{Y_k \in B_1,\, Y_{k+1} \notin B_1, \dots, Y_{n-1} \notin B_1,\, Y_n \in B\} \\ &\quad = \int_{\mathbf{R}\setminus B_1} Q(u_{n-1}, B) \int_{\mathbf{R}\setminus B_1} Q(u_{n-2}, du_{n-1}) \cdots \int_{\mathbf{R}\setminus B_1} Q(u_k, du_{k+1}) \int_{B_1} Q_k(du_k).\end{aligned}$$

Обозначим через $\eta(u)$ скачок марковской эволюции масс Y_n из состояния u. По определению, $\eta(u)$ есть функция, заданная на некотором измеримом пространстве общей меры $Q(u, \mathbf{R})$ и с обобщённым распределением $Q(u, u+\cdot)$. Таким образом, $\mathrm{Mes}\{u + \eta(u) \in B\} = Q(u, B)$.

16.1. Числовые характеристики. *Средним значением* функции Y, заданной на некотором измеримом пространстве конечной меры, назовем интеграл $\mathscr{E}Y = \int_{\mathbf{R}} yQ(dy)$, где Q — обобщённое распределение Y. Таким образом,

$$\mathscr{E}Y_n = \int_{\mathbf{R}} yQ_n(dy), \qquad \mathscr{E}\eta(u) = \int_{\mathbf{R}} yQ(u, u+dy).$$

Отметим, что среднее значение является линейным функционалом, если рассматривается пространство функций, заданных на фиксированном пространстве с фиксированной мерой. Однако равенство

$$\mathscr{E}Y_{n+1} \;=\; \mathscr{E}Y_n + \int_{\mathbf{R}} \mathscr{E}\eta(u) Q_n(dy),$$

вообще говоря, неверно. Например, если распределение скачка $\eta(u)$ не зависит от u и есть μ, то $\mathscr{E}Y_1 = \mathscr{E}Y_0 \cdot \mu(\mathbf{R}) + Q_0(\mathbf{R}) \cdot \mathscr{E}\eta$, а не $\mathscr{E}Y_1 = \mathscr{E}Y_0 + \mathscr{E}\eta$.

Тем не менее поведение во времени экспоненциальных моментов марковской эволюции масс, а именно преобразования Лапласа и характеристической функции вполне аналогично поведению экспоненциальных моментов обычной цепи Маркова. Поскольку

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\, e^{\lambda Y_{n+1}} &= \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda y} Q_{n+1}(dy)\\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda y} \int_{\mathbf{R}} Q(u,dy) Q_n(du)\\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda(u+z)} \int_{\mathbf{R}} Q(u,u+dz) Q_n(du),\end{aligned}$$

справедливо равенство

$$\mathscr{E}\, e^{\lambda Y_{n+1}} = \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u} \mathscr{E}\, e^{\lambda \eta(u)} Q_n(du). \tag{126}$$

16.2. Аналог неравенства Чебышёва. Для любой положительной возрастающей функции $f(u)$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Mes}\{Y \geqslant y\} \leqslant \frac{\mathscr{E} f(Y)}{f(y)}.$$

В частности, для любого $\lambda > 0$

$$\mathrm{Mes}\{Y \leqslant y\} = \mathrm{Mes}\{-Y \geqslant -y\} \leqslant e^{\lambda y} \mathscr{E} e^{-\lambda Y}. \tag{127}$$

16.3. Преобразование Крамера над цепью Маркова: формула обращения. Пусть X_n — вещественнозначная цепь Маркова с переходным ядром $P(u,B)$ и распределением π_n. Для любого $\lambda > 0$ определим обобщённое переходное ядро $P^{(\lambda)}(\cdot,\cdot)$ равенством

$$P^{(\lambda)}(u,dv) = e^{\lambda(v-u)} P(u,dv);$$

мера $P^{(\lambda)}(u,u+\cdot)$ есть не что иное как преобразование Крамера с параметром λ над распределением $P(u,u+\cdot)$. Кроме того, для любого n определим меру $\pi_n^{(\lambda)}$:

$$\pi_n^{(\lambda)}(du) = e^{\lambda u} \mathbf{P}\{X_n \in du\}.$$

По индукции имеем равенство

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1}^{(\lambda)}(B) &= \int_B e^{\lambda v}\mathbf{P}\{X_{n+1}\in dv\} \\
&= \int_B e^{\lambda v}\int_{\mathbf{R}} P(u,dv)\mathbf{P}\{X_n\in du\} \\
&= \int_B\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda(v-u)}P(u,dv)e^{\lambda u}\mathbf{P}\{X_n\in du\} \\
&= \int_B\int_{\mathbf{R}} P^{(\lambda)}(u,dv)\pi_n^{(\lambda)}(du) = \int_{\mathbf{R}} P^{(\lambda)}(u,B)\pi_n^{(\lambda)}(du).
\end{aligned}$$

Таким образом, марковская эволюция масс $X_n^{(\lambda)}$ с обобщённым переходным ядром $P^{(\lambda)}(\cdot,\cdot)$ имеет распределение $\pi_n^{(\lambda)}$, т. е.

$$\pi_n^{(\lambda)}(B) = \mathrm{Mes}\{X_n^{(\lambda)}\in B\}$$

для любых $n\geqslant 0$ и $B\in\mathscr{B}(\mathbf{R})$.

Ввиду построения меры $\pi_n^{(\lambda)}$ справедлива следующая формула обращения:

$$\pi_n(B) \;=\; \int_B e^{-\lambda u}\pi_n^{(\lambda)}(du). \tag{128}$$

Более общё, имеет место

Лемма 15. *Для любых* $n\in\mathbf{Z}^+$, $u_0,\ \ldots,\ u_n\in\mathbf{R}$

$$\mathbf{P}\{X_0\in du_0,\ldots,X_n\in du_n\} \;=\; e^{-\lambda u_n}\mathrm{Mes}\{X_0^{(\lambda)}\in du_0,\ldots,X_n^{(\lambda)}\in du_n\}.$$

Доказательство вытекает из равенств

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X_0\in du_0,\ldots,X_n\in du_n\} \\
&= \mathbf{P}\{X_0\in du_0\}P(u_0,du_1)\cdots P(u_{n-1},du_n) \\
&= e^{-\lambda u_0}\mathrm{Mes}\{X_0^{(\lambda)}\in du_0\}e^{-\lambda(u_1-u_0)}P^{(\lambda)}(u_0,du_1)\cdots e^{-\lambda(u_n-u_{n-1})}P^{(\lambda)}(u_{n-1},du_n) \\
&= e^{-\lambda u_n}\mathrm{Mes}\{X_0^{(\lambda)}\in du_0,\ldots,X_n^{(\lambda)}\in du_n\}.
\end{aligned}$$

§ 17. Локальная теорема восстановления для невозвратной цепи Маркова

Сначала сформулируем необходимые для дальнейшего изложения модификации локальных центральных предельных теорем 7 (решётчатый случай) и 8 (нерешётчатый).

Пусть X_n^* — вещественнозначная цепь Маркова. Обозначим через $\xi^*(x)$ скачок этой цепи из состояния x.

Теорема 16. *Пусть скачки цепи X^* имеют общую миноранту $\underline{\zeta}$, т. е. для любого $x \in \mathbf{R}$ имеет место стохастическое неравенство*

$$\xi^*(x) \ \geqslant_{\rm st} \ \underline{\zeta}, \tag{129}$$

причём $\mathbf{E}\underline{\zeta} > 0$ и $\mathbf{D}\underline{\zeta} < \infty$. Пусть $\xi^*(x) \Rightarrow \xi^*$ при $x \to \infty$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi^*(x) &= \alpha + o(1/\sqrt{x}), \\ \mathbf{D}\xi^*(x) &\to \sigma^2 > 0 \end{aligned}$$

и семейство квадратов скачков $\{(\xi^*(x))^2,\ x \in \mathbf{R}\}$ равномерно интегрируемо. Кроме того, пусть начальное распределение цепи удовлетворяет условию $\mathbf{P}\{X_0^* \leqslant -x\} = o(1/\sqrt{x})$ при $x \to \infty$.

Если случайная величина ξ^* нерешётчатая и для любого $A > 0$

$$\sup_{|\lambda|\leqslant A} |\mathbf{E}e^{i\lambda\xi^*(x)} - \mathbf{E}e^{i\lambda\xi^*}| \ = \ o(1/x) \quad \text{при } x \to \infty, \tag{130}$$

то для любого фиксированного $\Delta > 0$ при $n \to \infty$ имеет место равномерное по всем $x \in \mathbf{R}$ соотношение

$$\mathbf{P}\{X_n^* \in (x, x+\Delta]\} = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(x-n\alpha)^2/2n\sigma^2} + o(1/\sqrt{n}).$$

Если же цепь X_n^* принимает значения на решётке $\{\Delta k,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $\Delta > 0$, эта решётка минимальная и

$$\sup_{|\lambda|\leqslant\pi/\Delta} |\mathbf{E}e^{i\lambda\xi^*(k\Delta)} - \mathbf{E}e^{i\lambda\xi^*}| \;=\; o(1/k) \qquad \text{при } k \to \infty,$$

то при $n \to \infty$ равномерно по всем $k \in \mathbf{Z}^+$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{X_n^* = k\Delta\} = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(k\Delta - n\alpha)^2/2n\sigma^2} + o(1/\sqrt{n}).$$

Доказательство. Как отмечается в разделе 5.2, условие (129) существования миноранты $\underline{\zeta}$ с положительным средним значением и конечной дисперсией вместе с условием на левый хвост начального распределения обеспечивают выполнение оценки

$$\mathbf{P}\{X_k^* \leqslant k\mathbf{E}\underline{\zeta}/2 \text{ для некоторого } k \geqslant n\} \;=\; o(1/\sqrt{n}) \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теорем 7 и 8, что и завершает доказательство.

Определим меру восстановления, порождённую цепью Маркова X_n^*,

$$H(B) \;\equiv\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_n^* \in B\}$$

и процесс восстановления

$$\widetilde{H}(B) \;\equiv\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{X_n^* \in B\}.$$

Справедливо равенство $H(B) = \mathbf{E}\widetilde{H}(B)$.

Лемма 16. *Пусть выполнено условие минорирования* (129)*, причём $\mathbf{E}\underline{\zeta} > 0$ и $\mathbf{E}\underline{\zeta}^2 < \infty$. Тогда существует такая случайная величина θ с конечным средним значением, что $\widetilde{H}(x, x+1] \leqslant_{\rm st} \theta$ для любого $x \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим суммы $\underline{Z}_n = \underline{\zeta}_1 + \dots + \underline{\zeta}_n$, $\underline{Z}_0 = 0$, где $\underline{\zeta}_1$, $\underline{\zeta}_2$, … суть независимые копии $\underline{\zeta}$. Поскольку среднее $\underline{\zeta}$ положительно, а второй момент конечен, то (см., например, следствие 2.5 в [85])

$$\theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{\underline{Z}_n \leqslant 1\} < \infty, \qquad \mathbf{E}\theta < \infty. \tag{131}$$

Пусть $\tau(x) = \min\{n \geqslant 0 : X_n^* > x\}$ — марковский момент первого перескока цепью X_n^* через уровень x. Поскольку $\underline{\zeta}$ является минорантой для скачков, цепь Маркова X_n^* и последовательность $\underline{Z}_n$ можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что $X^*_{\tau(x)+n} \geqslant x + \underline{Z}_n$ для любого $n \geqslant 0$ с вероятностью 1. Поэтому

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(x, x+1] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{X^*_{\tau(x)+n} \in (x, x+1]\} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{X^*_{\tau(x)+n} \leqslant x+1\} \leqslant_{\rm st} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{x + \underline{Z}_n \leqslant x+1\}, \end{aligned}$$

что в сочетании с (131) влечет утверждение леммы.

Далее предполагаем также, что цепь X_n^* асимптотически однородна. Пусть F^* есть предельное распределение величины $\xi^*(x)$ и пусть ξ^* — случайная величина с распределением F^*.

Теорема 17. *Пусть распределение F^* нерешётчато, $\alpha = \mathbf{E}\xi^*$ и скачки цепи X^* допускают миноранту $\underline{\zeta}$ и мажоранту $\overline{\zeta}$, т. е. для любого x имеют место стохастические неравенства*

$$\underline{\zeta} \leqslant_{\rm st} \xi^*(x) \leqslant_{\rm st} \overline{\zeta},$$

причём $\mathbf{E}\underline{\zeta} > 0$, $\mathbf{D}\underline{\zeta} < \infty$ и $\mathbf{E}\overline{\zeta} < \infty$. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} H(x, x+\Delta] = \Delta/\alpha.$$

Если дополнительно $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi^* < \infty$ и имеет место локальная центральная предельная теорема, т. е. при $n \to \infty$ имеет место равномерное по x

соотношение

$$\mathbf{P}\{X_n^* \in (x, x+\Delta]\} \;=\; \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(x-n\alpha)^2/2n\sigma^2} + o(1/\sqrt{n}),$$

то при n, $x \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\{X_k^* \in (x, x+\Delta]\} \;=\; \frac{\Delta}{\alpha} \Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\Big) + o(1).$$

Доказательство. Обозначим момент первого перескока цепью X_n^* через уровень x через

$$\tau(x) \;=\; \min\{n \geqslant 0 : X_n^* > x\},$$

а сам перескок — через

$$\chi(x) \;=\; X_{\tau(x)}^* - x.$$

Пусть $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ — независимые копии случайной величины ξ^*. Положим $S_n^* = \xi_1^* + \cdots + \xi_n^*$. Определим момент первого перескока суммами S_n^* через уровень x

$$\tau^*(x) \;=\; \min\{n \geqslant 0 : S_n^* > x\},$$

сам перескок

$$\chi^*(x) \;=\; S_{\tau(x)}^* - x,$$

а также процесс восстановления

$$\widetilde{H}^*(B) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{S_n^* \in B\}.$$

Как известно (см., например, теорему 2.3 из [85]), распределение перескока $\chi^*(x)$ слабо сходится при $x \to \infty$ к распределению перескока $\chi^*(\infty)$ через так называемый бесконечно удалённый уровень, причём распределение $\chi^*(\infty)$ является абсолютно непрерывным. Ввиду абсолютной непрерывности слабого предела перескока распределение $\widetilde{H}^*(x, x+\Delta]$ слабо сходится при $x \to \infty$ к некоторому распределению, скажем, G. В силу локальной теоремы восстановления для сумм независимых одинаково распределенных величин (см., например, [29, глава XI] или [85, Appendix]) среднее значение распределения G равно Δ/α.

Условия нашей теоремы позволяют применить теорему 2.2 из работы Боровкова и Фосса [13], согласно которой распределение перескока $\chi(x)$ слабо сходится к распределению $\chi^*(\infty)$. Следовательно, распределение $\widetilde{H}(x, x+\Delta]$ слабо сходится к распределению G. Учитывая, что по лемме 16 семейство $\{\widetilde{H}(x, x+\Delta],\ x \in \mathbf{R}\}$ допускает интегрируемую мажоранту, получаем, что среднее значение $\widetilde{H}(x, x+\Delta]$ сходится при $x \to \infty$ к среднему значению G, т. е.

$$H(x, x+\Delta] \ \to \ \Delta/\alpha$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Если выполнена локальная центральная предельная теорема, то для любых фиксированных чисел s и t, $s < t$, имеет место сходимость

$$\sum_{k=x/\alpha+s\sqrt{x}}^{x/\alpha+t\sqrt{x}} \mathbf{P}\{X_k^* \in (x, x+\Delta]\} \ - \sum_{k=x/\alpha+s\sqrt{x}}^{x/\alpha+t\sqrt{x}} \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} e^{-(x-k\alpha)^2/2k\sigma^2} \to 0$$

при $x \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{k=x/\alpha+s\sqrt{x}}^{x/\alpha+t\sqrt{x}} \mathbf{P}\{X_k^* \in (x, x+\Delta]\} \ \to \ \frac{\Delta}{\alpha}\Big(\Phi_{\sigma^2}(t\alpha^{3/2}) - \Phi_{\sigma^2}(s\alpha^{3/2})\Big).$$

Последняя сходимость в совокупности с первым утверждением теоремы влечёт второе. Теорема доказана.

В решётчатом случае утверждения теоремы 17 формулируются следующим образом: если распределение F сосредоточено на решётке $\{k\Delta,\ k \in \mathbf{Z}\}$,

$\Delta > 0$, причем эта решётка минимальна, то

$$\lim_{k\to\infty} H(k\Delta) \;=\; \Delta/\alpha$$

и

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}\{X_j^* = k\Delta\} \;=\; \frac{\Delta}{\alpha}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha - k\Delta}{\sqrt{k\Delta/\alpha}}\Big) + o(1)$$

при $n \to \infty$ равномерно по k.

§ 18. Некоторые предварительные оценки распределения марковской эволюции масс

Рассматривается марковская эволюция масс $\{Y_n\}$ со скачками $\{\eta(x)\}$. Обозначаем $Q_n(B) = \mathrm{Mes}\{Y_n \in B\}$ и $Q(x, B) = \mathrm{Mes}\{x + \eta(x) \in B\}$. Обозначим

$$\widehat{Q}(x) \;\equiv\; \sup_{y>x} Q(y, \mathbf{R}), \qquad \widehat{Q} \equiv \sup_{y\in\mathbf{R}} Q(y, \mathbf{R}).$$

Прежде всего выясним условия на марковскую эволюцию масс, обеспечивающие ограниченность последовательности общих масс всего пространства.

Лемма 17. *Пусть $Q_0(\mathbf{R}) < \infty$ и $\widehat{Q} < \infty$. Если для некоторой последовательности уровней x_n, $n \geqslant 0$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(-\infty, x_n] \;<\; \infty \tag{132}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{q}(x_n) \;<\; \infty, \tag{133}$$

где

$$\widehat{q}(x) \;\equiv\; \sup_{y>x} |Q(y, \mathbf{R}) - 1|,$$

то последовательность общих мер ограничена:

$$\sup_{n\geqslant 0} Q_n(\mathbf{R}) \;<\; \infty$$

и, более того, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\mathbf{R}) \;=\; Q \in [0,\infty).$$

Доказательство. Проверим индукцией по n неравенство

$$Q_{n+1}(\mathbf{R}) \;\leqslant\; Q_0(\mathbf{R}) \prod_{k=0}^{n} \widehat{Q}(x_k) + \widehat{Q} \sum_{k=0}^{n} Q_k(-\infty, x_k] \prod_{j=k+1}^{n} \widehat{Q}(x_j). \qquad (134)$$

Имеем оценку

$$Q_{n+1}(\mathbf{R}) \;=\; \left(\int_{-\infty}^{x_n} + \int_{x_n}^{\infty}\right) Q(x,\mathbf{R}) Q_n(dx) \leqslant \widehat{Q} Q_n(-\infty, x_n] + \widehat{Q}(x_n) Q_n(\mathbf{R}).$$

При $n = 0$ получаем отсюда неравенство

$$Q_1(\mathbf{R}) \;\leqslant\; \widehat{Q} Q_0(-\infty, x_0] + \widehat{Q}(x_0) Q_0(\mathbf{R}),$$

что обосновывает базу индукции. Далее, по индукционному предположению

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(\mathbf{R}) \;&\leqslant\; \widehat{Q} Q_n(-\infty, x_n] + \widehat{Q}(x_n) Q_n(\mathbf{R}) \\
&\leqslant\; \widehat{Q} Q_n(-\infty, x_n] \\
&\qquad + \widehat{Q}(x_n) \left[Q_0(\mathbf{R}) \prod_{k=0}^{n-1} \widehat{Q}(x_k) + \widehat{Q} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(-\infty, x_k] \prod_{j=k+1}^{n-1} \widehat{Q}(x_j) \right] \\
&=\; Q_0(\mathbf{R}) \prod_{k=0}^{n} \widehat{Q}(x_k) + \widehat{Q} \sum_{k=0}^{n} Q_k(-\infty, x_k] \prod_{j=k+1}^{n} \widehat{Q}(x_j),
\end{aligned}$$

что влечёт индукционный переход.

Далее, поскольку ряд (133) сходится, то

$$Q_{\sup} \;\equiv\; \sup_{n\geqslant 0} \prod_{k=0}^{n} \widehat{Q}(x_k) \leqslant \sup_{n\geqslant 0} \prod_{k=0}^{n} (1 + \widehat{q}(x_k)) < \infty.$$

Отсюда и из (134) вытекает оценка

$$Q_{n+1}(\mathbf{R}) \ \leqslant \ Q_0(\mathbf{R})Q_{\sup} + \widehat{Q}Q_{\sup}\sum_{k=0}^{n} Q_k(-\infty, x_k], \tag{135}$$

влекущая первое утверждение леммы. Далее, для любого $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |Q_{n+1}(\mathbf{R}) - Q_n(\mathbf{R})| \ &= \ \left|\left(\int_{-\infty}^{x_n} + \int_{x_n}^{\infty}\right)(Q(x,\mathbf{R}) - 1)Q_n(dx)\right| \\ &\leqslant \ (\widehat{Q} + 1)Q_n(-\infty, x_n] + Q_n(\mathbf{R})\widehat{q}(x_n). \end{aligned}$$

Поскольку последовательность $Q_n(\mathbf{R})$ ограничена, а также ввиду условий (132) и (133), это влечёт фундаментальность последовательности $Q_n(\mathbf{R})$. Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть марковская эволюция масс принимает положительные значения. Пусть* $\widehat{Q} < \infty$ *и при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *условие* (133) *выполнено для последовательности* $x_k = k\varepsilon$. *Если для некоторого* $\lambda > 0$

$$E_{\sup} \ \equiv \ \sup_{u>0} \mathscr{E} e^{-\lambda\eta(u)} < 1, \tag{136}$$

то найдется $\widehat{c} < \infty$ *такое, что для любых* $n \geqslant 0$ *и начального распределения* Q_0 *имеет место оценка*

$$Q_n(\mathbf{R}) \ \leqslant \ \widehat{c}(Q_0(\mathbf{R}) + 1).$$

Доказательство. Ввиду равенства (126) имеем оценку

$$\begin{aligned} \mathscr{E} e^{-\lambda Y_n} \ &= \ \int_0^\infty e^{-\lambda u}\mathscr{E} e^{-\lambda\eta(u)}\mathrm{Mes}\{Y_{n-1} \in dy\} \\ &\leqslant \ E_{\sup}\int_0^\infty e^{-\lambda u}\mathrm{Mes}\{Y_{n-1} \in dy\} = E_{\sup}\mathscr{E} e^{-\lambda Y_{n-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathscr{E} e^{-\lambda Y_n} \ \leqslant \ \mathscr{E} e^{-\lambda Y_0}(E_{\sup})^n \leqslant Q_0[0,\infty)(E_{\sup})^n.$$

Используя аналог экспоненциального неравенства Чебышёва (127) при $y = n\varepsilon$, приходим к неравенству

$$\mathrm{Mes}\{Y_n \leqslant n\varepsilon\} \ \leqslant \ e^{\lambda n\varepsilon}\mathscr{E}e^{-\lambda Y_n} \leqslant Q_0[0,\infty)(e^{\lambda\varepsilon}E_{\sup})^n.$$

Поскольку $E_{\sup} < 1$, найдётся достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\delta \equiv e^{\lambda\varepsilon}E_{\sup} < 1. \tag{137}$$

При таком выборе ε выполнено условие (132) леммы 17. Оценка леммы вытекает теперь из оценки (135).

В следующей лемме рассматривается марковская эволюция масс, не обладающая, вообще говоря, свойством (132). Невыполнение этого условия приводит к тому, что последовательность общих масс всего пространства может неограничено возрастать. Для обычной цепи Маркова это невозможно, поскольку если масса уходит вверх, то около начала координат масса исчезает. В случае же марковской эволюции масс скачки могут порождать массу, большую 1 и, соответственно, состояния около начала координат могут служить постоянным источником новой массы.

Лемма 19. *Пусть* $Q_0(\mathbf{R}) < \infty$, $\widehat{Q} < \infty$,

$$\sup_{n\geqslant 0} Q_n(-\infty,0] \ < \ \infty$$

и при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ *условие* (133) *выполнено для последовательности* $x_k = k\varepsilon$. *Если для некоторого* $\lambda > 0$ *выполнено условие* (136), *то найдется* $\widehat{c} < \infty$ *такое, что для любых* $n \geqslant 0$ *и* $x > 0$ *имеет место оценка*

$$Q_n(-\infty,x] \ \leqslant \ \widehat{c}(x+1).$$

Доказательство. Ввиду условия $\sup_n Q_n(-\infty,0] < \infty$ необходимо и достаточно доказать, что для некоторого c_1

$$Q_n(0,x] \ \leqslant \ c_1(x+1). \tag{138}$$

Воспользуемся формулой (125) по последнему попаданию во множество $(-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned} Q_n(0,x] &= \mathrm{Mes}\{Y_0>0,\dots,Y_{n-1}>0,\ Y_n\in(0,x]\} \\ &\quad+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}>0,\dots,Y_{n-1}>0,\ Y_n\in(0,x]\}. \end{aligned}$$

В силу леммы 18 найдется $c_2<\infty$ такое, что для любых $n\geqslant 0$ и $k<n$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mes}\{Y_0>0,\dots,\ Y_n>0\} &\leqslant c_2, \\ \mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}>0,\dots,\ Y_n>0\} &\leqslant c_2. \end{aligned}$$

При этом вторая оценка вытекает из того факта, что значение меры

$$\mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}>0\} \leqslant Q_k(-\infty,0]\widehat{Q}$$

ограничено равномерно по $k\geqslant 0$.

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось (137). Если $n\leqslant 2x/\varepsilon$, то утверждение леммы вытекает из неравенств

$$Q_n(0,x] \leqslant nc_2\leqslant 2xc_2/\varepsilon.$$

Если же $n>2x/\varepsilon$, то

$$Q_n(0,x] \leqslant \sum_{k=0}^{n-x/\varepsilon}\mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}>0,\dots,Y_{n-1}>0,\ Y_n\in(0,x]\}+xc_2/\varepsilon. \tag{139}$$

Оценим теперь k-ое общее слагаемое суммы. Рассмотрим вспомогательную марковскую эволюцию масс Z_n, принимающую значения на положительной полуоси, у которой начальное распределение есть мера $\mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}\in B\}$, $B\in\mathscr{B}(0,\infty)$, (т. е. $\mathrm{Mes}\{Z_0\in\mathbf{R}\}=\mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}>0\}\leqslant c_2$), скачки которой из состояний выше начала координат имеют распределение $\mathrm{Mes}\{\eta(u)\in B\}$, $B\in\mathscr{B}(0,\infty)$. Имеем неравенство

$$\mathrm{Mes}\{Y_k\leqslant 0,\ Y_{k+1}>0,\ \dots,Y_{n-1}>0,\ Y_n\in(0,x]\} \leqslant \mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1}\leqslant x\}.$$

Как вытекает из леммы 18,

$$\mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \leqslant (n-k-1)\varepsilon\} \;\leqslant\; c_2\delta^{n-k-1},$$

причём $\delta < 1$. Следовательно, при $n > 2x/\varepsilon$ и $k \leqslant n - x/\varepsilon$ (т. е. $x \leqslant (n-k)\varepsilon$)

$$\begin{aligned}\mathrm{Mes}\{Y_k \leqslant 0,\, Y_{k+1} > 0,\, \ldots, Y_{n-1} > 0,\, Y_n \in (0,x]\}&\\ \leqslant \mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \leqslant x\}&\\ \leqslant \mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \leqslant (n-k-1)\varepsilon\}&\\ \leqslant c_2\delta^{n-k-1}.&\end{aligned}$$

Окончательно имеем оценку

$$Q_n(0,x] \;\leqslant\; c_2 \sum_{k=0}^{n-x/\varepsilon} \delta^{n-k-1} + xc_2/\varepsilon \leqslant \frac{c_2}{1-\delta} + xc_2/\varepsilon.$$

Оценка (138), а вместе с ней и лемма, доказана.

§ 19. Аналог центральной предельной теоремы для марковской эволюции масс

Характеристическая функция суммы независимых слагаемых равна произведению характеристических функций самих слагаемых. Если рассматриваются не суммы, а цепь Маркова или, тем более, марковская эволюция масс, то характеристическая функция не есть произведение чего-либо, ввиду неоднородности скачков. В следующей лемме выясняется насколько поведение во времени характеристической функции марковской эволюции масс отличается от поведения характеристической функции процесса частичных сумм независимых слагаемых.

Рассматривается марковская эволюция масс $\{Y_n\}$ со скачками $\{\eta_n(x)\}$. Обозначаем $Q_n(B) = \mathrm{Mes}\{Y_n \in B\}$ и $Q(x,B) = \mathrm{Mes}\{x + \eta(x) \in B\}$. Пусть

$$\widehat{Q} \;\equiv\; \sup_{y\in\mathbf{R}} Q(y,\mathbf{R}) < \infty, \qquad Q \equiv \sup_{n\geqslant 0} Q_n(\mathbf{R}) < \infty.$$

Лемма 20. *Пусть x_j — произвольная последовательность уровней в* $\mathbf{R}$. *Для любых* $\lambda \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$, $k \leqslant n$ *и комплексного числа* $\varphi \in \mathbf{C}$, $|\varphi| \leqslant 1$, *справедливо неравенство*

$$\left|\mathscr{E} e^{i\lambda Y_n} - \varphi^{n-k}\mathscr{E} e^{i\lambda Y_k}\right| \leqslant (\widehat{Q}+1)\sum_{j=k}^{n-1} Q_j(-\infty, x_j] + Q\sum_{j=k}^{n-1}\varepsilon_j,$$

где

$$\varepsilon_j = \sup_{x>x_j} |\mathscr{E} e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi|. \tag{140}$$

Доказательство. Пусть $j \in [k+1, n]$. В силу (126) имеем

$$\mathscr{E}\, e^{i\lambda Y_j} = \int_{\mathbf{R}} (\mathscr{E} e^{i\lambda\eta(x)}) e^{i\lambda x} Q_{j-1}(dx).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left|\mathscr{E} e^{i\lambda Y_j} - \varphi\mathscr{E} e^{i\lambda Y_{j-1}}\right| &= \left|\int_{\mathbf{R}} \Big(\mathscr{E} e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\Big) e^{i\lambda x} Q_{j-1}(dx)\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_{j-1}}^{\infty} \Big(\mathscr{E} e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\Big) e^{i\lambda x} Q_{j-1}(dx)\right| \\
&\qquad + \left|\int_{-\infty}^{x_{j-1}} \Big(\mathscr{E} e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\Big) e^{i\lambda x} Q_{j-1}(dx)\right| \\
&\leqslant \varepsilon_{j-1} Q_{j-1}(\mathbf{R}) + (\widehat{Q}+1) Q_{j-1}(-\infty, x_{j-1}],
\end{aligned}$$

ввиду определения (140). Отсюда и из неравенства

$$\begin{aligned}
\left|\mathscr{E} e^{i\lambda Y_n} - \varphi^{n-k}\mathscr{E} e^{i\lambda Y_k}\right| &\leqslant \sum_{j=k+1}^{n} \left|\varphi^{n-j}\mathscr{E} e^{i\lambda Y_j} - \varphi^{n-(j-1)}\mathscr{E} e^{i\lambda Y_{j-1}}\right| \\
&= \sum_{j=k+1}^{n} \left|\mathscr{E} e^{i\lambda Y_j} - \varphi\mathscr{E} e^{i\lambda Y_{j-1}}\right|
\end{aligned}$$

вытекает утверждение леммы.

В формуле (140) величина ε_j определена как максимальное отклонение значения характеристической функции скачка марковской массы от некоторого комплексного числа $\varphi \in \mathbf{C}$, $|\varphi| \leqslant 1$, не по всем начальным состояниям из фазового пространства, а лишь на некотором множестве; мы собираемся применентять эту лемму ниже в случае, когда соответствующие множества имеют меру близкую к мере всей числовой прямой.

В следующей теореме выясняются достаточные условия, при которых марковская эволюция масс со значениями на неотрицательной полуоси $[0,\infty)$ в некотором смысле удовлетворяет центральной предельной теореме.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия леммы 18 и $Q_0[0,\infty)<\infty$. Пусть семейство квадратов скачков $\{\eta^2(x),\ x\geqslant 0\}$ равномерно интегрируемо. Если для некоторых $\alpha>0$ и $\sigma^2>0$ имеют место соотношения*

$$\mathscr{E}(\eta(x)-\alpha) \;=\; o(1/\sqrt{x}), \tag{141}$$

$$\mathscr{E}(\eta(x)-\alpha)^2 \;\to\; \sigma^2 \tag{142}$$

при $x\to\infty$, то распределение массы $(Y_n-n\alpha)/\sqrt{n}$ слабо сходится при $n\to\infty$ к нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ^2, т. е. для любого $y\in\mathbf{R}$ имеет место сходимость

$$Q_n[0,n\alpha+y\sqrt{n}] \;\to\; Q\Phi_{\sigma^2}(y),$$

где $Q=\lim_{n\to\infty}Q_n(\mathbf{R})$.

Доказательство будет проведено методом характеристических функций; далее $\lambda\in\mathbf{R}$. Ввиду условия равномерной интегрируемости семейства квадратов скачков справедливо разложение

$$\mathscr{E}e^{i\lambda(\eta(x)-\alpha)} \;=\; Q(x,\mathbf{R})+i\lambda\mathscr{E}(\eta(x)-\alpha)-\frac{\lambda^2}{2}\mathscr{E}(\eta(x)-\alpha)^2+o(\lambda^2)$$

при $\lambda\to 0$ равномерно по x. Учитывая здесь условия (141) и (142), получаем неравенство

$$|\mathscr{E}e^{i\lambda(\eta(x)-\alpha)}-(1-\lambda^2\sigma^2/2)| \;\leqslant\; o(\lambda/\sqrt{x}+\lambda^2)+|Q(x,\mathbf{R})-1|$$

при $\lambda \to 0$ и $x \to \infty$. Фиксируем произвольным образом $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$. В силу последнего неравенства имеем

$$|\mathscr{E} e^{i\lambda(\eta(x)-\alpha)/\sqrt{n}} - (1 - \lambda^2\sigma^2/2n)| \ \leqslant \ o(1/\sqrt{nj}) + \widehat{q}(j\varepsilon)$$

при n, $j \to \infty$ равномерно в области $x > j\varepsilon$. Применяя теперь к марковской эволюции масс $(Y_n - n\alpha)/\sqrt{n}$ лемму 20 при $\varphi = 1 - \lambda^2\sigma^2/2n$ и $x_j = j\varepsilon$, получаем оценку

$$\left| \mathscr{E} e^{i\lambda \frac{Y_n - n\alpha}{\sqrt{n}}} - \Big(1 - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2n}\Big)^{n-k} \mathscr{E} e^{i\lambda \frac{Y_k - k\alpha}{\sqrt{n}}} \right|$$
$$\leqslant (\widehat{Q} + 1) \sum_{j=k}^{n-1} Q_j[0, j\varepsilon] + Q \sum_{j=k}^{n-1} \Big(\frac{o(1)}{\sqrt{nj}} + \widehat{q}(j\varepsilon) \Big).$$

Поскольку выполнены условия леммы 18, величина Q конечна, а $Q_j[0, j\varepsilon] \leqslant Q_0[0, \infty)\delta^j$, $\delta < 1$. Поэтому для любого фиксированного $\lambda \in \mathbf{R}$ разность

$$\left| \mathscr{E} e^{i\lambda \frac{Y_n - n\alpha}{\sqrt{n}}} - \Big(1 - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2n}\Big)^{n-k} \mathscr{E} e^{i\lambda \frac{Y_k - k\alpha}{\sqrt{n}}} \right|$$

может быть сделана сколь угодно малой равномерно по всем $n > k$ выбором достаточно большого k. Для любого фиксированного k

$$\mathscr{E} e^{i\lambda \frac{Y_k - k\alpha}{\sqrt{n}}} \ \to \ Q_k(\mathbf{R})$$

при $n \to \infty$, а $Q_k(\mathbf{R}) \to Q$ при $k \to \infty$ по лемме 17. Поэтому, а также ввиду сходимости для всякого фиксированного k

$$\Big(1 - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2n}\Big)^{n-k} \ \to \ e^{-\lambda^2\sigma^2/2} \ \text{ при } n \to \infty,$$

имеет место сходимость

$$\mathscr{E} e^{i\lambda \frac{Y_n - n\alpha}{\sqrt{n}}} \ \to \ Q e^{-\lambda^2\sigma^2/2} \ \text{ при } n \to \infty,$$

что завершает доказательство теоремы.

§ 20. Вероятности больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова

В настоящем параграфе рассматривается асимптотически однородная в пространстве цепь, т. е. $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$. Предполагаем нерешётчатость распределения F случайной величины ξ; решётчатый случай рассмотрен в § 22.

Как и ранее, число $\beta > 0$ определяется как решение уравнения $\varphi(\beta) = \mathbf{E}e^{\beta\xi} = 1$. Мера, определяемая равенством

$$F^{(\beta)}(du) \;=\; e^{\beta u} F(du), \tag{143}$$

является вероятностной. Пусть $\xi^{(\beta)}$ — случайная величина с распределением $F^{(\beta)}$. Предполагаем, что

$$\begin{aligned} \alpha \;&\equiv\; \mathbf{E}\xi^{(\beta)} = \varphi'(\beta) \in (0,\infty), \\ \sigma^2 \;&\equiv\; \mathbf{D}\xi^{(\beta)} = \varphi''(\beta) - (\varphi'(\beta))^2 < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 19. *Пусть $\mathbf{E}e^{\beta X_0}$ конечно. Пусть семейство скачков $\{\xi(u),\, u \in \mathbf{R}\}$ имеет стохастическую мажоранту $\overline{\xi}$ такую, что*

$$\mathbf{E}\overline{\xi}^2 e^{\beta\overline{\xi}} \;<\; \infty. \tag{144}$$

Пусть скачки цепи удовлетворяют следующим условиям:

$$\inf_{u\in\mathbf{R}} \mathbf{E}e^{\beta\xi(u)} \;>\; 0, \tag{145}$$

$$\mathbf{E}\xi(u)e^{\beta\xi(u)} \;=\; \alpha + o(1/\sqrt{u}) \quad \text{при } u \to \infty. \tag{146}$$

Кроме того, пусть для любого $A > 0$ найдется ограниченная, убывающая, интегрируемая на бесконечности функция $\delta(u) = o(1/u)$ такая, что для любого $u \in \mathbf{R}$

$$\sup_{\lambda\in[-A,A]} |\mathbf{E}e^{(\beta+i\lambda)\xi(u)} - \mathbf{E}e^{(\beta+i\lambda)\xi}| \;\leqslant\; \delta(u). \tag{147}$$

Тогда справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \;=\; ce^{-\beta x}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\Big) + o(e^{-\beta x})$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 0$, где

$$c \;=\; \frac{1}{\beta\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} - 1)e^{\beta y}\,\pi(dy) \in [0,\infty). \tag{148}$$

Условие (145) теоремы эквивалентно (при выполнении (144)) тому, что не существует последовательности точек $u_k \in \mathbf{R}$, для которой $\xi(u_k) \Rightarrow -\infty$ при $k \to \infty$.

В условиях теоремы не предполагается, что функция $\delta(u)$ правильно изменяется на бесконечности, как это предполагается в условии (56) теоремы 11; в этом отношении условие (147) слабее условия (56). Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}e^{(\beta+i\lambda)\xi(u)} - \mathbf{E}e^{(\beta+i\lambda)\xi}| \;&=\; \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta+i\lambda)v} d_v(\mathbf{P}\{\xi(u) < v\} - \mathbf{P}\{\xi < v\})\right| \\
&=\; |\beta + i\lambda|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta+i\lambda)v}(\mathbf{P}\{\xi(u) < v\} - \mathbf{P}\{\xi < v\})\,dv\right| \\
&\leqslant\; |\beta + i\lambda|\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta v}|\mathbf{P}\{\xi(u) < v\} - \mathbf{P}\{\xi < v\}|\,dv,
\end{aligned}$$

то в качестве условия, достаточного для выполнения (147), можно предложить следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta v}|\mathbf{P}\{\xi(u) < v\} - \mathbf{P}\{\xi < v\}|\,dv \;\leqslant\; \delta(u).$$

Из теоремы 19 вытекает

Следствие 7. *Пусть $\widehat{y}(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$ имеет место равномерная по $n \geqslant x/\alpha_0 + \widehat{y}(x)\sqrt{x}$ асимптотика*

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} = e^{-\beta x}(c + o(1)).$$

Если $c > 0$, то в указанной зоне значений n справедлива эквивалентность

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \sim \pi(x, \infty) \quad \textit{при } x \to \infty.$$

Доказательство теоремы 19. Прежде всего отметим, что условие (147) при $\lambda = 0$ влечёт соотношение

$$\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)} \;=\; 1 + O(\delta(u)) = 1 + o(1/u) \quad \text{при } u \to \infty. \tag{149}$$

Рассмотрим преобразование Крамера с параметром β над цепью X_n, т. е. введём в рассмотрение обобщённое переходное ядро

$$P^{(\beta)}(u, dv) \;=\; e^{\beta(v-u)}P(u, dv).$$

Пусть $X_n^{(\beta)}$ — марковская эволюция масс с обобщённым переходным ядром $P^{(\beta)}(\cdot, \cdot)$. Справедливо равенство

$$\pi_n^{(\beta)}(du) \equiv \mathrm{Mes}\{X_n^{(\beta)} \in du\} \;=\; e^{\beta u}\pi_n(du) \equiv e^{\beta u}\mathbf{P}\{X_n \in du\}.$$

Поскольку $\mathbf{E}e^{\beta X_0}$ конечно, $\pi_0^{(\beta)}(\mathbf{R}) < \infty$. А в силу (149) скачки марковской эволюции масс $X_n^{(\beta)}$ имеют равномерно ограниченные общие массы, т. е.

$$\widehat{Q} \equiv \sup_{u \in \mathbf{R}} P^{(\beta)}(u, \mathbf{R}) < \infty.$$

Разложим ядро $P^{(\beta)}$ в сумму переходной вероятности P^* и знакопеременного ядра P^{**} следующим образом:

$$\begin{aligned} P^*(x, \cdot) &= \frac{P^{(\beta)}(x, \cdot)}{P^{(\beta)}(x, \mathbf{R})} \\ P^{**}(x, \cdot) &= P^{(\beta)}(x, \cdot) - P^*(x, \cdot) = \frac{P^{(\beta)}(x, \mathbf{R}) - 1}{P^{(\beta)}(x, \mathbf{R})} P^{(\beta)}(x, \cdot), \end{aligned}$$

так что мера $P^{**}(x, \cdot)$ отрицательна в случае $P^{(\beta)}(x, \mathbf{R}) < 1$, положительна в случае $P^{(\beta)}(x, \mathbf{R}) > 1$ и тождественно равна 0 в случае $P^{(\beta)}(x, \mathbf{R}) = 1$. Поэтому полная вариация $|P^{**}|(u, B)$ меры $P^{**}(u, \cdot)$ на множестве B равна $|P^{**}(u, B)|$.

Отметим, что ядра $P(x,\cdot)$, $P^*(x,\cdot)$ и $P^{**}(x,\cdot)$ коммутируют.

Поскольку мера $\pi_n^{(\beta)}$ есть результат n-кратного применения к мере $\pi_0^{(\beta)}$ ядра $P^{(\beta)}$, то $\pi_n^{(\beta)} = \pi_0^{(\beta)}(P^* + P^{**})^n$. Разлагая степень $(P^* + P^{**})^n$ в сумму по последнему применению ядра P^{**}, получаем равенство

$$(P^* + P^{**})^n \;=\; (P^*)^n + \sum_{k=0}^{n-1}(P^* + P^{**})^k P^{**}(P^*)^{n-1-k}.$$

Отсюда выводим основное для дальнейшего анализа представление

$$\pi_n^{(\beta)} \;=\; \pi_0^{(\beta)}(P^*)^n + \sum_{k=0}^{n-1}\pi_k^{(\beta)}P^{**}(P^*)^{n-1-k}. \tag{150}$$

Основная идея дальнейших рассуждений состоит в следующем. Поскольку последовательность мер $\pi_n^{(\beta)}(du)$ слабо сходится к мере $e^{\beta u}\pi(du)$, а хвост меры π имеет как правило экспоненциальную асимптотику с показателем $-\beta$, то слабый предел последовательности мер $\pi_n^{(\beta)}$ вдали от начала координат ведет себя как нормированная мера Лебега. В частности, (149) обеспечивает слабую компактность семейства мер $\{\pi_n^{(\beta)}P^{**}\}$. А n-я степень переходного ядра P^* удовлетворяет локальной центральной предельной теореме. В совокупности это позволяет вычислить локальную асимптотику меры $\pi_n^{(\beta)}$.

Лемма 21. *Семейство мер $\{\pi_k^{(\beta)}P^{**},\ k\geqslant 0\}$ относительно компактно в том смысле, что при $x\to\infty$*

$$\sup_{k\geqslant 0}|\pi_k^{(\beta)}P^{**}|(-\infty,-x] \;=\; O(e^{-\beta x}),$$
$$\sup_{k\geqslant 0}|\pi_k^{(\beta)}P^{**}|(x,\infty) \;\to\; 0.$$

Кроме того, последовательность мер $\pi_k^{(\beta)}P^{**}$ сходится при $k\to\infty$ в метрике полной вариации к мере $\pi^{(\beta)}P^{**}$, где $\pi^{(\beta)}(du)\equiv\pi(du)e^{\beta u}$.

Учитывая, что $(\pi^{(\beta)}P^{**})(\mathbf{R})$ равно

$$\int_{-\infty}^{\infty}P^{**}(u,\mathbf{R})\pi^{(\beta)}(du) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}(P^{(\beta)}(u,\mathbf{R}) - P^*(u,\mathbf{R}))\pi^{(\beta)}(du)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)} - 1)e^{\beta u}\pi(du), \tag{151}$$

получаем следующее

Следствие 8. *Значение константы c в (148) конечно.*

Что касается положительности константы c, то некоторые достаточные условия приведены сразу после теоремы 11. Отметим, что эти условия автоматически выполнены для частично однородной цепи с равномерно ограниченными моментами порядка $2 + \varepsilon$ отрицательных частей скачков.

Доказательство леммы. Имеем неравенство

$$|\pi_k^{(\beta)} P^{**}|(B) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |P^{**}|(u, B)\pi_k^{(\beta)}(du). \tag{152}$$

Из определения меры $P^{**}(u, \cdot)$ и условия (147) при $\lambda = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} |P^{**}|(u, B) &= \frac{|P^{(\beta)}(u, \mathbf{R}) - 1|}{P^{(\beta)}(u, \mathbf{R})} P^{(\beta)}(u, B) \\ &= \frac{|\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)} - 1|}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)}} P^{(\beta)}(u, B) \\ &\leqslant \frac{\delta(u)}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)}} P^{(\beta)}(u, B), \end{aligned} \tag{153}$$

откуда ввиду (145) выводим оценку

$$|P^{**}|(u, B) \leqslant c_1 P^{(\beta)}(u, B). \tag{154}$$

Мера $\pi_k^{(\beta)}$ есть преобразование Крамера с положительным параметром β над вероятностной мерой и, следовательно, допускает экспоненциальную оценку отрицательного хвоста вида $\pi_k^{(\beta)}(-\infty, -x] \leqslant e^{-\beta x}$, $x > 0$. Поэтому из (152) и (154) при $B = (-\infty, -x]$ вытекают оценки

$$\begin{aligned} |\pi_k^{(\beta)} P^{**}|(-\infty, -x] &\leqslant c_1 \int_{-\infty}^{\infty} P^{(\beta)}(u, (-\infty, -x])\pi_k^{(\beta)}(du) \\ &= c_1 \pi_{k+1}^{(\beta)}(-\infty, -x] \leqslant c_1 e^{-\beta x}. \end{aligned}$$

Первая равномерная оценка леммы доказана.

Проверим теперь вторую равномерную сходимость леммы. Фиксируем произвольно $\lambda \in (0,\beta)$; имеем $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} < 1$. Так как $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $x \to \infty$ и семейство величин $\{e^{\beta\xi(u)}\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathbf{E}e^{\lambda\xi(u)} \to \mathbf{E}e^{\lambda\xi} < 1$. Значит, найдётся достаточно большое U такое, что

$$\sup_{u>U} \mathbf{E}e^{\lambda\xi(u)} \;<\; 1; \tag{155}$$

не ограничивая общности можно считать, что $U = 0$. Тогда ввиду леммы 19

$$\sup_k \pi_k^{(\beta)}(-\infty, x] \;=\; O(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{156}$$

Из (154), в силу (144), имеем при $u \leqslant x$

$$|P^{**}(u,(x,\infty))| \;\leqslant\; c_1 \frac{\mathbf{E}\bar{\xi}^2 e^{\beta\bar{\xi}}}{(x-u)^2} = \frac{c_2}{(x-u)^2}, \tag{157}$$

и из (153) при всех u и x

$$|P^{**}(u,(x,\infty))| \;\leqslant\; \frac{\delta(u)}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)}} P^{(\beta)}(u,\mathbf{R}) = \delta(u). \tag{158}$$

Подставляя (157) и (158) в (152) при $B = (x,\infty)$, выводим:

$$|\pi_k^{(\beta)} P^{**}|(x,\infty) \;\leqslant\; c_3 \int_{-\infty}^{x/2} (x-u)^{-2} \pi_k^{(\beta)}(du) + \int_{x/2}^{\infty} \delta(u) \pi_k^{(\beta)}(du). \tag{159}$$

Первый интеграл стремится к нулю при $x \to \infty$. Что касается второго интеграла, то интегрирование по частям дает равенство

$$\int_{x/2}^{\infty} \delta(u)\pi_k^{(\beta)}(du) \;=\; \delta(u)\pi_k^{(\beta)}[0,u]\Big|_{x/2}^{\infty} + \int_{x/2}^{\infty} \pi_k^{(\beta)}[0,u]d(-\delta(u)).$$

В силу (156) и соотношения $\delta(u) = o(1/u)$, свободный член стремится к нулю при $x \to \infty$ равномерно по k. В силу той же теоремы и убывания функции δ имеем равномерную по k оценку

$$\int_{x/2}^{\infty} \pi_k^{(\beta)}[0,u]d(-\delta(u)) \;\leqslant\; c_4 \int_{x/2}^{\infty} u d(-\delta(u)).$$

Повторное интегрирование по частям и интегрируемость функции δ на бесконечности приводят к тому, что и второй интеграл в (159) стремится к нулю при $x \to \infty$ равномерно по k. Поэтому семейство мер $\pi_k^{(\beta)} P^{**}$ относительно компактно.

Слабая сходимость вытекает из сходимости меры $\pi_k^{(\beta)}$ при $k \to \infty$ по вариации к мере $\pi^{(\beta)}$. Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы 19 проведём, наложив три дополнительных условия: условие существования миноранты для семейства скачков цепи с переходной вероятностью P^* (см. (160)), условие достаточно высокой скорости сходимости π_n к π (см. (161)) и условие абсолютной непрерывности распределения π_n относительно инвариантной меры π (см. (162)). Окончание доказательства теоремы в общем случае выделено в отдельный § 21.

Пусть $\xi^*(x)$ — скачок из состояния x цепи Маркова X_n^* с переходной вероятностью P^*, т. е. такая случайная величина, что $\mathbf{P}\{\xi^*(x) \in B\} = P^*(x, x+B)$. Так как $P^{(\beta)}(x, \mathbf{R}) \to 1$ при $x \to \infty$, то по определению ядра P^* имеет место слабая сходимость

$$\xi^*(x) \ \Rightarrow \ \xi^{(\beta)} \quad \text{при} \ \ x \to \infty.$$

Итак, предположим, что семейство скачков $\{\xi^*(x),\ x \in \mathbf{R}\}$ допускает миноранту $\underline{\zeta}$, имеющую положительное среднее значение и конечную дисперсию, т. е. для любого $x \in \mathbf{R}$ имеет место стохастическое неравенство

$$\xi^*(x) \ \geqslant_{\mathrm{st}} \ \underline{\zeta}. \tag{160}$$

Предполагаем, что скорость сходимости в (1) достаточно высокая, а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\pi_n - \pi|(\mathbf{R}) \ < \ \infty. \tag{161}$$

Кроме того предполагаем, что для любого n мера π_n абсолютно непрерывна относительно меры π, т. е. определена (неотрицательная) производная

Радона–Никодима

$$f_n(u) \ \equiv \ \frac{d\pi_n}{d\pi}(u), \tag{162}$$

причём эта производная ограничена сверху числом $\rho < \infty$ равномерно по n и u. По определению преобразования Крамера имеем равенство

$$\frac{d\pi_n^{(\beta)}}{d\pi^{(\beta)}}(u) \ = \ \frac{d\pi_n}{d\pi}(u) = f_n(u).$$

Тогда мера $\pi_n P^{**}$ абсолютно непрерывна относительно меры πP^{**}, причём соответствующую знакопеременную плотность $f^{**}(u)$ можно оценить следующим образом:

$$|f_n^{**}(u)| \ \equiv \ \left|\frac{d\pi_n^{(\beta)}P^{**}}{d\pi^{(\beta)}P^{**}}(u)\right| \leqslant \rho, \tag{163}$$

поскольку для любого $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\pi_n^{(\beta)}P^{**}(B) \ &= \ \int_{\mathbf{R}} P^{**}(u,B) f_n(u) \pi^{(\beta)}(du) \\ &\leqslant \ \rho \int_{\mathbf{R}} P^{**}(u,B)\pi^{(\beta)}(du) = \rho\pi^{(\beta)}P^{**}(B).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\{\xi^*(x) > u\} = \frac{\mathrm{Mes}\{\xi^{(\beta)} > u\}}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}} \ \leqslant \ \frac{\mathrm{Mes}\{\overline{\xi}^{(\beta)} > u\}}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}},$$

то в силу условий (144) и (145) семейство случайных величин $\{\xi^*(x)\}$ имеет интегрируемую в квадрате мажоранту. Ввиду (146) и (149),

$$\mathbf{E}\xi^*(x) \ = \ \frac{\mathbf{E}\xi(x)e^{\beta\xi(x)}}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}} = \frac{\alpha + o(1/\sqrt{x})}{1+o(1/x)} = \alpha + o(1/\sqrt{x}) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Из слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$, условий (144) и (149) вытекает, что

$$\mathbf{E}(\xi^*(x))^2 \ = \ \frac{\mathbf{E}(\xi(x))^2 e^{\beta\xi(x)}}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}} \to \sigma^2 + \alpha^2 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Условия (147) и (149) влекут для любого $A>0$ соотношение при $x\to\infty$

$$\sup_{\lambda\in[-A,A]}\left|\mathbf{E}e^{i\lambda\xi^*(x)}-\mathbf{E}e^{i\lambda\xi^{(\beta)}}\right| \;=\; \sup_{\lambda\in[-A,A]}\left|\frac{\mathbf{E}e^{(i\lambda+\beta)\xi(x)}}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)}}-\mathbf{E}e^{(i\lambda+\beta)\xi}\right| = O(\delta(x)).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 16 (включая наличие соответствующей миноранты), согласно которой для цепи X_n^* имеет место локальная центральная предельная теорема. В частности, для любого фиксированного $\Delta>0$,

$$\sup_y \mathbf{P}\{X_n^*\in(y,y+\Delta]\} \;\to\; 0 \quad \text{при } n\to\infty. \tag{164}$$

Согласно равенству (150),

$$\pi_n^{(\beta)}(y,y+\Delta] \;=\; \pi_0^{(\beta)}(P^*)^n(y,y+\Delta]+\sum_{k=0}^{n-1}\pi_k^{(\beta)}P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y,y+\Delta].$$

В силу (164) слагаемое $\pi_0^{(\beta)}(P^*)^n(y,y+\Delta]$, а также любое (если зафиксировать k) из слагаемых $\pi_k^{(\beta)}P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y,y+\Delta]$ вносит в общую сумму пренебрежимо малый вклад $o(1)$ при $n\to\infty$ равномерно по y. Поэтому для любого фиксированного K имеем при $n\to\infty$ равномерное по y соотношение

$$\pi_n^{(\beta)}(y,y+\Delta] \;=\; \sum_{k=K}^{n-1}\pi_k^{(\beta)}P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y,y+\Delta]+o(1). \tag{165}$$

Напомним, что $\pi_k^{(\beta)}P^{**}$ сходится по вариации к мере $\pi^{(\beta)}P^{**}$ при $k\to\infty$ (см. лемму 21). Поэтому наша ближайшая цель — произвести эту замену меры в (165) и доказать, что при $n\to\infty$ равномерно по y

$$\pi_n^{(\beta)}(y,y+\Delta] \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\pi^{(\beta)}P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y,y+\Delta]+o(1). \tag{166}$$

Обоснуем переход от (165) к (166).

Для любого A имеем равенство

$$\pi_k^{(\beta)}P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y,y+\Delta]$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{A} + \int_{A}^{\infty}\right)(P^*)^{n-1-k}(u,(y,y+\Delta])(\pi_k^{(\beta)}P^{**})(du)$$
$$\equiv I_1(k,A) + I_2(k,A).$$

Исходя из (163), второй интеграл оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} |I_2(k,A)| &= \left|\int_A^{\infty}(P^*)^{n-1-k}(u,(y,y+\Delta])f_k^{**}(u)(\pi^{(\beta)}P^{**})(du)\right| \\ &\leqslant \rho\int_A^{\infty}(P^*)^{n-1-k}(u,(y,y+\Delta])\,|\pi^{(\beta)}P^{**}|(du). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_n\left|\sum_{k=0}^{n-1} I_1(k,A)\right| &\leqslant \rho\int_A^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(P^*)^{n-1-k}(u,(y,y+\Delta])\,|\pi^{(\beta)}P^{**}|(du) \\ &\to \rho\,|\pi^{(\beta)}P^{**}|(A,\infty)\Delta/\alpha \end{aligned}$$

по локальной теореме восстановления 17. Таким образом,

$$\lim_{A\to\infty}\sup_n\left|\sum_{k=0}^{n-1} I_1(k,A)\right| \to 0. \tag{167}$$

Рассмотрим теперь интегралы $I_1(k,A)$ при *фиксированном* A. Имеем оценки

$$\begin{aligned} &\left|I_1(k,A) - \int_{-\infty}^{A}(P^*)^{n-1-k}(u,(y,y+\Delta])\,(\pi^{(\beta)}P^{**})(du)\right| \\ &\qquad\leqslant \int_{-\infty}^{A}|\pi_k^{(\beta)}P^{**} - \pi^{(\beta)}P^{**}|(du) \\ &\qquad\qquad= |\pi_k^{(\beta)}P^{**} - \pi^{(\beta)}P^{**}|(-\infty,A) \\ &\qquad\qquad\qquad\leqslant |\pi_k^{(\beta)} - \pi^{(\beta)}|(-\infty,A)\cdot\sup_{u\in\mathbf{R}}|P^{**}|(u,\mathbf{R}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\leqslant e^{\beta A}\cdot|\pi_k - \pi|(-\infty,A)\cdot\sup_{u\in\mathbf{R}}|P^{**}|(u,\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (161) сумма

$$\sum_{k=K}^{n-1} I_1(k,A)$$

может быть сделана сколь угодно близкой к сумме

$$\sum_{k=K}^{n-1} \int_{-\infty}^{A} (P^*)^{n-1-k}(u,(y,y+\Delta])\,(\pi^{(\beta)}P^{**})(du)$$

равномерно по всем n выбором достаточно большого K. Вместе с (167) это обосновывает переход от (165) к (166).

Из (166) по локальной теореме восстановления 17, а также принимая во внимание равенство (151) и следствие 8, имеем асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}\pi_n^{(\beta)}(y,y+\Delta] &= (\pi^{(\beta)}P^{**})(\mathbf{R})\frac{\Delta}{\alpha}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha-y}{\sqrt{y/\alpha}}\Big)+o(1)\\ &= c\beta\Delta\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha-y}{\sqrt{y/\alpha}}\Big)+o(1) \quad \text{при } y,\ n\to\infty. \qquad (168)\end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Крамера (128) к марковской эволюции масс $X_n^{(\beta)}$, получаем

$$\mathbf{P}\{X_n>x\} = \int_x^\infty e^{-\beta y}\pi_n^{(\beta)}(dy).$$

Следовательно, для любого $\Delta>0$ справедливы оценка сверху

$$\mathbf{P}\{X_n>x\} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta)}\pi_n^{(\beta)}(x+k\Delta,x+k\Delta+\Delta] \equiv s_1(\Delta)$$

и оценка снизу

$$\mathbf{P}\{X_n>x\} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta+\Delta)}\pi_n^{(\beta)}(x+k\Delta,x+k\Delta+\Delta] \equiv s_2(\Delta).$$

Отношение $s_1(\Delta)/s_2(\Delta)$ оценки сверху к оценке снизу равно $e^{\beta\Delta}$ и стремится к 1 при $\Delta\to 0$. Для любого фиксированного $\Delta>0$ выводим из (168) соотношение

$$\begin{aligned}s_1(\Delta) &= o(1)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\beta(x+k\Delta)}+c\Delta\beta\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\beta(x+k\Delta)}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha-(x+k\Delta)}{\sqrt{(x+k\Delta)/\alpha}}\Big)\\ &= o(e^{-\beta x})+c\Delta\beta\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha-x}{\sqrt{x/\alpha}}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\beta(x+k\Delta)}\\ &= o(e^{-\beta x})+c\frac{\Delta\beta}{1-e^{-\beta\Delta}}e^{-\beta x}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha-x}{\sqrt{x/\alpha}}\Big),\end{aligned}$$

что влечёт асимптотику

$$\mathbf{P}\{X_n > x\} \;=\; c\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\Big)e^{-\beta x} + o(e^{-\beta x}) \tag{169}$$

при n, $x \to \infty$. При любом фиксированном n имеем $\mathbf{P}\{X_n > x\} = o(e^{-\beta x})$. Поэтому (169) имеет место при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 0$.

Итак, утверждение теоремы доказано, правда пока что лишь при дополнительном предположении существования стохастической миноранты семейства скачков $\{\xi^*(x)\}$ и абсолютной непрерывности π_n относительно инвариантной меры π.

§ 21. Завершение доказательства теоремы 19

В настоящем параграфе строится вспомогательная цепь Маркова $\widetilde{Z}_n$, которая эквивалентна исходной цепи X_n с точки зрения вероятностей больших уклонений, но в то же время удовлетворяет дополнительным условиям, наложенным на цепь X_n в ходе доказательства в предыдущем параграфе.

По построению и ввиду условия (145) среднее

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{e^{\beta|\xi^{(\beta)}(u)|};\ \xi^{(\beta)}(u) \leqslant 0\} \;&=\; \frac{1}{P^{(\beta)}(u,\mathbf{R})}\int_{-\infty}^{0} e^{-\beta y}\mathbf{P}\{\xi^{(\beta)}(u) \in dy\} \\
&=\; \frac{1}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)}}\int_{-\infty}^{0} \mathbf{P}\{\xi(u) \in dy\} \\
&\leqslant\; \frac{1}{\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)}}
\end{aligned}$$

есть величина ограниченная равномерно по $u \in \mathbf{R}$. В частности, квадраты отрицательных частей случайных величин $\xi^{(\beta)}(u)$, $u \in \mathbf{R}$, равномерно интегрируемы. В совокупности со слабой сходимостью $\xi^{(\beta)}(u) \Rightarrow \xi^{(\beta)}$ это влечет существование уровня $U \in \mathbf{R}$ такого, что семейство $\{\xi^{(\beta)}(u),\ u > U\}$ имеет миноранту с положительным средним значением и конечным вторым моментом. Выберем U настолько большим, чтобы выполнялось (155) и $\inf_{n\geqslant 0}\mathbf{P}\{X_n \leqslant U\} > 0$.

Укрупним цепь X_n, объединив состояния на полуоси $(-\infty, U]$ в одно состояние U. А именно, рассмотрим цепь Маркова Z_n со значениями на полуоси $[U, \infty)$, с начальным состоянием $Z_0 = \max\{U, X_0\}$ и со следующими *неоднородными во времени* переходными вероятностями $P_{Z,n}$:

$$\begin{array}{lcll}
P_{Z,n}(u, B) & = & P_Z(u, B) = P(u, B), & \text{если } u > U \text{ и } B \subseteq (U, \infty), \\
P_{Z,n}(u, \{U\}) & = & P_Z(u, \{U\}) = P(u, (-\infty, U]), & \text{если } u > U, \\
P_{Z,n}(U, B) & = & \frac{1}{\mathbf{P}\{X_n \leqslant U\}} \int_{-\infty}^{U} P(u, B)\mathbf{P}\{X_n \in du\}, & \text{если } B \subseteq (U, \infty), \\
P_{Z,n}(U, \{U\}) & = & \frac{1}{\mathbf{P}\{X_n \leqslant U\}} \int_{-\infty}^{U} P(u, (-\infty, U])\mathbf{P}\{X_n \in du\}. &
\end{array}$$

Отметим, что неоднородность во времени наблюдается исключительно у переходных вероятностей из состояния U, да и то ввиду сходимости по вариации (1) имеет место асимптотическая однородность при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
P_{Z,n}(U, B) &\to \frac{1}{\pi(-\infty, U]} \int_{-\infty}^{U} P(u, B)\pi(du), \quad \text{если } B \subseteq (U, \infty), \\
P_{Z,n}(U, \{U\}) &\to \frac{1}{\pi(-\infty, U]} \int_{-\infty}^{U} P(u, (-\infty, U])\pi(du).
\end{aligned}$$

По построению начального распределения Z_0 и переходных вероятностей цепи Z_n имеем равенства

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{Z_n = U\} &= \mathbf{P}\{X_n \leqslant U\}, \\
\mathbf{P}\{Z_n > x\} &= \mathbf{P}\{X_n > x\} \text{ при } x > U.
\end{aligned}$$

Наряду с цепью Z_n рассмотрим также цепь $\widetilde{Z}_n$ с атомом в точке U, с начальным состоянием $\widetilde{Z}_0 = U$, переходные вероятности $\widetilde{P}(u, \cdot)$ которой совпадают с $P_Z(u, \cdot)$ при $u > U$, а из точки $u = U$ равны

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(U, B) &= \frac{1}{\pi(-\infty, U]} \int_{-\infty}^{U} P(u, B)\pi(du), \quad \text{если } B \subseteq (U, \infty), \\
\widetilde{P}(U, \{U\}) &= \frac{1}{\pi(-\infty, U]} \int_{-\infty}^{U} P(u, (-\infty, U])\pi(du).
\end{aligned}$$

Переходные вероятности цепи $\widetilde{Z}_n$ однородны во времени. Инвариантная мера $\widetilde{\pi}$ этой цепи совпадает с мерой π на множестве (U, ∞), а $\widetilde{\pi}(\{U\}) = \pi(-\infty, U]$.

Скачки $\widetilde{\xi}(u)$ цепи $\widetilde{Z}_n$ допускают миноранту с положительным средним и конечной дисперсией. Эта цепь с атомом является геометрически эргодической (см., например, [72, Section 15]), поэтому $|\pi_n - \pi|(\mathbf{R}) = o(r^n)$ для некоторого $r < 1$ и выполнено условие (161). Кроме того, для любого $B \in \mathscr{B}(U, \infty)$ имеем равенство

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_n \in B\} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_k = U\}\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}_{n-1} > U, \widetilde{Z}_n \in B | \widetilde{Z}_k = U\}.$$

Поэтому, с одной стороны,

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_n \in B\} \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}_{n-1} > U, \widetilde{Z}_n \in B | \widetilde{Z}_k = U\},$$

а с другой стороны, найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_m \in B\} \;\geqslant\; \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}_{m-1} > U, \widetilde{Z}_m \in B | \widetilde{Z}_k = U\}.$$

Значит, для любых $n < m$ мера $\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_n \in \cdot\}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_m \in \cdot\}$ и соответствующая плотность не превосходит $1/\varepsilon$. Отсюда для любого n мера $\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_n \in \cdot\}$ абсолютно непрерывна и относительно меры $\widetilde{\pi}$ с плотностью, также не превосходящей $1/\varepsilon$.

Таким образом, цепь $\widetilde{Z}_n$ удовлетворяет каждому из трёх дополнительных условий (160)–(162) предыдущего параграфа. Следовательно, при $x \to \infty$ справедлива равномерная по $n \geqslant 0$ эквивалентность

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_n > x\} \;=\; \widetilde{c}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{x - n\alpha}{\sqrt{x/\alpha}}\Big)e^{-\beta x} + o(e^{-\beta x}), \tag{170}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{c} \;&=\; \frac{1}{\alpha\beta}\int_U^\infty (\mathbf{E}e^{\beta\widetilde{\xi}(u)} - 1)e^{\beta u}\widetilde{\pi}(du) \\
&=\; \frac{1}{\alpha\beta}\bigg(\int_{U+0}^\infty (\mathbf{E}e^{\beta(u+\widetilde{\xi}(u))} - e^{\beta u})\pi(du) + (\mathbf{E}e^{\beta(U+\widetilde{\xi}(U))} - e^{\beta U})\pi(-\infty, U]\bigg) \\
&=\; \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^\infty (\mathbf{E}f(u+\xi(u)) - f(u))\pi(du);
\end{aligned} \tag{171}$$

здесь $f(u)=\max\{e^{\beta U},e^{\beta u}\}$. Значения функции $g(u)=e^{\beta u}-f(u)$ заключены в пределах от $-e^{\beta U}$ до 0. Поэтому если цепь X_n находится в стационарном режиме, т. е. X_n имеет распределение π, то $\mathbf{E}g(X_{n+1})=\mathbf{E}g(X_n)$. Следовательно, справедливо *тождество равновесия*:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{E}g(u+\xi(u))-g(u))\pi(du) \;=\; 0.$$

Деля это равенство на $\alpha\beta$ и складывая затем с (171), получаем окончательное представление для константы $\widetilde{c}$:

$$\widetilde{c} \;=\; \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{E}e^{\beta(u+\xi(u))}-e^{\beta u})\pi(du).$$

Пусть $Z_n^{(\beta)}$ и $\widetilde{Z}_n^{(\beta)}$ — марковские эволюции масс, полученные из цепей Z_n и $\widetilde{Z}_n$ соответственно преобразованием Крамера с параметром β. Проанализируем меры $\mathrm{Mes}\{Z_n^{(\beta)}\in\cdot\}$ и $\mathrm{Mes}\{\widetilde{Z}_n^{(\beta)}\in\cdot\}$ с точки зрения формулы по последнему попаданию в точку U. Что касается первой меры, то

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mes}\{Z_n^{(\beta)}\in[y,y+\Delta)\}\\
&\quad=\;\mathrm{Mes}\{Z_0^{(\beta)}>U,\dots,Z_{n-1}^{(\beta)}>U,\ Z_n^{(\beta)}\in[y,y+\Delta)\}\\
&\qquad+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Mes}\{Z_k^{(\beta)}=U\}\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{Mes}\{Z_{k+1}^{(\beta)}>U,\dots,Z_{n-1}^{(\beta)}>U,\ Z_n^{(\beta)}\in[y,y+\Delta)|Z_k^{(\beta)}=U\}.
\end{aligned}\tag{172}$$

Напомним, что имеет место (155). Ввиду центральной предельной теоремы 18 значение

$$\mathrm{Mes}\{Z_0^{(\beta)}>U,\dots,Z_{n-1}^{(\beta)}>U,\ Z_n^{(\beta)}\in[y,y+\Delta)\},$$

а также при любом фиксированном k значение

$$\mathrm{Mes}\{Z_{k+1}^{(\beta)}>U,\dots,Z_{n-1}^{(\beta)}>U,\ Z_n^{(\beta)}\in[y,y+\Delta)|Z_k^{(\beta)}=U\}$$

суть величины порядка $o(1)$ при $n \to \infty$ равномерно по y. Поэтому замена любого конечного (по k) набора переходных вероятностей из числа $P^{(\beta)}_{Z,k}(U,\cdot)$ на вероятности $\widetilde{P}^{(\beta)}(U,\cdot)$ влияет на асимптотику $\mathrm{Mes}\{Z^{(\beta)}_n \in (y, y+\Delta]\}$ на величину $o(1)$. Учитывая также, что при $k \to \infty$

$$\mathrm{Mes}\{Z^{(\beta)}_k = U\} \ = \ e^{\beta U}\mathbf{P}\{Z_k = U\} \to e^{\beta U}\pi(-\infty, U],$$

выводим из (172), что при $n \to \infty$ равномерно по y

$$\begin{aligned} &\mathrm{Mes}\{Z^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\} \\ &\quad = \ o(1) + e^{\beta U}\pi(-\infty, U]\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Mes}\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}^{(\beta)}_{n-1} > U, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta) | \widetilde{Z}^{(\beta)}_k = U\}. \end{aligned}$$

Ровно по тем же соображениям имеем такое же соотношение для однородной во времени марковской последовательности масс $\widetilde{Z}^{(\beta)}_n$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Mes}\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\} \\ &\quad = \ o(1) + e^{\beta U}\pi(-\infty, U]\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Mes}\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}^{(\beta)}_{n-1} > U, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta) | \widetilde{Z}^{(\beta)}_k = U\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Mes}\{Z^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\} \ = \ o(1) + \mathrm{Mes}\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\}.$$

Применяя обратное (т. е. с параметром $-\beta$, см. лемму 15) преобразование Крамера к мерам $\mathrm{Mes}\{Z^{(\beta)}_n \in \cdot\}$ и $\mathrm{Mes}\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in \cdot\}$, получаем при $n \to \infty$ равномерно по x

$$\mathbf{P}\{Z_n > x\} \ = \ o(1) + \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_n > x\},$$

что вместе с (170) завершает доказательство теоремы.

§ 22. Решётчатый случай

Пусть X_n — цепь Маркова со значениями на решётке $\{k\Delta,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $\Delta > 0$, причём эта решётка минимальна. Рассматривается асимптотически однородная цепь, т. е. $\xi(k\Delta) \Rightarrow \xi$ при $k \to \infty$; значения величины ξ пропорциональны Δ. Сформулируем соответствующую теорему о вероятностях больших уклонений.

Теорема 20. *Пусть* $\mathbf{E}e^{\beta X_0} < \infty$. *Пусть семейство скачков* $\{\xi(k\Delta),\ k \in \mathbf{Z}\}$ *имеет стохастическую мажоранту* $\overline{\xi}$ *такую, что* $\mathbf{E}\overline{\xi}^2 e^{\beta\overline{\xi}} < \infty$. *Пусть скачки цепи удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned} \inf_{k\in\mathbf{Z}} \mathbf{E}e^{\beta\xi(k\Delta)} &> 0, \\ \mathbf{E}\xi(k\Delta)e^{\beta\xi(k\Delta)} &= \alpha + o(1/\sqrt{k}) \quad \text{при } k \to \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть найдется ограниченная, убывающая, суммируемая на бесконечности последовательность $\delta(k) = o(1/k)$ *такая, что для любого* $k \in \mathbf{Z}$

$$\sup_{\lambda\in[-\pi/\Delta,\pi/\Delta]} |\mathbf{E}e^{(\beta+i\lambda)\xi(k\Delta)} - \mathbf{E}e^{(\beta+i\lambda)\xi}| \leqslant \delta(k).$$

Тогда справедлива эквивалентность

$$\mathbf{P}\{X_n = m\Delta\} = c_\Delta e^{-\beta m\Delta}\Phi_{\sigma^2}\Big(\frac{n\alpha - m\Delta}{\sqrt{m\Delta/\alpha}}\Big) + o(e^{-\beta m\Delta})$$

при $m \to \infty$ *равномерно по* $n \geqslant 0$, *где*

$$c_\Delta = \frac{\Delta}{\mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\mathbf{E}e^{\beta\xi(k\Delta)} - 1)e^{\beta k\Delta}\pi(k\Delta) \in [0,\infty).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в нерешётчатом случае. Единственное отличие порождается решётчатым вариантом локальной теоремы восстановления, что и сказывается присутствием другого постоянного множителя в итоговой асимптотике вероятности $\mathbf{P}\{X_n \geqslant m\Delta\}$.

§ 23. О положительности постоянного множителя c в теореме 19

Как уже отмечалось сразу после теоремы 11, константа

$$c \equiv \frac{1}{\beta\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)}-1)e^{\beta y}\,\pi(dy) \tag{173}$$

положительна, если $\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} \geqslant 1-\gamma(y)$, где $\gamma(y)\geqslant 0$ при любом y и

$$\int_0^{\infty}\gamma(y)y\ln y\,dy < \infty.$$

В следующей теореме это условие несколько ослабляется. При этом доказательство есть существенно усовершенствованный вариант доказательства теоремы 5 из [6, § 27].

Теорема 21. *Пусть цепь X_n асимптотически однородна в пространстве, т. е. $\xi(y)\Rightarrow\xi$ при $y\to\infty$. Пусть $\mathbf{E}\xi<0$ и существует $\beta>0$ такое, что $\mathbf{E}e^{\beta\xi}=1$. Пусть $\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)}\geqslant 1-\gamma(y)$, где функция $\gamma(y)$ неотрицательная, монотонно убывающая, $\gamma(y)=o(1/y)$ при $y\to\infty$ и*

$$\int_0^{\infty}\gamma(y)y\,dy < \infty. \tag{174}$$

Пусть π — произвольное вероятностное инвариантное распределение цепи X_n такое, что $\pi(y,\infty)>0$ при любом y и $\pi(y,\infty)=O(e^{-\beta y})$ при $y\to\infty$. Тогда константа c, определяемая равенством (173)*, больше нуля.*

Доказательство. Докажем сначала, что в условиях теоремы

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\beta u}\pi(du) = \infty. \tag{175}$$

Укрупним цепь X_n, усреднив состояния на полуоси $(-\infty,U]$ в соответствии с мерой π и объединив их в одно состояние U. А именно, рассмотрим цепь Маркова $X_{U,n}$ со значениями на полуоси $[U,\infty)$ и со следующими переходными вероятностями P_U:

$$\begin{aligned}
P_U(y,B) &= P(y,B), && \text{если } y>U \text{ и } B\subseteq(U,\infty),\\
P_U(y,\{U\}) &= P(y,(-\infty,U]), && \text{если } y>U,\\
P_U(U,B) &= \frac{1}{\pi(-\infty,U]}\int_{-\infty}^{U} P(u,B)\pi(du), && \text{если } B\subseteq(U,\infty),\\
P_U(U,\{U\}) &= \frac{1}{\pi(-\infty,U]}\int_{-\infty}^{U} P(u,(-\infty,U])\pi(du).
\end{aligned}$$

По построению переходных вероятностей P_U инвариантная мера π_U цепи $X_{U,n}$ совпадает с мерой π на множестве (U,∞), а $\pi_U(\{U\})=\pi(-\infty,U]$. Скачок $\xi_U(y)$ цепи $X_{U,n}$ удовлетворяют при любом $y>U$ стохастическому неравенству

$$\xi_U(y) \;\geqslant_{\rm st}\; \xi(y). \tag{176}$$

Выберем уровень U настолько большим, чтобы при любом $u>U$ выполнялось неравенство

$$u(\mathbf{E}e^{\beta\xi(u)}-1)+\mathbf{E}\xi(u)e^{\beta\xi(u)} \;>\; 0; \tag{177}$$

такой выбор возможен, поскольку $\gamma(u)=o(1/u)$ и $\liminf_{u\to\infty}\mathbf{E}\xi(u)e^{\beta\xi(u)}\geqslant \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi}\in(0,\infty]$ ввиду слабой сходимости $\xi(u)\Rightarrow\xi$.

Предположим теперь, что интеграл в (175) конечен. Тогда для любого $\lambda\in[0,\beta]$ среднее приращение экспоненты $e^{\lambda X_{U,n}}$ за один шаг в стационарном состоянии π_U равно нулю, т. е. справедливо следующее *тождество равновесия*:

$$\int_U^\infty e^{\lambda u}(\mathbf{E}e^{\lambda\xi_U(u)}-1)\pi_U(du) \;=\; 0. \tag{178}$$

Продифференцировав это равенство по λ, получаем для любого $\lambda\in[0,\beta]$:

$$\int_U^\infty e^{\lambda u}u(\mathbf{E}e^{\lambda\xi_U(u)}-1)\pi_U(du)+\int_U^\infty e^{\lambda u}\mathbf{E}\xi_U(u)e^{\lambda\xi_U(u)}\pi_U(du) \;=\; 0.$$

Полагая $\lambda = \beta$, получаем равенство

$$\int_U^\infty e^{\beta u}\Big[u(\mathbf{E}e^{\beta\xi_U(u)}-1)+\mathbf{E}\xi_U(u)e^{\beta\xi_U(u)}\Big]\pi_U(du) \ = \ 0,$$

чего не может быть ввиду (177), (176) и $\pi(U,\infty)>0$. Таким образом, (175) доказано.

Далее, предположим, что $c = 0$ в (173). Как отмечалось при подсчёте константы $\widetilde{c}$ в (171), тогда *для любого* уровня U справедливо тождество равновесия (178) при $\lambda = \beta$. Следовательно,

$$(\mathbf{E}e^{\beta\xi_U(U)}-1)e^{\beta U}\pi(-\infty,U] \ = \ \int_{U+0}^\infty (1-\mathbf{E}e^{\beta\xi_U(u)})e^{\beta u}\pi(du). \qquad (179)$$

По определению переходных вероятностей P_U выражение в левой части тождества равно

$$e^{\beta U}\int_{-\infty}^U \mathbf{E}\max\{0, e^{\beta(u+\xi(u)-U)}-1\}\pi(du).$$

Поскольку $\xi(u)\Rightarrow\xi$, найдутся $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что при всех достаточно больших U выполняется $\mathbf{E}\max\{0,e^{\beta(u+\xi(u)-U)}-1\}\geqslant\delta$ для любого $u\in(U-\varepsilon,U]$ и, соответственно,

$$(\mathbf{E}e^{\beta\xi_U(U)}-1)e^{\beta U}\pi(-\infty,U] \ \geqslant \ \delta e^{\beta U}\pi(U-\varepsilon,U]. \qquad (180)$$

В силу (176) и условий теоремы правая часть (179) не превосходит

$$\int_{U+0}^\infty \gamma(y)e^{\beta y}\pi(dy) \ \leqslant \ \overline{c}\int_{U+1}^\infty \gamma(y)dy \qquad (181)$$

при некотором $\overline{c}<\infty$. Подставляя (180) и (181) в (179), приходим к неравенству

$$e^{\beta U}\pi(U-\varepsilon,U] \ \leqslant \ \frac{\overline{c}}{\delta}\int_{U+1}^\infty \gamma(y)dy. \qquad (182)$$

Поскольку это верно для всех достаточно больших U, отсюда в силу условия (174) вытекает конечность экспоненциального момента с показателем β распределения π, что противоречит (175). Таким образом, предположение $c=0$ привело к противоречию и теорема доказана.

Условие (174) можно существенно ослабить, наложив более сильные моментные ограничения на скачки цепи X_n. Если, например, цепь имеет ограниченные скачки, т. е. если найдётся постоянная $A < \infty$ такая, что $|\xi(y)| \leqslant A$ почти наверное для любого y, то достаточно выполнения условия

$$\int_0^\infty \gamma(y) y^\mu \, dy \;<\; \infty. \tag{183}$$

для некоторого $\mu > 0$. Для доказательства заметим, что в этом случае

$$\int_1^\infty \frac{e^{\beta u}}{u^{1-\mu}} \pi(du) \;=\; \infty. \tag{184}$$

Действительно, поскольку средний снос $v_\lambda(y) \equiv \mathbf{E} V_\lambda(y+\xi(y)) - V_\lambda(y)$ пробной функции $V_\lambda(y) = e^{\lambda y} y^{\mu-1} \mathbf{I}\{y > 1\}$ при $y > 1 + A$ равен

$$\frac{e^{\lambda y}}{y^{1-\mu}} \left(\mathbf{E} e^{\lambda \xi(y)} \left(\frac{1}{1 + \xi(y)/y} \right)^{1-\mu} - 1 \right),$$

то при условии ограниченности скачков имеем при $y \to \infty$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dv_\lambda(y)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\beta} \;&=\; \frac{y e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \left(\mathbf{E} e^{\beta\xi(y)} - 1 - \frac{1-\mu}{y} \mathbf{E} \xi(y) e^{\beta\xi(y)} + O(1/y^2) \right) \\
&\qquad + \frac{e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \Big(\mathbf{E} \xi(y) e^{\beta\xi(y)} + O(1/y) \Big) \\
&=\; \frac{y e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \left(o(1/y) - \frac{1-\mu}{y} \mathbf{E} \xi e^{\beta\xi} + O(1/y^2) \right) \\
&\qquad + \frac{e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \Big(\mathbf{E} \xi e^{\beta\xi} + O(1/y) \Big) \\
&=\; \frac{e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \Big(o(1) + \mu \mathbf{E} \xi e^{\beta\xi} \Big),
\end{aligned}$$

что есть величина положительная при больших y. Как отмечалось в предыдущем доказательстве, этого достаточно для проверки (184). Далее, умножая (182) на $U^{\mu-1}$ и суммируя, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{\beta(U+k\varepsilon)}}{(U+k\varepsilon)^{1-\mu}} \pi(U+(k-1)\varepsilon, U+k\varepsilon] \;&\leqslant\; \frac{\overline{c}}{\delta} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(U+k\varepsilon)^{1-\mu}} \int_{U+k\varepsilon+1}^\infty \gamma(y) dy \\
&\leqslant\; c^* \int_U^\infty \gamma(y) y^\mu dy
\end{aligned}$$

при некотором $c^* < \infty$. В силу условия (183) это влечёт конечность интеграла в (184). Данное противоречие и завершает доказательство.

§ 24. О необходимости условия интегрируемости скорости сближения распределения скачка с предельным

В заключение мы построим пример цепи Маркова, показывающий, что условие (147), относящееся к скорости сходимости распределения скачка к предельному распределению F, существенно до такой степени, что может считаться практически необходимым.

Рассмотрим цепь Маркова X_n со значениями в $\mathbf{Z}^+$. Предполагаем, что цепь непрерывна как сверху, так и снизу, т. е. за один шаг значение цепи меняется не более чем на единицу. Обозначим

$$\begin{aligned} p(k,k-1) &\equiv \mathbf{P}\{X_{n+1}=k-1|X_n=k\}, \quad k \geqslant 1, \\ p(k,k+1) &\equiv \mathbf{P}\{X_{n+1}=k+1|X_n=k\}, \quad k \geqslant 0, \\ p(0,0) &\equiv \mathbf{P}\{X_{n+1}=0|X_n=0\}. \end{aligned}$$

Предполагаем, что

$$p(k,k-1)+p(k,k+1) = 1, \quad p(0,0)+p(0,1)=1,$$

а также, что

$$\text{ряд} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{p(j,j+1)}{p(j+1,j)} \quad \text{сходится.}$$

Известно (см., например, [67, гл. 3, § 7]), что последнее условие необходимо и достаточно для эргодичности такой цепи. Обозначим через $\{\pi(k),\ k\in\mathbf{Z}^+\}$ стационарные вероятности этой цепи. Особая простота системы уравнений

$$\pi(k+1)p(k+1,k)+\pi(k-1)p(k-1,k) = \pi(k), \quad k \geqslant 1,$$

$$\begin{aligned} \pi(1)p(1,0) + \pi(0)p(0,0) &= \pi(0), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) &= 1 \end{aligned}$$

для стационарных вероятностей $\{\pi(k)\}$ позволяет вычислить последние в явном виде (см. также [67, гл. 3, § 7]):

$$\pi(k) = \pi(0) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p(j,j+1)}{p(j+1,j)}, \quad k \geqslant 1,$$

где

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p(j,j+1)}{p(j+1,j)}\right)^{-1}.$$

Пусть $p(k,k+1) \to p$ и, соответственно, $p(k,k-1) \to 1-p$ при $k \to \infty$, так что предельное распределение F есть распределение Бернулли с параметром p, а преобразование Лапласа равно

$$\varphi(\lambda) = pe^{\lambda} + (1-p)e^{-\lambda}.$$

Чтобы цепь была эргодичной, предполагаем, что $p < 1/2$. Единственное ненулевое решение β уравнения $\varphi(\lambda) = 1$ имеет вид

$$\beta = \ln \frac{1-p}{p} > 0.$$

В сделанных предположениях условие (147) интегрируемости скорости сходимости к предельному распределению для построенной цепи эквивалентно тому, что

$$\text{ряд} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |p(k) - p| \quad \text{сходится.} \tag{185}$$

Справедлива следующая

Теорема 22. *Пусть* $\varepsilon(k) \equiv p(k,k+1) - p \geqslant 0$ *для любого* k. *Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(а) *найдётся такое $c > 0$, что стационарные вероятности имеют асимптотику*

$$\pi(k) \ \sim \ ce^{-\beta k} \quad \text{при } k \to \infty;$$

(б) *выполнено условие* (185).

Доказательство. Имеем равенства

$$\begin{aligned} \pi(k) &= \pi(0) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p + \varepsilon(j)}{1 - p - \varepsilon(j+1)} \\ &= \pi(0) \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 + \frac{\varepsilon(j)}{p}}{1 - \frac{\varepsilon(j+1)}{1-p}}. \end{aligned}$$

Учитывая определение β, получаем

$$\pi(k) \ = \ \pi(0) e^{-\beta k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 + \frac{\varepsilon(j)}{p}}{1 - \frac{\varepsilon(j+1)}{1-p}}.$$

Поэтому утверждение (а) теоремы эквивалентно тому, что

$$\text{произведение } \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{\varepsilon(j)}{p}}{1 - \frac{\varepsilon(j+1)}{1-p}} \text{ сходится.}$$

В свою очередь, для этого необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{\varepsilon(j)}{p}}{1 - \frac{\varepsilon(j+1)}{1-p}} - 1 \right) \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon(j)}{p} + \frac{\varepsilon(j+1)}{1-p}}{1 - \frac{\varepsilon(j+1)}{1-p}}$$

сходился. Поскольку $\varepsilon(j) \to 0$, это эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon(j+1)}{1-p} + \frac{\varepsilon(j)}{p} \right),$$

что, в свою очередь, эквивалентно (185). Теорема доказана.

ГЛАВА III

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается однородная во времени эргодическая цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой, имеющая асимптотически однородные на бесконечности скачки. Предполагается, что распределение «предельного» скачка ξ цепи $\{X_n\}$ имеет отрицательное среднее значение и имеет тяжёлый хвост, т. е.

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi} = \infty \quad \text{для любого } \lambda > 0.$$

Изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{X_n > x\}$ при n, $x \to \infty$.

В § 25 обсуждается асимптотика хвоста распределения супремума при конечном отрицательном среднем значении слагаемых.

В § 26–29 исследуется асимптотика хвоста распределения супремума при бесконечном среднем значении слагаемых. § 30 посвящён достаточным условиям субэкспоненциальности распределения интегральнго взвешанного хвоста.

Локальным свойствам субэкспоненциальных распределений посвящены параграфы 31—36. В том числе приводятся свойства субэкспоненциальных плотностей.

Равномерная по времени n асимптотика частичных максимумов сумм независимых одинаково распределённых слагаемых с отрицательным средним рассматривается в параграфах 37—41.

Те же вопросы для асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова обсуждаются в параграфах 42—44. В частности, выделяются зоны значений времени n, в которых вероятности больших уклонений асимптотически эквивалентны хвосту стационарного распределения.

В заключение в параграфах 45–48 проводится асимптотический анализ случайных блужданий с зависимыми приращениями в случае тяжёлых хвостов. Рассматривается модель, когда слагаемые в суммах представляют собой процесс скользящих средних.

§ 25. Асимптотика супремума случайного блуждания

Пусть, как и прежде, ξ_1, ξ_2, $\ldots$ — независимые случайные величины с общим распределением F на $(-\infty, \infty)$ таким, что $F(-\infty, 0] < 1$. Обозначим функцию распределения через $F(x) = F(-\infty, x]$ и хвост распределения через $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, и

$$M = \sup\{S_n, n \geqslant 0\}.$$

Предполагаем, что среднее $\mathbf{E}\max(0, \xi_1)$ существует и $a = \mathbf{E}\xi_1 \in [-\infty, 0)$; ввиду этого условия S_n уходит на $-\infty$ и, соответственно, M конечно почти наверное.

Рассматриваем случай тяжёлого хвоста, когда $\beta = 0$. Хорошо известно, что асимптотическое поведение $\mathbf{P}\{M > x\}$ в этом случае существенно отличается от поведения в крамеровском случае. Чтобы сформулировать соответствующие теоремы, нам потребуются следующие определения.

Определение 4. Будем говорить, что функция f имеет *длинный хвост*, если $f(x) > 0$ для всех достаточно больших x, и для любого фиксированного t предел отношения $f(x+t)/f(x)$ равен 1 при $x \to \infty$. Говорим, что распределение G имеет длинный хвост (и пишем $G \in \mathscr{L}$), если функция $\overline{G}(x)$ имеет длинный хвост.

Определение 5. Распределение G в $\mathbf{R}^+$ с неограниченным носителем принадлежит классу $\mathscr{S}$ и называется *субэкспоненциальным распределением*, если хвост свёртки $\overline{G*G}(x)$ асмптотически эквивалентен $2\overline{G}(x)$ при $x \to \infty$. Эквивалентно, $\mathbf{P}\{\eta_1 + \eta_2 > x\} \sim 2\mathbf{P}\{\eta_1 > x\}$, где независимые случайные величины η_1 и η_2 имеют распределение G.

В работе [30] показано, что любое субэкспоненциальное распределение G с необходимостью имеет длинный хвост. В частности, если распределение случайной величины $\xi_1 \mathbf{I}\{\xi_1 \geqslant 0\}$ субэкспоненциальное, то $\beta = 0$.

Условия, достаточные для принадлежности распределения классу $\mathscr{S}$, можно найти, например, в [30, 68, 82]. Класс $\mathscr{S}$ содержит, в частности, следующие распределения в $[0, \infty)$:

(i) любое распределение G с хвостом $\overline{G}(x)$, являющимся правильно меняющейся на бесконечности с показателем $\alpha < 0$ функцией, т. е. если для любого фиксированного $t > 0$ при $x \to \infty$ справедлива эквивалентность

$$\overline{G}(xt) \ \sim \ t^\alpha \overline{G}(x); \tag{186}$$

(ii) логнормальное распределение с плотностью

$$e^{-(\ln x - \ln \alpha)^2/2\sigma^2}/x\sqrt{2\pi\sigma^2}, \quad \alpha > 0; \tag{187}$$

(iii) распределение Вэйбулла с хвостом

$$\overline{G}(x) \ = \ e^{-x^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{188}$$

Определение 6. Определим *распределение интегрального хвоста* F_I в $[0, \infty)$ следующим равенством для хвоста:

$$\overline{F}_I(x) \ = \ \min\Big(1, \int_x^\infty \overline{F}(t)dt\Big), \quad x > 0.$$

Так как в нашей ситуации $\mathbf{E}\max(0, \xi_1)$ существует, то распределение F_I корректно определено.

Теорема 23. (А) *Если $a \neq -\infty$, то следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) *$\beta = 0$ и распределение F_I субэкспоненциально;*

(ii) $\mathbf{P}\{M > x\} \sim |a|^{-1}\overline{F}_I(x)$ *при $x \to \infty$.*

(Б) *Если $\beta = 0$, распределение F_I субэкспоненциально и $a = -\infty$, то*

$$\mathbf{P}\{M > x\} = o(\overline{F}_I(x)) \text{ при } x \to \infty. \tag{189}$$

(В) *Если распределение F_I имеет неограниченный носитель и справедливо* (189), *то $\beta = 0$ и $a = -\infty$.*

Заметим, что если распределение случайной величины $\xi_1\mathbf{I}\{\xi_1 \geqslant 0\}$ принадлежит $\mathscr{S}$, то интегральное распределение F_I не обязательно субэкспоненциально, см. [97]. Также субэкпоненциальность F_I не влечёт, вообще говоря, аналогичное свойство для распределения $\xi_1\mathbf{I}\{\xi_1 \geqslant 0\}$. Действительно, хвост распределения F с атомами $3/4^k$ в точках 2^k, $k = 1, 2, \ldots$, не является длинным и, следовательно, по теореме 2 [30] $F \notin \mathscr{S}$. Тем не менее, соответствующее распределение F_I субэкспоненциально.

Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) в случае так называемых надстепенных распределений доказана в [1, § 22]; в сформулированных условиях она доказана в [84]. Импликация (ii)$\Rightarrow$(i) доказана в [58, следствие 6.1] и [76, теорема 1] в случае, когда случайная величина ξ_1 является разностью двух независимых случайных величин $\xi_1 = \eta - \zeta$, где ζ имеет экспоненциальное распределение, а $\eta \geqslant 0$.

Доказательство импликации (ii)$\Rightarrow$(i). Положим $\tau \equiv \min\{n \geqslant 1 : S_n > 0\}$ и $\chi = S_\tau$. Так как $a < 0$, то τ и χ — две дефектные случайные величины. Обозначим $p \equiv \mathbf{P}\{M > 0\}$. Пусть $\widetilde{\chi}$ — случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} \in B\} \equiv \mathbf{P}\{\chi \in B | \tau < \infty\} = p^{-1}\mathbf{P}\{\chi \in B\}.$$

Известно (см. [29, глава XII], [1, § 22]), что хвост распределения супремума M в точке $x > 0$ может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{P}\{M > x\} = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} p^k \mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1 + \dots + \widetilde{\chi}_k > x\}, \tag{190}$$

где случайные величины $\widetilde{\chi}_i$ суть независимые копии $\widetilde{\chi}$.

Поскольку (см. [30])

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1 + \dots + \widetilde{\chi}_k > x\}}{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}} \ \geqslant \ k$$

и (см. [1, § 22, теорема 10.II])

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\} \ \geqslant \ \frac{1-p}{p|a|}\overline{F}_I(x), \tag{191}$$

то (190) влечёт неравенство

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M > x\}}{\frac{1}{|a|}\overline{F}_I(x)} \ &\geqslant \ \frac{1-p}{p} \limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M > x\}}{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}} \\
&\geqslant \ \frac{(1-p)^2}{p} \sum_{k\neq 2} p^k k + (1-p)^2 p \limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1 + \widetilde{\chi}_2 > x\}}{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}} \\
&= \ 1 + (1-p)^2 p \left(\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1 + \widetilde{\chi}_2 > x\}}{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}} - 2 \right).
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и эквивалентности (ii) вытекает оценка

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1 + \widetilde{\chi}_2 > x\}}{\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}} \ \leqslant \ 2,$$

которая влечёт $\widetilde{\chi} \in \mathscr{S}$. В частности (см. теорему 2 в [30]), функция $\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}$ имеет длинный хвост. Тогда по теореме 10.IV из [1, § 22] справедлива эквивалентность $\overline{F}_I(x) \sim \widetilde{c}\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\}$. Отсюда и ввиду свойства $\widetilde{\chi} \in \mathscr{S}$, из леммы 2 [76] следует, что $F_I \in \mathscr{S}$.

Доказательство (B) вытекает из импликации (i)$\Rightarrow$(ii) и стандартных аргументов, связанных со срезками.

Доказательство (C). Из (189) и из неравенства $M \geqslant \xi_1$ вытекает соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 > x\} \;=\; o(\overline{F}_I(x)) \text{ при } x \to \infty.$$

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся x_0 такое, что

$$\overline{F}(x) \;\leqslant\; \varepsilon \overline{F}_I(x)$$

для любого $x \geqslant x_0$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \ln \overline{F}_I(x) \;\geqslant\; -\varepsilon,$$

откуда вытекает

$$\overline{F}_I(x) \;\geqslant\; c e^{-\varepsilon x}$$

для некоторого $c > 0$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то $\beta = 0$.

Предположим, что $a \neq -\infty$. Тогда имеет место (191). Подставляя неравенство (191) в (190), заключаем, что

$$\mathbf{P}\{M > x\} \;\geqslant\; c\overline{F}_I(x)$$

для некоторого $c > 0$. Приходим к противоречию. Следовательно, $a = -\infty$. Доказательство теоремы завершено.

Изложение в нвстоящем параграфе следует работе [88]. Случай бесконечного среднего одного слагаемого будет рассмотрен более подробно в следующих параграфах.

§ 26. Асимптотика хвоста супремума случайного блуждания когда среднее скачков не является конечным

В настоящем параграфе мы не предполагаем конечность среднего значения ξ_1. Накладывая условия субэкспоненциального типа на распределение слагаемых, мы изучаем асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{M > x\}$ при $x \to \infty$ при условии, что $M = \sup\{S_n,\ n \geqslant 0\}$ является собственной случайной величиной. Особое внимание уделяется случаю хвостов, правильно меняющихся на бесконечности.

26.1. Условия конечности супремума частичных сумм. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с общим невырожденным распределением F на действительной прямой $\mathbf{R}$. Важную роль в настоящем параграфе играет так называемая функция *отрицательного срезанного среднего значения*

$$m(x) \ \equiv\ \mathbf{E}\min\{\xi^-, x\} = \int_0^x \mathbf{P}\{\xi^- > y\}\, dy, \quad x \geqslant 0,$$

где $\xi^- = \max\{-\xi, 0\}$; функция $m(x)$ непрерывна, $m(0) = 0$ и $m(x) > 0$ для любого $x > 0$.

Основное предположение состоит в том, что супремум M конечен почти наверное. Это происходит тогда и только тогда, когда $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1 (см. теорему 1 в [29, гл. XII, § 2]). Известно, что

(i) если $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, то $S_n \to -\infty$ почти наверное при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi < 0$;

(ii) если $\mathbf{E}|\xi| = \infty$, то $S_n \to -\infty$ почти наверное при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty \frac{x}{m(x)}\, F(dx) \ \text{ конечно}, \tag{192}$$

см. следствие 1 в [60]. Заметим что функция $\frac{x}{m(x)}$ возрастает, так как

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{m(x)} \ =\ \frac{m(x) - xm'(x)}{m^2(x)} = \frac{m(x) - x\mathbf{P}\{\xi^- > x\}}{m^2(x)} \geqslant 0. \tag{193}$$

В случае (ii) с необходимостью $m(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Грубо говоря, условие (192) означает, что правый хвост распределения F легче левого хвоста.

Основная цель настоящей работы — изучить асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{M > x\}$ при $x \to \infty$ в случае тяжёлых хвостов распределения слагаемых.

26.2. Формулировки теорем в случае бесконечного среднего слагаемых. Как уже отмечалось в теореме 23, если среднее $\mathbf{E}\xi = -a$ является конечным отрицательным числом и распределение интегрального хвоста F_I,

$$\overline{F_I}(x) = \min\Big(1, \int_0^\infty \overline{F}(x+u)\,du\Big), \quad x > 0, \tag{194}$$

является субэкспоненциальным, то хвост распределения максимума сумм эквивалентен с точностью до константы интегральному хвосту распределения одного слагаемого; верно также и обратное: если имеет место соответствующая эквивалентность, то распределение интегрального хвоста F_I является субэкспоненциальным.

В настоящем параграфе рассматривается случай когда ξ_1 имеет бесконечное среднее значение. В этом случае следует предполагать, что $\mathbf{E}\xi^- = \infty$, иначе $M = \infty$. Если не предполагать ничего более, то мы можем сформулировать и доказать лишь оценки снизу и сверху.

Теорема 24. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Пусть распределение* F *имеет длинный хвост, а распределение* G_1 *с хвостом*

$$\overline{G}_1(x) \ = \ \min\Big(1, \int_0^\infty \overline{F}(x+t)\,d\frac{t}{m(t)}\Big) \tag{195}$$

является субэкспоненциальным. Тогда имеют место следующие оценки:

$$1 \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M > x\}}{\overline{G}_1(x)} \ \leqslant \ \limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M > x\}}{\overline{G}_1(x)} \leqslant 2.$$

В случае когда функция $m(x)$ правильно меняется на бесконечности можно получить точные асимптотики (через Γ обозначается *гамма-функция*):

Теорема 25. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Пусть* $m(x)$ *является правильно меняющейся на бесконечности с параметром* $1-\alpha \in [0,1]$ *функцией. Если распределение* F *имеет длинный хвост, а распределение* G_1 *с хвостом* (195) *является субэкспоненциальным, то*

$$\mathbf{P}\{M > x\} \sim \frac{\overline{G}_1(x)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{196}$$

Если $\alpha \in (0,1]$, *то условие субэкспоненциальности* G_1 *может быть заменено на условие субэкспоненциальности распределения* G_2 *с хвостом*

$$\overline{G}_2(x) = \min\Bigl(1, \int_1^\infty \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)}\,dt\Bigr), \tag{197}$$

и при этом

$$\mathbf{P}\{M > x\} \sim \frac{\overline{G}_2(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{198}$$

Доказательства теорем 24 и 25 содержатся в § 29. Теорема 25 даёт ответ на некоторые вопросы о поведении максимума сумм независимых случайных величин, поднятых Е. Б. Дынкиным в [20, § 7]. Некоторые аналогичные результаты для процессов Леви можно найти в [70].

И хвост (195), и хвост (197) легче интегрального хвоста $\overline{F_I}$ (когда последний существует).

Если и хвост $\overline{F}(t)$, и функция $m(t)$ являются правильно меняющимися на бесконечности функциями, то можно уточнить утверждение теоремы 25 следующим образом (соответствующие вычисления проделаны в § 29):

Следствие 9. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Пусть* $\overline{F}(t) = t^{-\beta}L^*(t)$ *и* $m(t) = t^{1-\alpha}L_*(t)$, *где функции* $L^*(t)$ *и* $L_*(t)$ *медленно меняются на бесконечности,* $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha \leqslant \beta$. *Если* $\alpha < \beta$, *то*

$$\mathbf{P}\{M > x\} \sim \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\alpha)} \frac{x\overline{F}(x)}{m(x)}. \tag{199}$$

Если $\alpha = \beta$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{M > x\} &\sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \int_x^\infty \frac{\overline{F}(t)}{m(t)}\,dt \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \int_x^\infty \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt. \end{aligned} \tag{200}$$

З а м е ч а н и е 11. Пусть $\alpha \in [0,1)$ и $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда $m(x) \sim x^{1-\alpha}L(x)$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда $F(-x) \sim (1-\alpha)x^{-\alpha}L(x)$ (см. [29, гл. XIII, § 5]).

Асимптотическая эквивалентность типа (199) при $\alpha \in (0,1)$, $\alpha < \beta$ установлено в [44, теорема 4.1] другими методами и при некоторых дополнительных технических предположениях. Что касается (200), заметим, что для любого фиксированного $A > 0$

$$\int_x^\infty \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt \sim \int_{Ax}^\infty \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt \quad \text{при } x \to \infty,$$

поскольку в силу равномерной теоремы сходимости для правильно меняющихся функций (см. теорему 1.5.2 в [43]) и ввиду теоремы Карамата (см. предложение 1.5.9b в [43])

$$\int_x^{Ax} \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt \sim \frac{L^*(x)}{L_*(x)}\ln A = o\biggl(\int_x^\infty \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt\biggr). \tag{201}$$

В § 30 приводятся условия, достаточные для субэкспоненциальности распределений (195) и (197). В частности, G_1 и G_2 являются субэкспоненциальными распределениями, если F — распределение Парето, логнормальное или Вэйбулла. Однако в общем случае одна лишь субэкспоненциальность F не влечёт субэкспоненциальность G_1 и G_2 (см. § 6 в работе [97]).

Работа организована следующим образом. В § 27 и 28 доказываются некоторые вспомогательные результаты, касающиеся первых убывающих и возрастающих лестничных высот случайного блуждания. В § 29 доказываются теоремы, относящиеся к асимптотическому поведению вероятности $\mathbf{P}\{M >$

$x\}$. Достаточные условия субэкспоненциальности распределений (195) и (197) можно найти в § 30.

§ 27. Асимптотики и оценки для первой убывающей лестничной высоты в случае бесконечного среднего

Пусть $\eta_* = \min\{n \geqslant 1 : S_n \leqslant 0\}$ — первый убывающий лестничный момент (полагаем $\min\varnothing = \infty$) и $\chi_* = -S_{\eta_*}$ — соответствующая убывающая лестничная высота. Так как M конечно, то η_* и χ_* — собственные случайные величины. Более того (см., например, теорему 2.3(c) в [32, гл. VII]), $\mathbf{E}\eta_* < \infty$ и

$$p \equiv \mathbf{P}\{M = 0\} \;=\; 1/\mathbf{E}\eta_*. \tag{202}$$

Для момента остановки η_* имеем тождество Вальда $\mathbf{E}\chi_* = -\mathbf{E}\eta_*\mathbf{E}\xi$ при условии, что среднее значение ξ конечно и отрицательно (см. теорему 2(ii) в [29, гл. XII, § 2]). В нашем анализе, относящемся к случаю бесконечного среднего, ключевую роль играет следующий аналог этого тождества:

Лемма 22. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Тогда*

$$\frac{\mathbf{E}\min\{\chi_*, x\}}{m(x)} \;\to\; \mathbf{E}\eta_* \quad \text{при } x \to \infty. \tag{203}$$

Кроме того, для любого $x \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\min\{\chi_*, x\} \;\leqslant\; m(x)\mathbf{E}\eta_*. \tag{204}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим меру восстановления с запретами в $\mathbf{R}$

$$H^*(B) \;=\; \mathbf{I}\{0 \in B\} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{S_1 > 0,\ \ldots,\ S_n > 0,\ S_n \in B\}.$$

Эта мера конечна, поскольку $H^*(-\infty,0)=0$ и

$$\begin{aligned}
H^*[0,\infty) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{S_1>0,\ \ldots,\ S_n>0\}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\eta_*>n\}=\mathbf{E}\eta_*<\infty.
\end{aligned}\tag{205}$$

По формуле полной вероятности для любого $u\leqslant 0$

$$\mathbf{P}\{-\chi_*\leqslant u\} = \int_0^\infty F(u-t)H^*(dt).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E}\min\{\chi_*,\,x\}}{m(x)} &= \frac{1}{m(x)}\int_0^x \mathbf{P}\{\chi_*\geqslant u\}du\\
&= \frac{1}{m(x)}\int_0^x\int_0^\infty F(-u-t)\,H^*(dt)\,du\\
&= \int_0^\infty \frac{m(x+t)-m(t)}{m(x)}\,H^*(dt).
\end{aligned}\tag{206}$$

Для любого фиксированного $z\geqslant 0$ функция $\min\{z,x\}$ вогнута при $x>0$. Поэтому функция $m(x)=\mathbf{E}\min\{\xi^-,x\}$ также вогнута. В частности, функция $m(x)$ имеет длиный хвост. Принимая также во внимание, что $m(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, (поскольку $\mathbf{E}\xi^-=\infty$), выводим для любого фиксированного $t\geqslant 0$ сходимость

$$\frac{m(x+t)-m(t)}{m(x)} \ \to\ 1 \quad \text{при } x\to\infty.$$

В силу $m(0)=0$ и вогнутости $m(x)$ имеем

$$\frac{m(x+t)-m(t)}{m(x)}=\frac{m(x+t)-m(t)}{m(x)-m(0)} \ \leqslant\ 1.\tag{207}$$

Применяя теперь теорему о можорируемой сходимости к конечной мере H^*, получаем при $x\to\infty$ следующую сходимость интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{m(x+t)-m(t)}{m(x)}\,H^*(dt) \ \to\ \int_0^\infty H^*(dt)=H^*[0,\infty)=\mathbf{E}\eta_*,$$

ввиду (205). Вместе с (206) это влечёт сходимость (203). Неравенство (204) следует из (207) и (206). Доказательство завершено.

Пусть χ_{*1}, χ_{*2}, ... — независимые копии χ_*. Определим меру восстановления на $\mathbf{R}^+$ равенством

$$H_*(B) \;\equiv\; \mathbf{I}\{0\in B\}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\chi_{*1}+\dots+\chi_{*n}\in B\}.$$

Если $\mathbf{E}\xi$ конечно и отрицательно, то по основной теореме восстановления $H_*[0,x]\sim x\mathbf{E}\chi_*$ при $x\to\infty$. Если же $\mathbf{E}\xi$ бесконечно, то без дополнительных предположений нам известны лишь оценки снизу и сверху:

Лемма 23 (см. [60, лемма 1] или [43, § 8.6.3]). *Без каких-либо дополнительных предположений, для всякого $x\geqslant 0$ справедливы неравенства*

$$\frac{x}{\mathbf{E}\min\{\chi_*,x\}}\leqslant H_*[0,x]\leqslant\frac{2x}{\mathbf{E}\min\{\chi_*,x\}}.$$

Однако в случае правильно изменяющихся хвостов асимптотическое поведение $H_*[0,x]$ известно:

Лемма 24 (см. [59, Theorem 5]). *Если функция $\mathbf{E}\min\{\chi_*,x\}$ правильно меняется на бесконечности с показателем $1-\alpha$, $\alpha\in[0,1]$, то $H_*[0,x]$ также правильно меняется на бесконечности с показателем α и*

$$H_*[0,x]\sim\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\cdot\frac{x}{\mathbf{E}\min\{\chi_*,x\}}\quad\text{\textit{при}}\ \ x\to\infty.$$

Используя лемму 22 и равенство (202), получаем из лемм 23 и 24 следующие следствия.

Следствие 10. *Предположим что $\mathbf{E}\xi^-=\infty$ и выполнено условие* (192). *Тогда*

$$p\leqslant\liminf_{x\to\infty}\frac{H_*[0,x]m(x)}{x}\;\leqslant\;\limsup_{x\to\infty}\frac{H_*[0,x]m(x)}{x}\leqslant 2p.$$

Следствие 11. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Если* $m(x)$ *правильно меняется на бесконечности с показателем* $1-\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, *то при* $x \to \infty$

$$H_*[0,x] \;\sim\; \frac{p}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{x}{m(x)}.$$

§ 28. Асимптотики и оценки для первой возрастающей лестничной высоты в случае бесконечного среднего

Пусть $\eta^* = \min\{n \geqslant 1 : S_n > 0\}$ — первый возрастающий лестничный момент и $\chi^* = S_{\eta^*}$ — соответствующая первая лестничная высота. Так как M конечна почти наверное, то η^* и χ^* — дефективные случайные величины, т. е. $\mathbf{P}\{\eta^* < \infty\} = 1 - p$ ввиду (202).

Основой нашего анализа распределения χ^* является следующее представление (см. [29, гл. XII, § 3]):

$$\mathbf{P}\{\chi^* > x\} \;=\; \int_0^\infty \overline{F}(x+t)\, H_*(dt). \tag{208}$$

Лемма 25. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Если распределение* F *имеет длинный хвост, то для любого фиксированного* $T \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\chi^* > x\} \;\sim\; \int_{x+T}^\infty H_*[0,t-x]\, F(dt) \qquad \textit{при } x \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как F имеет длинный хвост и $H_*[0,\infty) = \infty$, то

$$\overline{F}(x) \;=\; o\left(\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\, H_*(dt)\right) \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{209}$$

Интегрируя (208) по частям, получаем

$$\mathbf{P}\{\chi^* > x\} \;=\; \overline{F}(x+t)H_*[0,t]\Big|_0^\infty + \int_x^\infty H_*[0,t-x]\, d_tF(t). \tag{210}$$

Используя верхнюю оценку из следствия 10, получаем для достаточно больших t

$$\overline{F}(x+t)H_*[0,t] \ \leqslant\ \overline{F}(t)H_*[0,t] \leqslant 3p\overline{F}(t)\frac{t}{m(t)} = 3p\int_t^\infty \frac{t}{m(t)}\,F(ds).$$

Поскольку функция $\frac{x}{m(x)}$ возрастает (см. (193)), то

$$\overline{F}(x+t)H_*[0,t] \ \leqslant\ 3p\int_t^\infty \frac{s}{m(s)}\,F(ds) \to 0 \quad \text{при } t\to\infty,$$

ввиду условия (192). Подставляя это в (210), приходим к неравенству (напомним, что $H_*\{0\}=1$)

$$\mathbf{P}\{\chi^* > x\} \ =\ -\overline{F}(x) + \int_x^\infty H_*[0,t-x]\,F(dt).$$

Применяя теперь соотношение (209), выводим эквивалентность леммы.

Таким же образом получаем следующую

Лемма 26. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Если распределение* F *имеет длинный хвост, то для любого фиксированного* $T \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\,d\frac{t}{m(t)} \ \sim\ \int_{x+T}^\infty \frac{t-x}{m(t-x)}\,F(dt) \quad \textit{при } x\to\infty.$$

Лемма 27. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Если распределение* F *имеет длинный хвост, то*

$$p \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\chi^*>x\}}{\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\,d\frac{t}{m(t)}} \ \leqslant\ \limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\chi^*>x\}}{\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\,d\frac{t}{m(t)}} \leqslant 2p.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из следствия 10 вытекает существование такого $T>0$, что при $t>T$

$$(p-\varepsilon)\frac{t}{m(t)} \leqslant H_*[0,t] \ \leqslant\ (2p+\varepsilon)\frac{t}{m(t)}.$$

Применяя лемму 25, получаем для достаточно больших x

$$(p-2\varepsilon)\int_{x+T}^{\infty}\frac{t-x}{m(t-x)}\,F(dt)\leqslant \mathbf{P}\{\chi^*>x\}\ \leqslant\ (2p+2\varepsilon)\int_{x+T}^{\infty}\frac{t-x}{m(t-x)}\,F(dt).$$

Асимптотическая эквивалентность леммы 26 завершает доказательство, поскольку $\varepsilon>0$ выбрано произвольным образом.

Использование леммы 11 вместо следствия 10 позволяет вывести следующую лемму.

Лемма 28. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^-=\infty$ *и выполнено условие* (192). *Пусть функция* $m(x)$ *правильно меняется на бесконечности с показателем* $1-\alpha$, $\alpha\in[0,1]$. *Если распределение* F *имеет длинный хвост, то*

$$\mathbf{P}\{\chi^*>x\}\ \sim\ \frac{p}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{\infty}\overline{F}(x+t)\,d\frac{t}{m(t)}\qquad \text{при } x\to\infty.$$

Доказательство. Из следствия 11 вытекает, что найдётся $T>0$ такое, что при $t>T$

$$\frac{p-\varepsilon}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\cdot\frac{t}{m(t)}\leqslant H_*[0,t]\ \leqslant\ \frac{p+\varepsilon}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\cdot\frac{t}{m(t)}.$$

В силу леммы 25 для достаточно больших значений x

$$\frac{p-2\varepsilon}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\int_{x+T}^{\infty}\frac{t-x}{m(t-x)}\,F(dt)\ \leqslant\ \mathbf{P}\{\chi^*>x\}$$
$$\leqslant\frac{p+2\varepsilon}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\int_{x+T}^{\infty}\frac{t-x}{m(t-x)}\,F(dt).$$

Применение леммы 26 завершает доказательство.

§ 29. Асимптотики и оценки для хвоста распределения супремума

Начнём с общей теоремы, описывающей поведение хвоста супремума в терминах меры восстановления H_*.

Теорема 26. *Предположим что* $\mathbf{E}\xi^- = \infty$ *и выполнено условие* (192). *Пусть распределение* F *имеет длинный хвост, а распределение* G *с хвостом*

$$\overline{G}(x) \;=\; \min\left(1, \int_0^\infty \overline{F}(x+t)\, d\frac{t}{m(t)}\right)$$

является субэкспоненциальным. Тогда при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\{M > x\} \;\sim\; \frac{1}{p}\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\, H_*(dt).$$

Доказательство. Рассмотрим распределение G_H с хвостом

$$\overline{G_H}(x) \;=\; \min\left(1, \int_0^\infty \overline{F}(x+t)\, H_*(dt)\right).$$

Это распределения имеет длинный хвост, так как F имеет длинный хвост. Кроме того, в силу леммы 27 хвост распределения G_H асимптотически заключён между субэкспоненциальными хвостами $p\overline{G}$ и $2p\overline{G}$. Следовательно, по свойству слабой эквивалентности (см. теорему 2.1 в [68] или лемму 1 в [94]) распределение G_H является субэкспоненциальным.

Определим собственную случайную величину $\widetilde{\chi}$ с распределением в $(0,\infty)$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi} \in B\} \;=\; \frac{\mathbf{P}\{\chi^* \in B\}}{1-p}.$$

Распределение $\widetilde{\chi}$ субэкспоненциально. Пусть $\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \ldots$ — независимые копии случайной величины $\widetilde{\chi}$. Заметим, что найдётся $i \geqslant 1$ такое, что S_i превышает уровень x в том и только том случае, когда одна из лестничных высот превышает этот уровень. Следовательно, по формуле полной вероятности имеем равенство:

$$\mathbf{P}\{M \in B\} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n p\, \mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1 + \cdots + \widetilde{\chi}_n \in B\}.$$

Так как случайная величина $\widetilde{\chi}$ имеет субэкспоненциальное распределение, то можно применить теорему о моменте остановки (см., например, лемму 1.8 в

[33, Chapter IX, Section 1] или лемму 1.3.5 в [56, Section 1.3.2]) и записать

$$\mathbf{P}\{M > x\} \ \sim \ \mathbf{P}\{\widetilde{\chi} > x\} \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n p\, n = \frac{\mathbf{P}\{\chi^* > x\}}{p}.$$

Доказательство закончено.

Последний результат выглядит несколько странно в том отношении, что в то время как условия выражены в терминах исходного распределения F, результирующий интеграл берётся по мере восстановления, являющейся весьма сложным объектом. В общей ситуации нам не удаётся выписать асимптотику интеграла

$$\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\, H_*(dt)$$

в терминах самого распределения F, поскольку в случае бесконечного среднего отсутствует какая-либо информация об асимптотическом поведении функции восстановления $H_*[0, x]$ при $x \to \infty$. Мы можем предложить лишь оценки снизу и сверху: объединяя асимптотики теорем 26 и оценки леммы 27, получаем утверждение теоремы 24.

Насколько нам известно, асимптотическое поведение $H_*[0, x]$ известно лишь в случае правильного изменения на бесконечности функции $m(x)$. В этом случае соединение результатов теоремы 26 и леммы 28 влечёт соотношение (196) теоремы 25.

Для $\alpha \in [0, 1]$ имеем $tF(-t) = (1 - \alpha + o(1))m(t)$ при $t \to \infty$. Поэтому из (193) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\frac{t}{m(t)} \ = \ \frac{\alpha + o(1)}{m(t)} \quad \text{при } t \to \infty.$$

Для $\alpha \in (0, 1]$ мы можем применить этот результат, чтобы получить (198) из (196).

Докажем наконец следствие 9. Заметим, что в этом случае распределение (195) субэкспоненциально по лемме 29 из следующего параграфа. Начнём со случая $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha < \beta$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $A > 0$. Имеем

$$\int_1^{\varepsilon x} \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)}\,dt \ \leqslant\ \overline{F}(x)\int_1^{\varepsilon x} \frac{1}{m(t)}\,dt \sim \frac{\overline{F}(x)}{\alpha}\frac{\varepsilon x}{m(\varepsilon x)} \quad \text{при } x\to\infty \tag{211}$$

и

$$\int_{Ax}^{\infty} \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)}\,dt \ \leqslant\ \int_{Ax}^{\infty} \frac{\overline{F}(t)}{m(t)}\,dt \sim \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{Ax\overline{F}(Ax)}{m(Ax)} \quad \text{при } x\to\infty. \tag{212}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon x}^{Ax} \overline{F}(x+t)\frac{1}{m(t)}\,dt \ &=\ \frac{\overline{F}(x)}{m(x)}\int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)}\frac{m(x)}{m(t)}\,dt \\ &=\ \frac{x\overline{F}(x)}{m(x)}\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\overline{F}(x(1+s))}{\overline{F}(x)}\frac{m(x)}{m(xs)}\,ds \\ &\sim\ \frac{x\overline{F}(x)}{m(x)}\int_{\varepsilon}^{A} \frac{(1+s)^{-\beta}}{s^{1-\alpha}}\,ds \quad \text{при } x\to\infty, \end{aligned} \tag{213}$$

поскольку ввиду равномерной теоремы сходимости для правильно меняющихся функций (см. теорему 1.5.2 в [43])

$$\frac{\overline{F}(x(1+s))}{\overline{F}(x)}\frac{m(x)}{m(xs)} \ \to\ \frac{(1+s)^{-\beta}}{s^{1-\alpha}}$$

при $x\to\infty$ равномерно по $s\in[\varepsilon, A]$. Устремляя $\varepsilon\to 0$ и $A\to\infty$, получаем из (211), (212) и (213), что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{M > x\} \ &\sim\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\frac{x\overline{F}(x)}{m(x)}\int_0^\infty (1+s)^{-\beta}s^{\alpha-1}\,ds \\ &=\ \frac{B(\beta-\alpha,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\frac{x\overline{F}(x)}{m(x)},\end{aligned}$$

что влечёт (199); здесь B — *бета-функция.*

Рассмотрим теперь случай $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha = \beta$. Фиксируем $A > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_1^{Ax} \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)}\,dt \ &\leqslant\ \overline{F}(x)\int_1^{Ax}\frac{dt}{m(t)} \\ &\sim\ \frac{\overline{F}(x)}{\alpha}\frac{Ax}{m(Ax)} \sim \frac{A^\alpha}{\alpha}\frac{L^*(x)}{L_*(x)} \\ &=\ o\biggl(\int_x^\infty \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt\biggr),\end{aligned} \tag{214}$$

так как $\alpha = \beta$ и используя (201). Далее, для любого малого $\delta > 0$ найдётся достаточно большое A такое, что $\overline{F}(x+t) \geqslant (1-\delta)\overline{F}(t)$ для любого $t \geqslant Ax$. Тогда

$$\int_{Ax}^{\infty} \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)}\,dt \;\geqslant\; (1-\delta)\int_{Ax}^{\infty} \frac{\overline{F}(t)}{m(t)}\,dt = (1-\delta)\int_{Ax}^{\infty} \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt. \quad (215)$$

С другой стороны,

$$\int_{Ax}^{\infty} \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)}\,dt \;\leqslant\; \int_{Ax}^{\infty} \frac{\overline{F}(t)}{m(t)}\,dt = \int_{Ax}^{\infty} \frac{L^*(t)}{tL_*(t)}\,dt. \quad (216)$$

Соотношения (214), (215), (216) и (201) влекут (200). Следствие 9 доказано.

§ 30. Достаточные условия субэкспоненциальности распределения интегральнго взвешанного хвоста

В настоящем параграфе предлагаются достаточные условия для субэкспоненциальности распределений (195) и (197). Мы рассматриваем более общую задачу: пусть F — распределение в $\mathbf{R}^+$ и H — неотрицательная мера в $\mathbf{R}^+$ такая, что

$$\int_0^{\infty} \overline{F}(t)\,H(dt) \quad \text{конечен.} \quad (217)$$

В этом случае можно определить распределение G_H в $\mathbf{R}^+$ с хвостом

$$\overline{G}_H(x) \;\equiv\; \min\left(1, \int_0^{\infty} \overline{F}(x+t)\,H(dt)\right), \quad x \geqslant 0. \quad (218)$$

Можно задать следующий вопрос: какого рода условия на F обеспечат субэкспоненциальность G_H?

Для начала напомним, что если F имеет длинный хвост, то G_H также имеет длинный хвост.

Определение 7. Говорят, что распределение F в $\mathbf{R}^+$ является доминируемо меняющимся ($F \in \mathscr{D}$), если найдётся такое $c > 0$, что $\overline{F}(2x) \geqslant c\overline{F}(x)$ для любого x.

Известно, что $(\mathscr{L}\cap\mathscr{D}) \subset \mathscr{S}$. Также известно, что $F \in \mathscr{D}$ влечёт $F_I \in \mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, однако обратное неверно, вообще говоря (см. [68, Section 4]).

Лемма 29. *Если $F \in \mathscr{D}\cap\mathscr{L}$, то $G_H \in \mathscr{D}\cap\mathscr{L}$ и, следовательно, $G_H \in \mathscr{S}$.*

Доказательство. Этот результат вытекает из неравенств:

$$\int_0^\infty \overline{F}(2x+t)\,H(dt) \;\geqslant\; c\int_0^\infty \overline{F}(x+t/2)\,H(dt) \geqslant c\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\,H(dt).$$

Определение 8 [68]**.** Распределение F в $\mathbf{R}^+$ с конечным средним m принадлежит классу $\mathscr{S}^*$, если

$$\int_0^x \overline{F}(x-y)\overline{F}(y)dy \;\sim\; 2m\overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Известно, что классу $\mathscr{S}^*$ принадлежат, в частности, распределения типа Парето (см. (186)), логнормальное распределение с плотностью (187) и распределение Вэйбулла с хвостом (188). Известно также (см. [68]), что

$$F \in \mathscr{S}^* \quad \text{влечёт} \quad F \in \mathscr{S} \quad \text{и} \quad F_I \in \mathscr{S}. \tag{219}$$

Оказывается, что верно более общее заключение. Для любого $b > 0$ рассмотрим класс $\mathscr{H}_b$ всех неотрицательных мер H в $\mathbf{R}^+$ таких, что

$$\sup_t H(t, t+1] \;\leqslant\; b.$$

Лемма 30. *Пусть $F \in \mathscr{S}^*$ и $H \in \mathscr{H}_b$, $b \in (0,\infty)$. Тогда $G_H \in \mathscr{S}$. Более того,*

$$\overline{G_H * G_H}(x) \;\sim\; 2\overline{G}_H(x)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $H \in \mathscr{H}_b$.

Замечание 12. Приведём четыре примера такого рода меры H: (i) если $H(B) = \mathbf{I}\{0 \in B\}$, то $G_H = F$; (ii) если $H(dt) = dt$ — мера лебега в $\mathbf{R}^+$, то

$G_H = F_I$; (iii) если H — мера восстановления H_*, то G_H — распределение первой возрастающей лестничной высоты χ^*; (iv) если $H[0,x] = x/m(x)$, то G_H есть G_1 из (195).

Доказательство леммы 30. Так как G_H имеет длинный хвост равномерно по $H \in \mathscr{H}_b$, то достаточно показать, что

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{x\to\infty} \sup_{H\in\mathscr{H}_b} \frac{1}{\overline{G}_H(x)} \int_A^{x-A} \overline{G}_H(x-y) G_H(dy) \ = \ 0, \qquad (220)$$

см., например, предложение 2 в [94].

Среднее значение F конечно. Поэтому $\overline{F}(t)H(0,t] = o(1/t)O(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и интегрирование по частям приводит при достаточно больших x к равенству

$$\overline{G}_H(x) = \int_x^\infty H(0, t-x]F(dt).$$

Следовательно,

$$G_H(x, x+1] \ = \ \int_x^\infty H(t-x-1, t-x]\, F(dt) \leqslant b\overline{F}(x).$$

Кроме того, G_H имеет длинный хвост. Поэтому (220) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{x\to\infty} \sup_{H\in\mathscr{H}_b} \frac{1}{\overline{G}_H(x)} \int_A^{x-A} \overline{G}_H(x-y) \overline{F}(y)\, dy \ = \ 0. \qquad (221)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $F \in \mathscr{S}^*$, то найдутся x_0 и A такие, что для всех $x \geqslant x_0$,

$$\int_A^{x-A} \overline{F}(x-u)\overline{F}(u)\, du \leqslant \varepsilon\overline{F}(x).$$

Тогда для $x \geqslant x_0$

$$\begin{aligned} \int_A^{x-A} \overline{G}_H(x-y)\overline{F}(y)\, dy \ &= \ \int_A^{x-A} \Big(\int_0^\infty \overline{F}(x+t-y)\, H(dt)\Big)\overline{F}(y)dy \\ &\leqslant \ \int_0^\infty \Big(\int_A^{x+t-A} \overline{F}(x+t-y)\overline{F}(y)dy\Big) H(dt) \\ &\leqslant \ \varepsilon \int_0^\infty \overline{F}(x+t)H(dt) = \varepsilon\overline{G}_H(x). \end{aligned}$$

Устремляя ε к 0, получаем (221). Что и требовалось доказать.

§ 31. Асимптотика распределения сумм случайных величин с локально субэкспоненциальным распределением

В настоящем и нескольких последующих параграфах изучаются такие распределения F, что для некоторого $T \leqslant \infty$ имеет место асимптотика $F^{*2}(x, x+T] \sim 2F(x, x+T]$. Случай $T = \infty$ соответствует субэкспоненциальности F, а наш анализ показывает, что свойства таких распределений при $T < \infty$ в действительности очень похожи на соответствующие свойства для классических субэкспоненциальных распределений. Параллельно развивается теория для абсолютно непрерывных распределений. Демонстрируется, как полученные результаты можно применять к исследованию случайных блужданий, основной теоремы восстановления, сложных пуассоновских процессов и ветвящихся процессов Беллмана — Харриса.

Напомним, что класс $\mathscr{S}$ субэкспоненциальных распределений характеризуется свойством $\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ (здесь F^{*n} — n-кратная свёртка распределения) и тем, что носитель содержится в $[0, \infty)$. Этот класс играет важную роль во многих приложениях (см., например, [30], [54], [84], [78], [33 Ch. IX]. В частности, один из основных результатов в теории субэкспоненциальных распределений гласит:

Теорема 27. *Пусть $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ — последовательность частичных сумм независимых одинаково распределённых случайных величин с общим распределением F и пусть τ — независимая целочисленная случайная величина. Если $F \in \mathscr{S}$ и $\mathbf{E}(1+\delta)^\tau < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то $\mathbf{P}(S_\tau > x) \sim \mathbf{E}\tau \cdot \overline{F}(x)$ при $x \to \infty$.*

С помощью этого результата можно получить асимптотику хвостов, в частности, времени ожидания в одноканальной системе обслуживания GI/GI/1, вероятностей разорения и в ветвящихся процессах Беллмана — Харриса (дальнейшие ссылки см. ниже).

Любое субэкспоненциальное распределение имеет длинный хвост, т. е. для любого фиксированного T имеет место эквивалентность $\overline{F}(x+T) \sim \overline{F}(x)$ при $x \to \infty$. Отсюда вытекает, что $F^{*n}(x, x+T] = o(\overline{F}(x))$ для любых $T < \infty$ и n. Однако в некоторых приложениях требуется более точная информация о поведении $F^{*n}(x, x+T]$ при $T < \infty$, при этом соответствующая регулярная теория отсутствует; нам известны лишь несколько ссылок: Човер и др. [47, Section 2] доказали локальные теоремы для некоторых классов решётчатых распределений; плотности рассматривались в [47, Section 2] (в предположении непрерывности), а также Клюпельберг в [69] рассматривала асимптотическое поведение плотностей в специальном случае (см. также некоторые результаты Сгибнева [28] для плотностей в $\mathbf{R}$, а также Рогозина и Сгибнева [26]); и наконец Бертуа и Дани [42], а также Асмуссен и др. [37] рассмотрели случай, когда F является распределением первой лестничной высоты случайного блуждания, с целью вывести локальную асимптотику распределения максимума случайного блуждания, уточняющую стандартную асимптотику, которая вытекает из теоремы 27.

Цель ближайших параграфов — предложить более систематическую теорию. Фиксируем $0 < T \leqslant \infty$ и рассмотрим интервал $\Delta = (0, T]$, а также сдвинутый интервал

$$x + \Delta \ \equiv \ \{x + y : y \in \Delta\} = (x, x+T], \quad x \in \mathbf{R}.$$

Мотивированные работой [37], назовём распределение F (сосредоточенное в $[0, \infty)$) Δ-*субэкспоненциальным*, если фунция $F(x+\Delta)$ имеет длинный хвост (см. определение 9 ниже) и $F^{*2}(x+\Delta) \sim 2F(x+\Delta)$. Случаю $T = \infty$ соответствует классическое понятие субэкспоненциального распределения. Как будет показано ниже, основные стандартные примеры субэкспоненциальных распределений дают также примеры Δ-субэкспоненциальных распределений для $T < \infty$, а классическая теория для $T = \infty$ переносится практически без изменений на случай $T < \infty$. Тем самым даётся общая теория, покрывающая как классический субэкспоненциальный случай так и некоторые более тонкие вопросы поднятые в [37], а также приводим некоторые другие приложения требующие это обобщение, например, из теории восстановления, см. § 36.

В § 32 мы исследуем свойства Δ-субэкспоненциальных распределений и доказываем естественный аналог теоремы 27. В § 33 определеляются распределения с субэкспоненциальной плотностью и изучаются их свойства. В § 34 приводятся достаточные условия Δ-субэкспоненциальности. В § 35 результаты из § 32 и 33 применяются для асимптотического описания распределения супремума случайного блуждания с отрицательным сносом, а также приводятся дальнейшие применения этих результатов к сложному пуассоновскому процессу, безгранично делимым распределениям, ветвящимся поцессам Беллмана — Харриса и основной теореме восстановления.

§ 32. Δ-Субэкспоненциальные распределения

Определение 9. Будем говорить, что распределение F в $\mathbf{R}$ принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta$, если $F(x+\Delta) > 0$ для всех достаточно больших x и

$$\frac{F(x+t+\Delta)}{F(x+\Delta)} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{222}$$

равномерно по $t \in [0,1]$.

Согласно определению 4 определение 9 эквивалентно тому, что функция $F(x+\Delta)$ имеет длинный хвост. В случае $T = \infty$ мы пишем просто $\mathscr{L}$ вместо $\mathscr{L}_\Delta$ и говорим, что распределение F имеет длинный хвост. Из определения вытекает, что можно выбрать функцию $h(x) \to \infty$ таким образом, что (222) выполняется равномерно по $|t| \leqslant h(x)$.

Докажем замкнутость класса $\mathscr{L}_\Delta$ относительно операции свёртки; подобное утверждение в случае $T = \infty$ можно найти в работе [53].

Лемма 31. *Пусть распределения F и G принадлежат классу $\mathscr{L}_\Delta$ для некоторого Δ. Тогда $F*G \in \mathscr{L}_\Delta$ и*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{(F*G)(x+\Delta)}{F(x+\Delta)+G(x+\Delta)} \ \geqslant\ 1. \tag{223}$$

Доказательство. Рассмотрим две независимые случайные величины ξ и η с распределениями F и G соответственно. Возьмём возрастающую функцию $h(x)\uparrow\infty$ такую, что $h(x)<x/2$, $F(x-y+\Delta)\sim F(x+\Delta)$ и $G(x-y+\Delta)\sim G(x+\Delta)$ при $x\to\infty$ равномерно по $|y|\leqslant h(x)$. Рассмотрим событие $B(x,t)=\{\xi+\eta\in x+t+\Delta\}$. Оценка (223) вытекает из неравенства

$$\mathbf{P}\{B(x,0)\} \ \geqslant\ \mathbf{P}\{B(x,0),\ |\xi|\leqslant h(x)\}+\mathbf{P}\{B(x,0),\ |\eta|\leqslant h(x)\},$$

а также из эквивалентностей

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{B(x,0),\ |\xi|\leqslant h(x)\} \ &=\ \int_{-h(x)-0}^{h(x)} G(x-y+\Delta)F(dy)\\
&\sim\ G(x+\Delta)\int_{-h(x)-0}^{h(x)} F(dy)\sim G(x+\Delta),\\
\mathbf{P}\{B(x,0),\ |\eta|\leqslant h(x)\} \ &\sim\ F(x+\Delta).
\end{aligned}$$

Вероятность события $B(x,t)$ равна сумме

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{B(x,t),\ \xi\leqslant x-h(x)\}+\mathbf{P}\{B(x,t),\ \eta\leqslant h(x)\}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{P}\{B(x,t),\ \xi>x-h(x),\ \eta>h(x)\}\\
&\quad\equiv\ P_1(x,t)+P_2(x,t)+P_3(x,t).
\end{aligned}$$

Чтобы доказать включение $F*G\in\mathscr{L}_\Delta$, необходимо проверить, что $\mathbf{P}\{B(x,t)\}\sim\mathbf{P}\{B(x,0)\}$ при $x\to\infty$ равномерно по $t\in[0,1]$. Это вытекает из соотношений

$$\begin{aligned}
P_1(x,t) \ &=\ \int_{-\infty}^{x-h(x)} G(x+t-y+\Delta)F(dy)\\
&\sim\ \int_{-\infty}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta)F(dy)\\
&=\ P_1(x,0),
\end{aligned}$$

по тем же причинам $P_2(x,t) \sim P_2(x,0)$, а также

$$\begin{aligned} P_3(x,t) &= \int_{x-h(x)}^{x-h(x)+t+T} \mathbf{P}\{\eta \in x+t-y+\Delta, \eta > h(x)\} F(dy) \\ &\leqslant \mathbf{P}\{\eta > h(x)\} F(x-h(x)+(0,t+T]) \\ &= o(F(x+\Delta)). \end{aligned}$$

По индукции лемма 31 влечёт

Следствие 12. *Пусть $F \in \mathscr{L}_\Delta$ для некоторого Δ. Тогда для любого $n \geqslant 2$ имеем $F^{*n} \in \mathscr{L}_\Delta$ и*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \geqslant n.$$

Определение 10. Пусть F — распределение в $\mathbf{R}^+$ с неограниченным носителем. Будем говорить, что F является Δ-*субэкспоненциальным* и писать $F \in \mathscr{S}_\Delta$, если $F \in \mathscr{L}_\Delta$ и

$$(F*F)(x+\Delta) \sim 2F(x+\Delta) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Эквивалентно случайная величина ξ имеет Δ-субэкспоненциальное распределение, если функция $\mathbf{P}\{\xi \in x+\Delta\}$ имеет длинный хвост и для двух независимых копий ξ_1 и ξ_2 случайной величины ξ имеет место эквивалентность

$$\mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2 \in x+\Delta\} \sim 2\mathbf{P}\{\xi \in x+\Delta\} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Замечание 13. Класс $\mathbf{R}^+$-субэкспоненциальных распределений совпадает со стандартным классом $\mathscr{S}$ субэкспоненциальных распределений. Типичные примеры $\mathscr{S}_\Delta$ распределений (для любого $T > 0$) те же, в частности распределение Парето, логнормальное и Вейбулла с параметром между 0 и 1; подробности см. в § 34. Кроме того, ниже будет показано, что многие свойства $\mathscr{S}_\Delta$-распределений при конечном Δ очень похожи на соответствующие свойства стандартных субэкспоненциальных распределений. При этом основное отличие состоит в том, что при $T < \infty$ функция $F(x+\Delta)$, вообще говоря, не монотонная по x, в то время как эта функция всегда не возрастает при $T = \infty$.

Замечание 14. Из определения вытекает, что если $F \in \mathscr{S}_\Delta$ для некоторого конечного интервала $\Delta = (0, T]$, то $F \in \mathscr{S}_{n\Delta}$ для любого $n = 2, 3, \dots$ и $F \in \mathscr{S}$. Действительно, для любого $n \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in x + n\Delta\} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in x + kT + \Delta\} \\ &\sim 2\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\xi \in x + kT + \Delta\} \\ &= 2\mathbf{P}\{\xi \in x + n\Delta\}. \end{aligned}$$

Замечание 15. В [47] авторы рассматривают класс распределений, сосредоточенных на множестве целых чисел таких, что $F\{n+1\} \sim F\{n\}$ и $F^{*2}\{n\} \sim 2F\{n\}$ при $n \to \infty$. Такие распределения являются Δ-субэкспоненциальными при $\Delta = (0, 1]$.

Лемма 32. *Пусть $F[0,\infty) = 1$ и $F \in \mathscr{L}_\Delta$ для некоторого Δ. Пусть ξ_1 и ξ_2 — две независимые случайные величины с общим распределением F. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $F \in \mathscr{S}_\Delta$;

(ii) *существует функция h такая, что $h(x) \to \infty$, $h(x) < x/2$ и $F(x - y + \Delta) \sim F(x + \Delta)$ при $x \to \infty$ равномерно по $|y| \leqslant h(x)$, а также*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in x + \Delta, \xi_1 > h(x), \xi_2 > h(x)\} = o(F(x+\Delta)) \text{ при } x \to \infty; \tag{224}$$

(iii) *соотношение (224) справедливо для любой функции h такой, что $h(x) \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что выполнение (224) для некоторой функции $h(x)$ влечёт то же соотношение для любой $h_1 \geqslant h$. При $h(x) < x/2$ вероятность события $B = \{\xi_1 + \xi_2 \in x + \Delta\}$ равна

$$\mathbf{P}\{B,\ \xi_1 \leqslant h(x)\} + \mathbf{P}\{B,\ \xi_2 \leqslant h(x)\} + \mathbf{P}\{B,\ \xi_1 > h(x),\ \xi_2 > h(x)\}$$

и утверждения леммы вытекают из равенств и эквивалентностей

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{B,\ \xi_1 \leqslant h(x)\} &= \mathbf{P}\{B,\ \xi_2 \leqslant h(x)\}\\ &= \int_0^{h(x)} F(x-y+\Delta)F(dy) \sim F(x+\Delta)\int_0^{h(x)} F(dy) \sim F(x+\Delta).\end{aligned}$$

Докажем теперь замкнутость класса $\mathscr{S}_\Delta$ относительно отношения локальной эквивалентности хвостов.

Лемма 33. *Предположим, что* $F \in \mathscr{S}_\Delta$ *для некоторого* Δ. *Если распределение* G *в* $\mathbf{R}^+$ *принадлежит классу* $\mathscr{L}_\Delta$ *и*

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{G(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \ \leqslant\ \limsup_{x\to\infty} \frac{G(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} < \infty, \tag{225}$$

то $G \in \mathscr{S}_\Delta$. *В частности,* $G \in \mathscr{S}_\Delta$, *если* $G(x+\Delta) \sim cF(x+\Delta)$ *при* $x \to \infty$ *для некоторого* $c \in (0,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмём функцию $h(x) \to \infty$ такую, что $h(x) < x/2$ и $G(x-y+\Delta) \sim G(x+\Delta)$ при $x \to \infty$ равномерно по $|y| \leqslant h(x)$. Пусть ζ_1 и ζ_2 — две независимые случайные величины с общим распределением G. В силу леммы 32(ii) достаточно доказать, что

$$I \ \equiv\ \mathbf{P}\{\zeta_1 + \zeta_2 \in x + \Delta,\ \zeta_1 > h(x),\ \zeta_2 > h(x)\} = o(G(x+\Delta)).$$

Имеем

$$\begin{aligned} I \ &=\ \int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x-y+\Delta)G(dy)\\ &\qquad\qquad + \int_{x-h(x)}^{x-h(x)+T} \mathbf{P}\{\zeta_1 \in x-y+\Delta,\ \zeta_1 > h(x)\}G(dy)\\ &\equiv\ I_1 + I_2,\end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \mathbf{P}\{\zeta_1 > h(x)\}G(x - h(x) + \Delta) \\
&= o(G(x + \Delta))
\end{aligned}
$$

и в силу условия (225) для некоторого $c_1 < \infty$ и всех достаточно больших x

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leqslant c_1 \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x - y + \Delta)G(dy) \\
&\leqslant c_1 \mathbf{P}\{\zeta_1 + \xi_2 \in x + \Delta,\ \zeta_1 > h(x),\ \xi_2 > h(x)\} \\
&= c_1 \int_{h(x)}^{x-h(x)} G(x - y + \Delta)F(dy) \\
&\qquad\qquad + c_1 \int_{x-h(x)}^{x-h(x)+T} \mathbf{P}\{\zeta_1 \in x - y + \Delta, \zeta_1 > h(x)\}F(dy)
\end{aligned}
$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины с общим распределением F. Следовательно, используя такие же аргументы, как и ранее, а также лемму 32(iii), получаем

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leqslant c_1^2 \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x - y + \Delta)F(dy) + c_1 \mathbf{P}\{\zeta_1 > h(x)\}F(x - h(x) + \Delta) \\
&\leqslant c_1^2 \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in x + \Delta,\ \xi_1 \geqslant h(x),\ \xi_2 \geqslant h(x)\} + o(F(x + \Delta)) \\
&= o(F(x + \Delta)) \\
&= o(G(x + \Delta)).
\end{aligned}
$$

Лемма 34. *Предположим, что $F \in \mathscr{S}_\Delta$ для некоторого Δ. Пусть G_1, G_2 — два распределения в $\mathbf{R}_+$ такие, что $G_1(x+\Delta)/F(x+\Delta) \to c_1$ и $G_2(x+\Delta)/F(x+\Delta) \to c_2$ при $x \to \infty$ для некоторых констант c_1, $c_2 \geqslant 0$. Тогда*

$$
\frac{(G_1 * G_2)(x + \Delta)}{F(x + \Delta)} \ \to\ c_1 + c_2 \quad \text{as } x \to \infty.
$$

Если $c_1 + c_2 > 0$, то по лемме 33 имеем $G_1 * G_2 \in \mathscr{S}_\Delta$.

Доказательство. Рассмотрим две независимые случайные величины ζ_1 и ζ_2 с распределениями G_1 и G_2 соответственно. Выберем функцию h как и ранее. Вероятность события $B = \{\zeta_1 + \zeta_2 \in x + \Delta\}$ равна сумме

$$\mathbf{P}\{B,\ \zeta_1 \leqslant h(x)\} + \mathbf{P}\{B,\ \zeta_2 \leqslant h(x)\} + \mathbf{P}\{B,\ \zeta_1 > h(x),\ \zeta_2 > h(x)\}.$$

Имеем (см. доказательство леммы 31) при $x \to \infty$ сходимости

$$\frac{\mathbf{P}\{B,\ \zeta_1 \leqslant h(x)\}}{F(x+\Delta)} \to c_2, \qquad \frac{\mathbf{P}\{B,\ \zeta_2 \leqslant h(x)\}}{F(x+\Delta)} \to c_1.$$

Повторяя рассуждения леммы 33, приходим к соотношению

$$\mathbf{P}\{B,\ \zeta_1 > h(x),\ \zeta_2 > h(x)\} = o(F(x+\Delta)).$$

Лемма доказана.

Из леммы 34 по индукции получаем следующее

Следствие 13. *Предположим, что $F \in \mathscr{S}_\Delta$ для некоторого $T \in (0,\infty]$ и $G(x+\Delta)/F(x+\Delta) \to c \geqslant 0$ при $x \to \infty$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ справедлива сходимость $G^{*n}(x+\Delta)/F(x+\Delta) \to nc$ при $x \to \infty$. Если $c > 0$, то $G^{*n} \in \mathscr{S}_\Delta$.*

Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\zeta_n\}$ — две последовательности независимых одинаково распределённых неотрицательных случайных величин с общими распределениями $F(B) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B)$ и $G(B) = \mathbf{P}(\zeta_1 \in B)$ соответственно. Положим $S_n = \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$.

Лемма 35. *Предположим, что $F \in \mathscr{S}_\Delta$ для некоторого Δ и $G(x+\Delta) = O(F(x+\Delta))$ при $x \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ и $V(\varepsilon) > 0$ такие, что для любых $x > x_0$ и $n \geqslant 1$,*

$$G^{*n}(x+\Delta) \ \leqslant \ V(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n F(x+\Delta).$$

Доказательство. Для любых $x_0 \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$ положим

$$A_k \equiv A_k(x_0) = \sup_{x > x_0} \frac{G^{*k}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)}.$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Следуя рассуждениям леммы 33, приходим при $x \to \infty$ к соотношению

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \zeta_2 \in x + \Delta,\ \xi_1 > h(x),\ \zeta_2 > h(x)\} = o(F(x + \Delta)).$$

Следовательно, найдётся x_0 такое, что для любого $x > x_0$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \zeta_2 \in x + \Delta,\ \zeta_2 \leqslant x - x_0\} \leqslant (1 + \varepsilon/2)F(x + \Delta).$$

Для любых $n > 1$ и $x > x_0$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{S_n \in x + \Delta\} &= \mathbf{P}\{S_n \in x + \Delta,\ \zeta_n \leqslant x - x_0\} \\
&\qquad + \mathbf{P}\{S_n \in x + \Delta,\ \zeta_n > x - x_0\} \\
&\equiv P_1(x) + P_2(x),
\end{aligned}$$

где по определению A_{n-1} и x_0

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \int_0^{x-x_0} \mathbf{P}\{S_{n-1} \in x - y + \Delta\}\mathbf{P}\{\zeta_n \in dy\} \\
&\leqslant A_{n-1}\int_0^{x-x_0} F(x - y + \Delta)\mathbf{P}\{\zeta_n \in dy\} \\
&= A_{n-1}\mathbf{P}\{\xi_1 + \zeta_n \in x + \Delta,\ \zeta_n \leqslant x - x_0\} \\
&\leqslant A_{n-1}(1 + \varepsilon/2)F(x + \Delta). \qquad (226)
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \int_0^{x_0+T} \mathbf{P}\{\zeta_n \in x - y + \Delta,\ \zeta_n > x - x_0\}\mathbf{P}\{S_{n-1} \in dy\} \\
&\leqslant \sup_{0<t\leqslant x_0} \mathbf{P}\{\zeta_n \in x - t + \Delta\} \int_0^{x_0+T} \mathbf{P}\{S_{n-1} \in dy\} \\
&\leqslant \sup_{0<t\leqslant x_0} \mathbf{P}\{\zeta_n \in x - t + \Delta\}.
\end{aligned}$$

Поэтому при $x > 2x_0$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &\leqslant A_1 \sup_{0<t\leqslant x_0} F(x - t + \Delta) \\
&\leqslant A_1 L_1 F(x + \Delta),
\end{aligned}$$

где

$$L_1 \;=\; \sup_{0<t\leqslant x_0,\; y>2x_0} \frac{F(y-t+\Delta)}{F(y+\Delta)}.$$

Если $x_0 < x \leqslant 2x_0$, то $P_2(x) \leqslant 1$ влечёт

$$\frac{P_2(x)}{F(x+\Delta)} \;\leqslant\; \frac{1}{\inf_{x_0<x\leqslant 2x_0} F(x+\Delta)} \equiv L_2.$$

Так как $F \in \mathscr{L}_\Delta$, то и L_1, и L_2 конечны при достаточно большом x_0. Положим $R = A_1L_1 + L_2$. Тогда для любого $x > x_0$

$$P_2(x) \;\leqslant\; RF(x+\Delta). \tag{227}$$

Из (226) и (227) вытекает $A_n \leqslant A_{n-1}(1+\varepsilon/2) + R$ при $n > 1$. Следовательно, по индукции получаем:

$$\begin{aligned} A_n \;&\leqslant\; A_1(1+\varepsilon/2)^{n-1} + R\sum_{l=0}^{n-2}(1+\varepsilon/2)^l \\ &\leqslant\; Rn(1+\varepsilon/2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает заключение леммы.

Рассмотрим теперь некоторый случайный момент остановки τ с распределением $p_n = \mathbf{P}\{\tau = n\}$, $n \geqslant 0$, не зависящий от последовательности $\{\zeta_n\}$. Тогда распределение остановленной в случайный момент времени суммы S_τ равно

$$\mathbf{P}\{S_\tau \in B\} = \sum_{n\geqslant 0} p_n G^{*n}(B).$$

Теорема 28. *Пусть $0 < T \leqslant \infty$. Предположим, что $F[0,\infty) = 1$, $G(x+\Delta)/F(x+\Delta) \to c \geqslant 0$ при $x \to \infty$ и $\mathbf{E}\tau < \infty$.*

(i) *Если $F \in \mathscr{S}_\Delta$ и $\mathbf{E}(1+\delta)^\tau < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то*

$$\frac{\mathbf{P}\{S_\tau \in x+\Delta\}}{F(x+\Delta)} \;\to\; c\cdot\mathbf{E}\tau \quad \textit{при } x \to \infty. \tag{228}$$

(ii) *Если имеет место (228), $c > 0$, $p_n > 0$ для некоторого $n \geqslant 2$ и, в случае конечного Δ, $F \in \mathscr{L}_\Delta$, то $F \in \mathscr{S}_\Delta$.*

Доказательство пункта (i) вытекает из следствия 13, леммы 35 и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Докажем второй пункт. Во-первых, для любого $n \geqslant 2$ имеем

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{G^{*n}(x+\Delta)}{G(x+\Delta)} \;\geqslant\; n. \tag{229}$$

Действительно, в случае $\Delta = (0,\infty)$ (229) вытекает из леммы 1 в [30]. Если же интервал Δ конечен, $F \in \mathscr{L}_\Delta$ и $c > 0$, то $G \in \mathscr{L}_\Delta$ и (229) вытекает из следствия 12.

Если $p_n > 0$ для некоторого $n \geqslant 2$, то (229) и (228) влекут асимптотику

$$G^{*n}(x+\Delta) \;\sim\; nG(x+\Delta) \quad \text{при } x \to \infty \tag{230}$$

(доказательство проводится от противного).

Если $\Delta = (0,\infty)$, то по лемме 7 из [55] (230) влечёт субэкспоненциальность G. Если Δ — конечный интервал и $F \in \mathscr{L}_\Delta$, то $G \in \mathscr{L}_\Delta$ и по следствию 12 свёртка $G^{*(n-1)}$ также принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta$. Поэтому лемма 31 влечёт

$$\begin{aligned} n = \limsup_{x\to\infty} \frac{G^{*n}(x+\Delta)}{G(x+\Delta)} \;&=\; \limsup_{x\to\infty} \frac{(G * G^{*(n-1)})(x+\Delta)}{G(x+\Delta)} \\ &\geqslant\; 1 + \limsup_{x\to\infty} \frac{G^{*(n-1)}(x+\Delta)}{G(x+\Delta)}. \end{aligned}$$

Из этой оценки по индукции выводим, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{G^{*2}(x+\Delta)}{G(x+\Delta)} \;\leqslant\; 2,$$

откуда вытекает Δ-субэкспоненциальность G. Окончательно, $F \in \mathscr{S}_\Delta$ ввиду леммы 33.

Утверждение (i) теоремы 28 имеет место для любого Δ-субэкспоненциального распределения. Если же фиксировать распределение F, то условие конечности $\mathbf{E}(1+\delta)^\tau$ можно существенно ослабить. Проиллюстрируем это на следующем примере. Рассмотрим случай бесконечного интервала $\Delta = (0,\infty)$.

Пусть $G = F$ и существуют конечные положительные константы c и α такие, что $\overline{F}(x/n) \leqslant cn^\alpha \overline{F}(x)$ для любых $x > 0$ и $n \geqslant 1$ (например, распределение Парето с параметром α удовлетворяет этому условию). Тогда $\mathbf{P}\{S_\tau > x\} \sim \mathbf{E}\tau \cdot \overline{F}(x)$ при $x \to \infty$, если $\mathbf{E}\tau^{1+\alpha}$ конечно, что вытекает из оценки

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \leqslant \mathbf{P}\{n \cdot \max_{k \leqslant n} \zeta_k > x\} \leqslant n\mathbf{P}\{\zeta_1 > x/n\} \leqslant n^{1+\alpha}\overline{F}(x)$$

и теоремы о мажорируемой сходимости.

Из леммы 35 вытекает также следующее следствие. Для любого $x \geqslant 0$ положим $\eta(x) = \min\{n \geqslant 1 : S_n > x\}$ и $\chi(x) = S_{\eta(x)} - x$. Как и ранее, пусть τ — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от величин ζ_n.

Следствие 14. *Предположим, что* $G \in \mathscr{S}_\Delta$ *и* $\mathbf{E}(1+\delta)^\tau < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$*. Тогда* $\mathbf{P}\{\chi(x) \in y + \Delta,\ \eta(x) \leqslant \tau\} \sim \mathbf{E}\tau \cdot G(x + y + \Delta)$ *при* $\min(x, y) \to \infty$*.*

Доказательство. Пусть h такова, что $h(y) \leqslant y/2$, $h(y) \uparrow \infty$ при $y \to \infty$ и $G(y + t + \Delta) \sim G(y + \Delta)$ равномерно по $|t| \leqslant h(y)$. Положим $z = \min(h(y), x)$. Для любого $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi(x) \in y + \Delta,\ \eta(x) = n\} &= \mathbf{P}\{S_{n-1} \leqslant x,\ S_n \in x + y + \Delta\} \\ &\geqslant \int_0^z \mathbf{P}\{S_{n-1} \in dt\} G(x + y - t + \Delta) \\ &\sim G(x + y + \Delta). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{S_{n-1} \leqslant x,\ S_n \in x + y + \Delta\} \\ &\qquad = \mathbf{P}\{S_n \in x + y + \Delta\} - \mathbf{P}\{S_{n-1} > x,\ S_n \in x + y + \Delta\} \\ &\qquad \leqslant \mathbf{P}\{S_n \in x + y + \Delta\} - \mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant z,\ S_n \in x + y + \Delta\} \\ &\qquad = (n + o(1))G(x + y + \Delta) - (n - 1 + o(1))G(x + y + \Delta). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого фиксированного $n \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\{\chi(x) \in y + \Delta,\ \eta(x) = n\} \sim G(x + y + \Delta).$$

Поэтому лемма 35 и теорема о мажорируемой сходимости завершают доказательство, поскольку $\mathbf{P}\{\chi(x) \in y + \Delta,\ \eta(x) = n\} \leqslant \mathbf{P}(S_n \in x + y + \Delta)$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi(x) \in y + \Delta,\ \eta(x) \leqslant \tau\} \ &= \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = k\} \sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}\{\chi(x) \in y + \Delta,\ \eta(x) = n\} \\ &\sim \ G(x + y + \Delta) \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}\{\tau = k\}. \end{aligned}$$

§ 33. Распределения с субэкспоненциальными плотностями

Похожие результаты (с аналогичными доказательствами) имеют место для плотностей абсолютно непрерывных распределений. Точнее, в настоящем параграфе рассматривается класс распределений $\{F\}$, обладающих следующим свойством: распределение F имеет плотность $f(x)$ для всех достаточно больших значений x, т. е. найдётся $\widehat{x} = \widehat{x}(F)$ такое, что для любого борелевского множества $B \subseteq (\widehat{x}, \infty)$ справедливо

$$F(B) \ = \ \int_B f(y)dy.$$

Будем говорить, что плотность f на $(\widehat{x}(F), \infty)$ имеет *длинный хвост* (и писать $f \in \mathscr{L}$), если функция $f(x)$ ограничена на множестве $(\widehat{x}, \infty)$, $f(x) > 0$ при всех достаточно больших x и $f(x + t) \sim f(x)$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \in [0, 1]$. В частности, если $f \in \mathscr{L}$, то $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Будем говорить, что распределение F в $\mathbf{R}_+$ с плотностью $f(x)$ на множестве $(\widehat{x}, \infty)$ принадлежит классу $\mathscr{S}_{ac}$ (плотность f является *субэкспоненциальной*), если $f \in \mathscr{L}$ и при $x \to \infty$

$$f^{*2}(x) \equiv 2\int_0^{\widehat{x}} f(x - y)F(dy) + \int_{\widehat{x}}^{x-\widehat{x}} f(x - y)f(y)dy \ \sim \ 2f(x).$$

Типичными элементами класса $\mathscr{S}_{ac}$ являются распределения Парето, логнормальное и Вэйбулла с параметром 0 и 1 (доказательство см. в § 34). Отметим, что распределение с субэкспоненциальной плотностью автоматически является Δ-субэкспоненциальным для любого $0 < T \leqslant \infty$.

Лемма 36. *Пусть распределения F и G имеют плотности f и g на $(\widehat{x}, \infty)$, принадлежащие классу $\mathscr{L}$. Тогда плотность $f * g$ свёртки $F * G$ имеет длинный хвост и*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{(f*g)(x)}{f(x)+g(x)} \;\geqslant\; 1. \tag{231}$$

В частности, если $f \in \mathscr{L}$, то $f^{*n} \in \mathscr{L}$ и

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f^{*n}(x)}{f(x)} \geqslant n.$$

Доказательство. Выберем функцию $h(x) \uparrow \infty$ такую, что $\widehat{x} \leqslant h(x) < x/2$, $f(x-y) \sim f(x)$ и $g(x-y) \sim g(x)$ при $x \to \infty$ равномерно по $|y| \leqslant h(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
(f*g)(x+t) &= \int_{-\infty}^{x-h(x)} f(x+t-y)G(dy) + \int_{-\infty}^{h(x)} g(x+t-y)F(dy) \\
&\quad + \int_{x-h(x)}^{x+t-h(x)} f(x+t-y)g(y)dy \\
&\equiv I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t).
\end{aligned}$$

Заключение утверждения вытекает теперь из эквивалентностей $I_1(x,t) \sim I_1(x,0)$ и $I_2(x,t) \sim I_2(x,0)$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \in (0,1]$, а также оценки

$$\begin{aligned}
I_3(x,t) &\leqslant \sup_{y\in[h(x),h(x)+t)} f(y) \int_{x-h(x)}^{x+t-h(x)} g(y)dy \\
&\sim t f(h(x))g(x) \\
&= o(g(x)).
\end{aligned}$$

Лемма 37. *Предположим что распределение F в $\mathbf{R}^+$ имеет плотность $f \in \mathscr{L}$ на $(\widehat{x}, \infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *плотность f является субэкспоненциальной;*

(ii) *для некоторой функции h такой, что $h(x) \to \infty$, $h(x) < x/2$ и $f(x-y) \sim f(x)$ при $x \to \infty$ равномерно по $|y| \leqslant h(x)$ выполняется*

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} f(x-y)f(y)dy \;=\; o(f(x)) \text{ при } x \to \infty; \tag{232}$$

(iii) *соотношение (232) выполняется для любой функции h такой, что $h(x) \to \infty$.*

Доказательство. При $\widehat{x} \leqslant h(x) < x/2$ имеем

$$f^{*2}(x) = 2\int_0^{h(x)} f(x-y)F(dy) + \int_{h(x)}^{x-h(x)} f(x-y)f(y)dy.$$

Здесь первый интеграл эквивалентен $f(x)$ при $x \to \infty$. Это наблюдение завершает доказательство.

Лемма 38. *Пусть f — субэкспоненциальная плотность на $(\widehat{x}, \infty)$. Предположим, что плотность g на $[\widehat{x}, \infty)$ имеет длинный хвост и что*

$$0 < \liminf_{x\to\infty} g(x)/f(x) \;\leqslant\; \limsup_{x\to\infty} g(x)/f(x) < \infty.$$

Тогда g также имеет субэкспоненциальный хвост. В частности, $g \in \mathscr{S}_{ac}$, если $g(x) \sim cf(x)$ при $x \to \infty$ для некоторого $c \in (0, \infty)$.

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 37(iii). Действительно, можно выбрать $c_1 < \infty$ такое, что $g(x) \leqslant c_1 f(x)$ для всех достаточно больших x и

$$\int_{h(x)}^{x-h(x)} g(x-y)g(y)dy \;\leqslant\; c_1^2 \int_{h(x)}^{x-h(x)} f(x-y)f(y)dy.$$

Лемма 39. *Пусть f — субэкспоненциальная плотность на $(\widehat{x}, \infty)$. Пусть f_1 и f_2 — две плотности на $(\widehat{x}, \infty)$ такие, что $f_1(x)/f(x) \to c_1$ и $f_2(x)/f(x) \to c_2$ при $x \to \infty$ для некоторых констант c_1, $c_2 \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{(f_1 * f_2)(x)}{f(x)} \;\to\; c_1 + c_2 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Если $c_1 + c_2 > 0$, то по лемме 38 свёртка $f_1 * f_2$ является субэкспоненциальной.

Доказательство. Выберем функцию h как ранее. Тогда

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) \;&=\; \int_0^{h(x)} f_1(x-y)F_2(dy) + \int_0^{h(x)} f_2(x-y)F_1(dy) \\ &\qquad + \int_{h(x)}^{x-h(x)} f_1(x-y)f_2(y)dy \\ &\equiv\; I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \end{aligned}$$

Имеем сходимости $I_1(x)/f(x) \to c_1$ и $I_2(x)/f(x) \to c_2$ при $x \to \infty$. Наконец,

$$I_3(x) \leqslant (c_1c_2 + o(1)) \int_{h(x)}^{x-h(x)} f(x-y)f(y)dy = o(f(x)),$$

что и завершает доказательство.

Следствие 15. *Предположим что $F \in \mathscr{S}_{ac}$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ имеем $f^{*n}(x) \sim nf(x)$ при $x \to \infty$ и $F^{*n} \in \mathscr{S}_{ac}$.*

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с общим распределением $F(B) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B)$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Лемма 40. *Предположим что распределение $F \in \mathscr{S}_{ac}$ имеет плотность в $(0, \infty)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_0 = x_0(\varepsilon) \geqslant \widehat{x}$ и $V(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого $x > x_0$ и для любого натурального числа $n \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$f^{*n}(x) \;\leqslant\; V(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n f(x).$$

Доказательство. Так как F имеет плотность в $(0,\infty)$, то для любого $k \geqslant 1$ плотность $f^{*k}(x)$ определена для любого $x > 0$. Для любых $x_0 \in \mathbf{R}_+$ и $k \geqslant 1$ положим $A_k \equiv A_k(x_0) = \sup_{x>x_0} f^{*k}(x)/f(x)$. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Фиксируем натуральное j такое, что $(j+1+\varepsilon)^{1/j} < 1+\varepsilon/2$. По следствию 15 имеем сходимость $A_{j+1}(x_0) \to j+1$ при $x_0 \to \infty$. Выберем $x_0 \geqslant \widehat{x}$ такое, чтобы

$$A_{j+1}(x_0) \leqslant (j+1+\varepsilon) < (1+\varepsilon/2)^j.$$

Для любых $n > j$ и $x > 2x_0$ справедливо

$$\begin{aligned} f^{*n}(x) &= \int_0^{x-x_0} f^{*(n-j)}(x-y)F^{*j}(dy) + \int_0^{x_0} f^{*j}(x-y)F^{*(n-j)}(dy) \\ &\equiv I_1(x) + I_2(x), \end{aligned}$$

где по определению A_{n-j} и A_{j+1}

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leqslant A_{n-j}\int_0^{x-x_0} f(x-y)F^{*j}(dy) \\ &\leqslant A_{n-j}f^{*(j+1)}(x) \\ &\leqslant A_{n-j}A_{j+1}f(x), \end{aligned} \tag{233}$$

а также

$$\begin{aligned} I_2(x) &\leqslant \max_{0<t\leqslant x_0} f^{*j}(x-t) \\ &\leqslant A_j \max_{0<t\leqslant x_0} f(x-t) \\ &\leqslant A_j L_1 f(x), \end{aligned} \tag{234}$$

где $L_1 = \sup_{0<t\leqslant x_0, y>2x_0} f(y-t)/f(y)$. Если $x_0 < x \leqslant 2x_0$, то

$$\frac{f^{*n}(x)}{f(x)} \leqslant \frac{\sup_{x\in(x_0,2x_0]} f^{*n}(x)}{\inf_{x_0<x\leqslant 2x_0} f(x)} \equiv L_2. \tag{235}$$

Поскольку $f \in \mathscr{L}$, то найдётся x_0 такое, что L_1 и $L_2 < \infty$. Положим $R = A_jL_1 + L_2$. Как следует из (233)–(235), для любого $x > x_0$

$$f^{*n}(x) \leqslant (A_{n-j}A_{j+1} + R)f(x).$$

Поэтому при $n > j$ имеем $A_n \leqslant A_{n-j}A_{j+1} + R$. Завершается доказательство так же, как и доказательство леммы 35.

Теорема 29. *Пусть* $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ *— неотрицательная последовательность такая, что* $m_p \equiv \sum_{n\geqslant 1} np_n$ *конечно. Обозначим*

$$g(x) = \sum_{n\geqslant 1} p_n f^{*n}(x).$$

(i) *Если распределение* F *имеет субэкспоненциальную плотность* f *на* $(0,\infty)$ *и* $\sum_{n\geqslant 1}(1+\delta)^n p_n < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$*, то*

$$g(x) \ \sim \ m_p f(x) \quad \text{\textit{при} } x \to \infty. \tag{236}$$

(ii) *Если имеет место эквивалентность* (236)*,* $p_1 < 1$*,* $F[0,\infty) = 1$ *и* $f \in \mathscr{L}$*, то* $F \in \mathscr{S}_{ac}$*.*

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из следствия 15, леммы 40 и теоремы о мажорируемой сходимости. Докажем второе утверждение. В силу леммы 36 имеем для любого $n \geqslant 2$

$$\liminf_{x\to\infty} f^{*n}(x)/f(x) \ \geqslant \ n.$$

Если $p_n > 0$ для некоторого $n \geqslant 2$, то последняя оценка и (236) влекут, что

$$f^{*n}(x) \ \sim \ nf(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{237}$$

Ввиду леммы 36 имеем $f^{*(n-1)} \in \mathscr{L}$ и

$$\begin{aligned} n = \limsup_{x\to\infty} \frac{f^{*n}(x)}{f(x)} \ &= \ \limsup_{x\to\infty} \frac{(f * f^{*(n-1)})(x)}{f(x)} \\ &\geqslant \ 1 + \limsup_{x\to\infty} \frac{f^{*(n-1)}(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Из этой оценки по индукции выводим $\limsup_{x\to\infty} f^{*2}(x)/f(x) \leqslant 2$, откуда вытекает субэкспоненциальность f.

§ 34. Достаточные условия Δ-субэкспоненциальности и субэкспоненциальности плотностей

Хорошо известны достаточные условия субэкспоненциальности распределений (см., например, [82, 78 § 2.5.3]). В настоящем параграфе предлагаютя похожие условия принадлежности распределений классу $\mathscr{S}_\Delta$ при конечном значении T, а также классу $\mathscr{S}_{ac}$.

Лемма 41. *Пусть распределение F в $\mathbf{R}^+$ принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta$ для некоторого конечного $T > 0$. Предположим что найдутся $c > 0$ и $x_0 < \infty$ такие, что $F(x + t + \Delta) \geqslant cF(x + \Delta)$ для любых $t \in (0, x]$ и $x > x_0$. Тогда $F \in \mathscr{S}_\Delta$.*

Доказательство. Пусть функция $h(x) \to \infty$ такова, что $h(x) < x/2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in x + \Delta, \xi_1 > h(x), \xi_2 > h(x)\} \\
&\qquad \leqslant 2 \int_{h(x)}^{x/2+T} F(x - y + \Delta) F(dy) \\
&\qquad \qquad \leqslant 2(c + o(1)) \int_{h(x)}^{x/2+T} F(x + \Delta) F(dy) \\
&\qquad \qquad = o(F(x + \Delta))
\end{aligned}$$

при $x \to \infty$. Применяя теперь лемму 32(ii), заключаем что $F \in \mathscr{S}_\Delta$.

Распределение Парето (с хвостом распределения $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geqslant 1$) удовлетворяет условиям леммы 41. Вообще, условия этой леммы выполнены для любого распределения F, у которого вероятность $\mathbf{P}(\xi \in x + \Delta)$ является правильно меняющейся на бесконечности функцией, т. е. когда $F(x + \Delta) \sim x^{-\alpha} l(x)$, где $l(x)$ медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Лемма 42. *Пусть распределение F в $\mathbf{R}^+$ принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta$ для некоторого конечного Δ. Пусть существует x_0 такое, что функция $g(x) \equiv -\ln F(x+\Delta)$ вогнута при $x \geqslant x_0$. Пусть функция $h(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$ такова, что $F(x+t+\Delta) \sim F(x+\Delta)$ равномерно по $|t| \leqslant h(x)$ и $xF(h(x)+\Delta) \to 0$. Тогда $F \in \mathscr{S}_\Delta$.*

Доказательство. Согласно лемме 33, не ограничивая общности, предполагаем $x_0 = 0$. Так как $g(x)$ вогнута, то минимум суммы $g(x-y)+g(y)$ на интервале $y \in [h(x), x-h(x)]$ равен $g(x-h(x))+g(h(x))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)F(dy) &\leqslant c_1 \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)F(y+\Delta)dy \\ &= c_1 \int_{h(x)}^{x-h(x)} e^{-(g(x-y)+g(y))}dy \\ &\leqslant c_1 x e^{-(g(x-h(x))+g(h(x)))}. \end{aligned}$$

Поскольку $e^{-g(x-h(x))} \sim e^{-g(x)}$, то

$$\begin{aligned} \int_{h(x)}^{x-h(x)} F(x-y+\Delta)F(dy) &= O(e^{-g(x)} x e^{-g(h(x))}) \\ &= o(F(x+\Delta)), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Рассмотрим распределение Вэйбулла $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta}$, $x \geqslant 0$, $\beta \in (0,1)$. В этом случае

$$F(x+\Delta) \sim \beta T x^{\beta-1} \exp(-x^\beta) \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

Рассмотрим распределение $\widehat{F}$ с хвостом $\overline{\widehat{F}}(x) = \min(1, x^{\beta-1}e^{-x^\beta})$. Пусть x_0 — единственный положительный корень уравнения $x^{1-\beta} = e^{-x^\beta}$. Функция $\widehat{g}(x) = -\ln \widehat{F}(x+\Delta)$ вогнута при $x \geqslant x_0$, и выполнены условия леммы 42 при $h(x) = x^\gamma$, $\gamma \in (0, 1-\beta)$. Таким образом, $\widehat{F} \in \mathscr{S}_\Delta$ и ввиду леммы 33 имеем $F \in \mathscr{S}_\Delta$.

Примерно также можно проверить, что для логнормального распределения с плотностью $f(x) = e^{-(\ln x - \ln a)^2/2\sigma^2}/x\sqrt{2\pi\sigma^2}$,

$$F(x + \Delta) \sim Tf(x)$$

функция $g(x) = -\ln(x^{-1}e^{-(\ln x - \ln a)^2/2\sigma^2}) = \ln x + (\ln x - \ln a)^2/2\sigma^2$ вогнута, начиная с некоторой точки, и условия леммы 42 выполнены для любой функции $h(x) = o(x)$. Поэтому $F \in \mathscr{S}_\Delta$.

Аналогично леммам 41 и 42 получаем следующее

Лемма 43. *Пусть распределение F в $\mathbf{R}^+$ имеет плотность $f(x)$ с длинным хвостом. Пусть выолнено одно из следующих условий:*

(i) *существует $c > 0$ такое, что $f(y) \geqslant cf(x)$ для любого $y \in (x, 2x]$;*

(ii) *функция $g(x) \equiv -\ln f(x)$ вогнута при $x > x_0$ и для некоторой $h(x) \to \infty$ выполняется $f(x + t) \sim f(x)$ равномерно по $|t| \leqslant h(x)$ и $xe^{-g(h(x))} \to 0$.*

Тогда f — субэкспоненциальная плотность.

Плотность распределения Парето удовлетворяет условию (i) леммы 43. Плотность распределения Вэйбулла с параметром $\beta \in (0, 1)$ удовлетворяет условию (ii) леммы 43 при $h(x) = \ln^{2/\beta} x$.

Пример 1. Предположим что ξ принимает лишь целые положительные значения, $\mathbf{P}\{\xi = 2k\} = \gamma/k^2$ и $\mathbf{P}\{\xi = 2k + 1\} = \gamma/2^k$, где γ — нормирующая постоянная. Тогда ξ имеет решётчатое распределение F с шагом 1. Ввиду леммы 41 $F \in \mathscr{S}_{(0,2]}$, однако F не может принадлежать никакому $\mathscr{S}_{(0,a]}$, если только a не равно бесконечности или чётному натуральному числу.

Пример 2. Пусть ξ — сумма двух независимых случайных величин, $\xi = \eta + \zeta$, где η имеет равномерное распределение на $(-1/8, 1/8)$, а $\mathbf{P}\{\zeta = k\} = \gamma/k^2$. Тогда распределение F случайной величины ξ абсолютно непрерывно. Можно проверить, что $F \in \mathscr{S}_{(0,1]}$, однако при этом F не может принадлежать никакому $\mathscr{S}_{(0,a]}$, если только a не равно бесконечности или натуральному числу.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)$ с длинным хвостом, порядка $f(x) \in [1/x^2, 2/x^2]$ для любого $x > 0$. Выберем функцию f таким образом, чтобы f не была асимптотически эквивалентна какой-либо невозрастающей функции.

Например, можно определить f следующим образом. Рассмотрим возрастающую последовательность $x_n = 2^{n/4}$. Положим $f(x_{2n}) = 1/x_{2n}^2$ и $f(x_{2n+1}) = 2/x_{2n+1}^2$. Между этими точками доопределим f линейным образом.

Рассмотрим решётчатое распределение F на множестве натуральных чисел с массами $F(\{n\}) = f(n)$ для всех достаточно больших натуральных n. Тогда по лемме 33 имеем $F \in \mathscr{S}_{(0,1]}$, но при этом $f(n) = F((n-1, n])$ не эквивалентна асимптотически никакой невозрастающей функции.

Пример 4. Пусть G_+ — распределение первой лестничной высоты случайного блуждания с распределением скачка F. В [37] показано, что $G_+ \in \mathscr{S}_\Delta$ для любого $T < \infty$, если распределение F нерешётчато. Однако G_+ не может иметь субэкспоненциальную плотность в случае, если F — сингулярное распределение (например, сосредоточенное в точках $\{-1, \sqrt{2}\}$), поскольку тогда G_+ тоже сингулярное.

§ 35. Некоторые приложения локальных асимптотик

35.1. Супремум случайного блуждания. Теоремы 28 и 29 дают возможность предложить единообразный подход для получения как локальной, так и интегральной асимптотик для супремума случайного блуждания.

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с общим распределением F в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{E}\xi_1 = -m < 0$. Как и ранее, обозначим через F_I распределение с интегральным хвостом. Несложно видеть, что

(a) если F имеет длинный хвост, то F_I также имеет длинный хвост;

(b) F_I имеет длинный хвост тогда и только тогда, когда $\overline{F}(x) = o(\overline{F_I}(x))$ при $x \to \infty$.

Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $M = \sup_{n \geqslant 0} S_n$. Обозначим $\pi(B) = \mathbf{P}\{M \in B\}$ и $\pi(x) \equiv \pi(-\infty, x] = 1 - \overline{\pi}(x)$.

Недавно Асмуссен и др. [37] доказали следующий локальный аналог теоремы 23 об асимптотике распределения супремума M: если распределение $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ принадлежит классу $\mathscr{S}^*$ (см. определение 8 класса $\mathscr{S}^*$ в § 30), то для любого $T \in (0, \infty)$ выполняется

$$\pi(x + \Delta) \sim \frac{T}{m}\overline{F}(x) \tag{238}$$

(если распределение F решётчато, то следует брать x и T кратным шагу решётки). В частности, $\pi \in \mathscr{S}_\Delta$ для любого $0 < T < \infty$.

В решётчатом случае эквивалентность (238) была доказана ранее Бертуа и Дани [42]. Они также привели схему доказательства (238) для нерешётчатых распределений.

Из [61, теорема 2(b)] вытекает, что верно и обратное утверждение: если (238) имеет место для любого $T \in (0, \infty)$ и F имеет длинный хвост, то распределение $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ взято из класса $\mathscr{S}^*$.

З а м е ч а н и е 16. Так как (238) справедливо для любого $T > 0$, то отсюда для любого $T_0 > 0$ вытекает эквивалентность

$$\pi(x + \Delta) \sim \frac{1}{m}\int_x^{x+T} \overline{F}(y)dy \tag{239}$$

при $x \to \infty$ равномерно по $T \in [T_0, \infty]$.

Убедится в том, что теорема 28 даёт универсальный подход к доказательству теоремы 23 и (238). Начнём со следующей леммы.

Лемма 44. *Пусть $v(x)$ — функция с длинным хвостом и*

$$V(x) \equiv \int_x^\infty v(y)dy.$$

Предположим что $V(0) < \infty$. *Для любого* n *определим событие* $A_n = \{S_j \leqslant 0$ *для любого* $j \leqslant n\}$ *и положим* $p = \mathbf{P}\{M > 0\}$. *Тогда при* $x \to \infty$ *имеет место эквивалентность*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\{v(x - S_n);\ A_n\} \ \sim\ \frac{1-p}{m} V(x).$$

Доказательство. Так как v имеет длинный хвост, то V также имеет длинный хвост и $v(x) = o(V(x))$.

Рассмотрим случай нерешётчатого распределения F (доказательство в решётчатом практически такое же). Для $n \geqslant 0$ рассмотрим меру

$$H_n(B) \ = \ \mathbf{P}\{S_j \leqslant 0 \text{ для любого } j \leqslant n,\ S_n \in B\}, \quad B \subseteq (-\infty, 0]$$

и соответствующую меру восстановления с запретом

$$H(B) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} H_n(B).$$

Хорошо известно, что в нерешётчатом случае

$$H(y + (0,1]) \ \sim \ (1-p)/m \quad \text{при } y \to -\infty. \tag{240}$$

Поскольку

$$\mathbf{E}\{v(x - S_n);\ A_n\} \ = \ \int_{-\infty}^{0} v(x-y) H_n(dy)$$

и функция $v(x)$ имеет длинный хвост, то получаем эквивалентность

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\{v(x - S_n);\ A_n\} \ &= \ \int_0^{\infty} v(x+y) H(-dy) \\ &\sim \ \sum_{j=0}^{\infty} v(x+j) H(-j-1, -j].\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $h(x) \to \infty$ с натуральными значениями и длинным хвостом такую, что $v(x+t) \sim v(x)$ равномерно по $|t| \leqslant h(x)$ и $v(x)h(x) =$

$o(V(x))$. Тогда из (240) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\{v(x-S_n);\ A_n\} &\sim \sum_{j=h(x)}^{\infty} v(x+j)H(-j-1,-j]\\ &\sim \frac{1-p}{m}\sum_{j=h(x)}^{\infty} v(x+j)\\ &\sim \frac{1-p}{m}\int_x^{\infty} v(y)dy.\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Рассмотрим момент остановки

$$\eta = \inf\{n \geqslant 1:\ S_n > 0\} \leqslant \infty,$$

имеющий дефектное распределение и пусть $\{\psi_n\}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с общей функцией распределения

$$G(x) \equiv \mathbf{P}\{\psi_n \leqslant x\} = \mathbf{P}\{S_\eta \leqslant x \mid \eta < \infty\}.$$

Хорошо известно (см., например, Феллера [29, гл. 12]), что распределение максимума M совпадает с распределением случайно остановленной суммы $\psi_1 + \dots + \psi_\nu$, где момент остановки ν независим от последовательности $\{\psi_n\}$ и имеет геометрическое распределение распределение с параметром $p = \mathbf{P}\{M > 0\} < 1$, т. е. $\mathbf{P}\{\nu = k\} = (1-p)p^k$ для любого $k = 0, 1, \dots$. Эквивалентно,

$$\mathbf{P}\{M \in B\} \;=\; (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} p^k G^{*k}(B).$$

Из книги Боровкова [1, гл. 4, теорема 10], известно, что если F_I имеет длинный хвост, то

$$\overline{G}(x) \sim \frac{1-p}{pm}\overline{F_I}(x). \tag{241}$$

Для любого $T \in (0,\infty)$ и $\Delta = (0,T]$, если функция $v(x) = F(x+\Delta)$ имеет длинный хвост, то по лемме 44 имеем

$$\begin{aligned} G(x+\Delta) &= \frac{\mathbf{P}\{S_\eta \in x+\Delta\}}{\mathbf{P}\{\eta<\infty\}} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{S_n \in x+\Delta,\ \eta=n\} \\ &\sim \frac{1-p}{pm}\int_x^\infty F(y+\Delta) \\ &\sim \frac{(1-p)T}{pm}\overline{F}(x). \end{aligned} \tag{242}$$

Теперь теоремы 23 и (238) вытекают из (241)–(242) ввиду теоремы 28.

Похожим образом теорема 29 позволяет получить асимптотику плотности меры π.

Теорема 30. *Предположим что распределение $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ взято из класса $\mathscr{S}^*$ и что распределение F имеет плотность f на $(0,\infty)$ и что эта плотность имеет длинный хвост. Тогда распределение π имеет плотность на $(0,\infty)$, эквивалентную $\overline{F}(x)/m$ при $x \to \infty$.*

Действительно, если плотность f распределения F имеет длинный хвост, то по лемме 44 (при $v(x) = f(x)$) G имеет плотность g на интервале $(0,\infty)$, обладающую длинным хвостом и удовлетворяющую эквивалентности

$$g(x) \sim \frac{1-p}{pm}\overline{F}(x).$$

Далее, если распределение $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ принадлежит классу $\mathscr{S}^*$, то плотность G субэкспоненциальна. Плотность распределения π можно представить в виде

$$(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}p^k g^{*k}(x),$$

и по теореме 29(i) она эквивалентна

$$g(x)(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}kp^k \sim \overline{F}(x)/m \quad \text{при } x\to\infty. \tag{243}$$

З а м е ч а н и е 17. Утверждение теоремы 30 является новым. В работе [37, предложение 1] утверждается, что такая же асимптотика может быть получена при несколько других условиях.

35.2. Сложный пуассоновский процесс. Пусть F — распределение в $\mathbf{R}_+$ и μ — положительная константа. Пусть G — сложное пуассоновское распределение

$$G(B) \;=\; e^{-\mu}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mu^n}{n!}F^{*n}(B).$$

Теорема 31. *Пусть* $0 < T \leqslant \infty$. *Если* $T < \infty$, *то дополнительно предполагаем что* $F \in \mathscr{L}_\Delta$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $F \in \mathscr{S}_\Delta$;

(ii) $G(x+\Delta) \sim \mu F(x+\Delta)$ *при* $x \to \infty$.

Доказательство вытекает из теоремы 28 при $p_n = \mu^n e^{-\mu}/n!$.

Случай $T = \infty$ был рассмотрен в [45, 48] для правильно меняющихся хвостов распределения и в [55] для субэкспоненциальных хвостов.

35.3. Безгранично делимые распределения. Пусть F — произвольное безгранично делимое распределение в $[0,\infty)$. Преобразование Лапласа безгранично делимого распределения F может выть записано в виде

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}F(dx) \;=\; e^{-a\lambda-\int_0^\infty(1-e^{-\lambda x})\nu(dx)}$$

(см., например, [29, p. 450]). Здесь $a \geqslant 0$ — константа и мера Леви ν — борелевская мера в $(0,\infty)$, обладающая свойствами $\mu = \nu(1,\infty) < \infty$ и $\int_0^1 x\nu(dx) < \infty$. Положим $G(B) = \nu(B\cap(1,\infty))/\mu$.

Соотношения между поведением хвостов меры F и соответствующей меры Леви ν были рассмотрены в теореме 1 в [55]. Мы докажем следующий локальный аналог этого результата.

Теорема 32. *Пусть* $0 < T \leqslant \infty$. *Если* $T < \infty$, *то предположим дополнительно, что* $G \in \mathscr{L}_\Delta$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $G \in \mathscr{S}_\Delta$;

(ii) $\nu(x+\Delta) \sim F(x+\Delta)$ *при* $x \to \infty$.

Доказательство. Как отмечалось в [55], распределение F допускает представление $F = F_1 * F_2$, где $F_1(x,\infty) = O(e^{-\varepsilon x})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и

$$F_2(B) \ = \ e^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^n}{n!}G^{*n}(B).$$

Теперь по теореме 28 при $p_n = \mu^n e^{-\mu}/n!$ имеем

$$F_2(x+\Delta) \sim \mu G(x+\Delta) = \nu(x+\Delta) \quad \text{as } x \to \infty.$$

Так как $F_1(x+\Delta) = o(G(x+\Delta))$ при $x \to \infty$, то по лемме 34 справедливо

$$F(x+\Delta) = (F_1 * F_2)(x+\Delta) \sim F_2(x+\Delta) \sim \nu(x+\Delta).$$

35.4. Ветвящиеся процессы. В настоящем параграфе рассматривается предельное поведение докритических ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста, причём Malthusian параметр не существует.

Пусть $h(z)$ — производяшая функция числа родившихся частиц ветвящегося процесса с превращениями, зависящими от возраста, причём продолжительность жизни имеет распределение F (основные факты можно найти в [39, гл. IV], [63, гл. VI]). Предполагаем, что процесс докритический, т. е. $A \equiv h'(1) < 1$. Обозначим через $Z(t)$ число частиц в момент времени t. Известно (см., например, [39, гл. IV, § 5] или [30]), что $A(t) = \mathbf{E}Z(t)$ допускает представление

$$A(t) \ = \ (1-A)\sum_{n=1}^{\infty}A^{n-1}(1-F^{*n}(t)). \tag{244}$$

В [30] для достаточно малых значений A и затем в [47, 46] для любого $A < 1$ было доказано, что $A(t) \sim \overline{F}(t)/(1-A)$ при $t \to \infty$, при условии что $F \in \mathscr{S}$.

Применение теоремы 28 при $p_n = (1-A)A^{n-1}$ (см. также лемму 45) приводит к следующей

Теорема 33. *Если $F \in \mathscr{L}_\Delta$, то следующие утверждения эквивалентны:*
(i) $F \in \mathscr{S}_\Delta$;
(ii) $A(t) - A(t+T) \sim F(t+\Delta)/(1-A)$ *при* $t \to \infty$.

§ 36. Функция восстановления и основная теорема восстановления

Пусть G — неотрицательная мера в $(0,\infty)$. Всюду предполагаем, что $\theta \leqslant 1$, где $\theta = G(0,\infty)$. Тогда мера восстановления

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}$$

корректно определена и конечна на компактных множествах. Если, кроме того, $\theta < 1$, то U является конечной мерой, причём $U[0,\infty) = (1-\theta)^{-1}$. Эти и другие основные факты из теории восстановления можно найти в, например, [29] или [32].

Теорема восстановления Блекуэла утверждает, что когда $\theta = 1$ и G нерешётчато, то $U(x+\Delta) \sim T/\mu_G$, где μ_G — среднее значение G. Если $\theta < 1$ и G имеет тонкий хвост, то стандартная техника (см. [32], VI.5) позволяет доказать экспоненциальное убывание $U(x+\Delta)$. Колёрт и Коэн [45] изучали асимптотическое поведение в некотором специальном случае толстых хвостов, когда $\theta < 1$ и $T = \infty$. Далее мы приводим более полную версию этих утверждений, в том числе с локальной точки зрения. Будем говорить что $G \in \mathscr{S}_\Delta$, если $F \in \mathscr{S}_\Delta$, где F — вероятностная мера G/θ.

Лемма 45. *Предположим* $0 < \theta < 1$. *Если* $T < \infty$, *предположим дополнительно, что* $G \in \mathscr{L}_\Delta$. *Тогда* $U(x+\Delta) \sim (1-\theta)^{-2} G(x+\Delta)$ *при* $x \to \infty$ *тогда и только тогда, когда* $G \in \mathscr{S}_\Delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 28

$$U(x+\Delta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x+\Delta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n F^{*n}(x+\Delta)$$

асимптотически эквивалентно

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\theta^n F(x+\Delta) \;=\; \frac{\theta}{(1-\theta)^2} F(x+\Delta) \;=\; \frac{1}{(1-\theta)^2} G(x+\Delta)$$

тогда и итолько тогда, когда $G \in \mathscr{S}_\Delta$.

Можно также использовать и представление $U = H/(1-\theta)$, где H — распределение случайной суммы $X_1 + \cdots + X_\tau$, где $\mathbf{P}(\tau = n) = (1-\theta)\theta^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и X_k — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $F = G/\theta$ (см. [32] предложение 2.6 стр. 114). Поэтому по теореме 28

$$\begin{aligned} U(x+\Delta) \;&=\; \frac{H(x+\Delta)}{1-\theta} \;\sim\; \frac{\mathbf{E}\tau F(x+\Delta)}{1-\theta} \\ &=\; \frac{\theta}{(1-\theta)^2} F(x+\Delta) \;=\; \frac{1}{(1-\theta)^2} G(x+\Delta). \end{aligned}$$

Обратимся теперь к уравнению восстановления

$$Z(x) \;=\; z(x) + \int_0^x Z(x-y)\, G(dy), \quad x \geqslant 0, \tag{245}$$

где $z \geqslant 0$ и z локально ограничены. Вместе с $\theta \leqslant 1$ этого вполне достаточно, чтобы гарантировать единственное локально ограниченное решение уравнению

$$Z(x) = \int_0^x z(x-y) U(dy).$$

Основная теорема восстановления утверждает, что $Z(x)$ имеет предел

$$\mu_G^{-1} \int_0^\infty z(y) dy$$

в случае, когда $\theta = 1$. Экспоненциальные асимптотики $Z(x)$ в случае $\theta < 1$ также хорошо известны (см. [29] или [32], VI.5) и нашли многочисленные применения. Так что несколько удивительно, что асимптотики в случае тяжёлых хвостов и $\theta < 1$ не обсуждались до того как возникло некоторое специфическое приложение у Asmussen [34]. Сформулированные там результаты в большей степени интуитивны, но доказательства эвристичны и при этом нет точной формулировки условий. Следуя подходу, изложенному в предыдущих параграфах, мы можем предложить точную теорию, относящуюся к этой ситуации. Докажем следующую теорему (определение непосредственно интегрируемой по Риману функции см. в [29], [32]):

Теорема 34. *Пусть $\theta < 1$ и положим $g(x) = G(x, x+1]$, $I = \int_0^\infty z(y)dy$. Тогда*

(i) *если $G \in \mathscr{S}_\Delta$ для любого $T < \infty$, функция z непосредственно интегрируема по Риману и $z(x)/g(x) \to 0$, то*

$$Z(x) \sim \frac{I}{(1-\theta)^2} g(x);$$

(ii) *если $G \in \mathscr{S}_\Delta$ для любого $T < \infty$, функция z непосредственно интегрируема по Риману и $z(x)/g(x) \to c \in (0, \infty)$, то*

$$Z(x) \sim \left(\frac{I}{(1-\theta)^2} + \frac{c}{1-\theta}\right) g(x);$$

(iii) *если вероятностная плотность $z(y)/I$ субэкспоненциальна, то в случае $z(x)/g(x) \to \infty$ имеем*

$$Z(x) \sim \frac{1}{1-\theta} z(x).$$

Доказательство. Условия пунктов (i) и (ii) влекут $G(x, x+1/n] \sim g(x)/n$ для любого n и $g(x+y)/g(x) \to 1$ равномерно по $|y| < y_0 < \infty$. Применяя теперь лемму 32 к вероятностной мере $(1-\theta)U$ и обращаясь к лемме 45 при $T = 1/n$, получаем, что для любого n можно найти $h_n(x) \to \infty$ такое, что $h_n(x) < x/2$ и

$$U(x-(k+1)/n, x-k/n] \sim \frac{g(x)}{n(1-\theta)^2} \text{ равномерно по } k \leqslant nh_n(x), \quad (246)$$

$$\int_0^{x-h_n(x)} g(x-y)U(dy) \ \sim \ (1-\theta)^{-1}g(x), \tag{247}$$

$$\int_{h_n(x)}^{x-h_n(x)} g(x-y)U(dy) \ = \ o(g(x)) \tag{248}$$

(не ограничивая общности, предполагаем $nh_n(x)$ натуральным). Используем представление $Z(x) = J_{1,n} + J_{2,n} + J_{3,n}$, где

$$\begin{aligned} J_{1,n} &= \int_0^{h_n(x)} z(x-y)U(dy), \\ J_{2,n} &= \int_{h_n(x)}^{x-h_n(x)} z(x-y)U(dy), \\ J_{3,n} &= \int_{x-h_n(x)}^{x} z(x-y)U(dy). \end{aligned}$$

В случае (i) в случае необходимости заменим h_n на меньшее значение, чтобы $z(x-y)/g(x) \to 0$ равномерно по $|y| \leqslant h_n(x)$ (это возможно, поскольку $g \in \mathscr{L}$). Тогда $J_{1,n} = o(g(x))$. Далее,

$$\begin{aligned} J_{2,n} &= o(1) \int_{h_n(x)}^{x-h_n(x)} g(x-y)U(dy) \\ &= o(g(x)) \end{aligned}$$

ввиду (248). Наконец, если $\overline{z}_n(x) = \sup_{|y-x|\leqslant 1/n} z(y)$, то (246) влечёт

$$\begin{aligned} J_{3,n} &\leqslant \sum_{k=0}^{nh_n(x)} \overline{z}_n(k/n)U(x-(k+1)/n, x-k/n] \\ &\sim \frac{g(x)/n}{(1-\theta)^2} \sum_{k=0}^{nh_n(x)} \overline{z}_n(k/n) \\ &\sim \frac{g(x)/n}{(1-\theta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z}_n(k/n) \end{aligned}$$

Так как z непосредственно интегрируема по Риману, то $n^{-1}\sum \cdots \to I$ при $n \to \infty$, откуда $\limsup Z(x)/g(x) \leqslant (1-\theta)^{-2} I$ в (i). Доказательство неравенства $\liminf Z(x)/g(x) \geqslant (1-\theta)^{-2} I$ аналогично.

В случае (ii) можем считать, что $z(x-y)/g(x) \to c$ равномерно по $|y| \leqslant h_n(x)$ и тогда

$$\begin{aligned} J_{1,n} &\sim cg(x)U(h_n(x)) \\ &\sim cg(x)U(\infty) \\ &= cg(x)(1-\theta)^{-1}. \end{aligned}$$

Что касается слагаемого $J_{2,n}$, следует заменить $o(1)$ на $O(1)$, но при этом в результате всё равно получаем $o(g(x))$. Наконец, $J_{3,n}$ можно оценить как и в пункте (i). Пункт (ii) доказан.

В случае (iii) рассмотрим вероятностную меру K с плотностью $z(x)/I$. Мера K является Δ-субэкспоненциальной для любого Δ. Возьмём $\Delta = (0,1]$ и запишем

$$\begin{aligned} \int_0^x z(x-y)U(dy) &= \int_0^{x-h} z(x-y)U(dy) + \int_{x-h}^x z(x-y)U(dy) \\ &= I_1(x,h) + I_2(x,h), \\ (K*U)(x+\Delta) &= \int_0^{x-h} K(x-y+\Delta)U(dy) + \int_{x-h}^{x+1} K(x-y+\Delta)U(dy) \\ &= I_1'(x,h) + I_2'(x,h). \end{aligned}$$

Для любого фиксированного h имеем при $x \to \infty$

$$\begin{aligned} I_2(x,h) &\leqslant h \cdot \sup_{y \leqslant h} |z(y)| \cdot U(x-h,x] \\ &= o(z(x)) \end{aligned}$$

и, в силу тех же причин $I_2'(x,h) = o(z(x))$. Поэтому можно выбрать $h(x) \uparrow \infty$ такую, что по прежнему $I_2(x,h(x)) = o(z(x))$ и $I_2'(x,h(x)) = o(z(x))$. Поскольку $z \in \mathscr{L}$, то $z(x) \sim I \cdot K(x+\Delta)$ и $I_1(x,h(x)) \sim I \cdot I_1'(x,h(x))$. Объединяя эти оценки, получаем

$$\int_0^x z(x-y)U(dy) \sim I \cdot (K*U)(x+\Delta).$$

Применение леммы 34 при $G_1 = K$, $G_2 = U(1-\theta)$, $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$ приводит окончательно к асимптотике

$$I \cdot (K * U)(x+\Delta) \ \sim \ \frac{I}{1-\theta} K(x+\Delta) \sim \frac{z(x)}{1-\theta}.$$

§ 37. Равномерная по времени асимптотика хвостов частичных максимумов сумм

Как и ранее, рассматриваются суммы $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ независимых одинаково распределённых случайных величин с отрицательным средним значением $a \equiv \mathbf{E}\xi < 0$. По усиленному закону больших чисел $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$ почти наверное и, следовательно, семейство распределений максимумов

$$M_n = \max\{S_k, 0 \leqslant k \leqslant n\}, \quad n \geqslant 1,$$

слабо компактно. Основной задачей настоящего параграфа является изучение асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}\{M_n > x\}$ при $x \to \infty$ в случае распределения F отдельного слагаемого типа субэкспоненциального; нас интересуют как фиксированные значения временного параметра n, так и случай неограниченно возрастающего n. Точнее, будут получены утверждения об асимптотическом поведении вероятности $\mathbf{P}\{M_n > x\}$, равномерные по $n \geqslant 1$.

Пусть G — произвольное распределение в $\mathbf{R}$ с неограниченным справа носителем и конечным средним значением. Для любого $t > 0$ введём в рассмотрение распределение G_t в $\mathbf{R}^+$ такое, что

$$\overline{G_t}(x) = \min\left(1, \int_x^{x+t} \overline{G}(u)du\right), \quad x > 0, \tag{249}$$

(здесь и всюду в дальнейшем под интегралом в пределах от x_1 до x_2 понимается интеграл по множеству $(x_1, x_2]$). Семейство распределений $\{G_t, t > 0\}$ является стохастически возрастающим семейством.

Определение 11. Будем говорить, что субэкспоненциальное распределение G является *сильно субэкспоненциальным* (и писать $G \in \mathscr{S}_{\rm str}$), если $\overline{G_t{*}G_t}(x)/\overline{G_t}(x) \to 2$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \in [1,\infty]$.

По определению $\mathscr{S}_{\rm str} \subseteq \mathscr{S}$. Из леммы 30 также вытекает, что всякое $\mathscr{S}^*$-распределение F является сильно субэкспоненциальным. Таким образом,

$$\mathscr{S}^* \subseteq \mathscr{S}_{\rm str} \subseteq \mathscr{S}. \tag{250}$$

В [97] доказывается, что принадлежность $G \in \mathscr{S}$ не влечёт субэкспоненциальность распределения G_∞, а также одновременная субэкспоненциальность распределений G и G_∞ не влечёт принадлежность распределения G классу $\mathscr{S}^*$. Поскольку распределения Парето (при $\alpha > 1$), логнормальное и Вейбулла принадлежат классу $\mathscr{S}^*$, то все они являются сильно субэкспоненциальными. Некоторые качественные достаточные условия принадлежности распределения классу $\mathscr{S}_{\rm str}$ приведены в § 39.1.

Рассмотрим также однородную цепь Маркова $W = \{W_n\}$, определяемую равенством

$$W_{n+1} = (W_n + \xi_{n+1})^+.$$

Она образует однородную по времени цепь Маркова, являющуюся случайным блужданием с задержкой в нуле. Как отмечалось во введении (см. (5)), распределение цепи W в момент времени n при нулевом начальном условии $W_0 = 0$ совпадает с распределением M_n. Поэтому изучение асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{M_n > x\}$ равносильно изучению асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{W_n > x | W_0 = 0\}$. Отметим, что конечномерные распределения последовательностей $\{M_n\}$ и $\{W_n\}$ не совпадают.

Теорема 23 гласит, что асимптотика

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{n\geqslant 1} S_n > x\Big\} \ \sim \ \frac{1}{|a|}\overline{F}_I(x)$$

имеет место при $x \to \infty$ в том и только том случае, когда интегральное распределение F_I на полупрямой $\mathbf{R}^+$ является субэкспоненциальным.

Оказывается, что для максимумов на конечном интервале времени верен следующий результат:

Теорема 35. *Пусть распределение случайной величины* $\xi\mathbf{I}\{\xi\geqslant 0\}$ *сильно субэкспоненциальное. Тогда*

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \;=\; \frac{1+\varepsilon_n(x)}{|a|}\int_x^{x+n|a|}\overline{F}(u)du,$$

где $\varepsilon_n(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *равномерно по* $n \geqslant 1$.

Утверждение теоремы 35 вытекает из лемм 46 и 52, доказанных в § 38 и 41 соответственно. Учитывая первое из включений в (250), можно сформулировать следующее

Следствие 16. *Если распределение* F *принадлежит классу* $\mathscr{S}^*$, *то справедливо утверждение теоремы* 35.

В случае, когда $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ и функция $\overline{F}(u)$ правильно меняется на бесконечности, аналогичная эквивалентность в области $n \leqslant cx^2\ln x$ установлена другими методами в [9, теорема 6]. Относительно более ранних результатов следует отметить статьи [24] и [16]. В работе [24] рассмотрен случай, когда функция $\overline{F}(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \in (-\infty, -2)$. Полагая присутствующую в теореме 2 этой работы функцию $g(t)$ равной $1 + at/\gamma$, а x равным γn, можно вывести оттуда для любого фиксированного $\gamma > 0$ асимптотику

$$\mathbf{P}\{S_k > \gamma n \text{ для некоторого } k \leqslant n\} \;\sim\; n\mathbf{P}\{\xi \geqslant \gamma n\}c_\alpha,$$

где $c_\alpha = \int_0^1 [g(t)]^{-\alpha}dt$. Эта асимптотика совпадает с предлагаемой нами, если положить $x = \gamma n$.

Такая же, как и в [24], форма ответа в случае $\alpha \in (-2, -1)$ приведена в [16].

§ 38. Оценка снизу для вероятностей больших уклонений максимума сумм

В следующей лемме при минимальных ограничениях на распределение F вероятность $\mathbf{P}\{M_n > x\}$ оценивается снизу при больших значениях x.

Лемма 46. *Пусть распределение F имеет длинный хвост. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся x_1 такое, что при $x \geqslant x_1$ и $n \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{|a|} \int_x^{x+n|a|} \overline{F}(u)du.$$

Доказательство. Ввиду равенства (5) достаточно доказать соответствующее утверждение для цепи W_n с нулевым начальным состоянием $W_0 = 0$. Как отмечалось выше, семейство максимумов $\{M_n, n \geqslant 1\}$ ограничено по вероятности. Поэтому семейство $\{W_n, n \geqslant 1\}$ также ограничено по вероятности, т. е. имеет место сходимость

$$\inf_{n \geqslant 1} \mathbf{P}\{W_n \leqslant x\} \to 1 \text{ при } x \to \infty. \tag{251}$$

Рассмотрим событие A_{in}, $i \in [1, n]$, состоящее в том, что $W_{i-1} \leqslant x$ и $W_j > x$ для любого $j \in [i, n]$. Поскольку события A_{in}, $i \in [1, n]$, не пересекаются, а их объединение равно событию $\{W_n > x\}$, то по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{W_n > x\} \;=\; \mathbf{P}\{A_{1n}\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_{nn}\}. \tag{252}$$

Пусть $\delta > 0$; положим $b = |a| + \delta$. Для $v \geqslant 0$ введём вероятность $p_i(x+v)$ равенством

$$p_i(x+v) = \mathbf{P}\{W_j > x \text{ для любого } j \leqslant i | W_0 = x+v\}.$$

Ввиду определения W при начальном состоянии $W_0 = x + v$ и любом i справедливо неравенство $W_i \geqslant x + v + \xi_1 + \dots + \xi_i$. Поэтому

$$p_i(x+v) \geqslant \mathbf{P}\{v + \xi_1 + \dots + \xi_j > 0 \text{ для любого } j \leqslant i\}.$$

Полагая здесь $v = U + ib$, по усиленному закону больших чисел получаем равномерную по x и i сходимость

$$p_i(x + U + ib) \to 1 \text{ при } U \to \infty. \tag{253}$$

Так как совместное наступление событий $\{W_{i-1} \leqslant x\}$, $\{W_i > x + U + (n-i)b\}$ и $\{W_j > x \text{ при } j \in [i+1, n]\}$ влечёт событие A_{in}, то справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \ \geqslant \ \int_0^x \mathbf{P}\{W_{i-1} \in dy\} \int_{U+(n-i)b}^\infty \mathbf{P}\{W_i \in x + du | W_{i-1} = y\} p_{n-i}(x+u).$$

Поскольку функция $p_i(x+u)$ не убывает по u,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_{in}\} \ \geqslant \ & p_{n-i}(x + U + (n-i)b) \\ & \times \int_0^x \mathbf{P}\{W_{i-1} \in dy\} \mathbf{P}\{W_i > x + U + (n-i)b | W_{i-1} = y\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что при любом $y \in [0, x)$

$$\mathbf{P}\{W_i > x + U + (n-i)b | W_{i-1} = y\} \ \geqslant \ \mathbf{P}\{\xi > x + U + (n-i)b\},$$

из последнего неравенства получаем

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \ \geqslant \ p_{n-i}(x + U + (n-i)b) \mathbf{P}\{W_{i-1} \leqslant x\} \mathbf{P}\{\xi > x + U + (n-i)b\}.$$

В силу этой оценки и сходимости (253) найдётся достаточно большое U такое, что при всех x, i и n справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \ \geqslant \ (1 - \delta/2) \mathbf{P}\{W_{i-1} < x\} \mathbf{P}\{\xi > x + U + (n-i)b\}.$$

Отсюда, ввиду сходимости (251), имеем при достаточно больших x

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \;\geqslant\; (1-\delta)\overline{F}(x+U+(n-i)b),$$

равномерно по i и n. Используя последнее неравенство, выводим из равенства (252) оценку, верную для достаточно больших x:

$$\mathbf{P}\{W_n > x\} \;\geqslant\; (1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\overline{F}(x+U+(n-i)b).$$

Так как функция $\overline{F}(v)$ имеет длинный хвост, то равномерно по n

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}(x+U+(n-i)b) \;\sim\; \frac{1}{b}\int_x^{x+nb}\overline{F}(v)dv \;\text{ при } x\to\infty.$$

Поскольку $b=|a|+\delta$ и $\delta>0$ выбрано произвольно, отсюда вытекает утверждение леммы.

§ 39. Некоторые свойства распределений класса $\mathscr{S}_{\rm str}$

39.1. Условия принадлежности распределения классу $\mathscr{S}_{\rm str}$. Пусть G — распределение с длинным хвостом в $\mathbf{R}^+$ с конечным средним значением. Для любого $U\in(0,x)$ имеем равенства (распределение G_t определено в (249))

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G_t{*}G_t}(x)}{\overline{G_t}(x)} &= \int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}dG_t(u)+1 &(254)\\ &= \left(\int_0^U+\int_U^x\right)\frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}dG_t(u)+1. &(255)\end{aligned}$$

Так как функция $\overline{G_t}(y)$ имеет длинный хвост, то при любом фиксированном U

$$\int_0^U \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}dG_t(u)\to G_t(U)$$

при $x\to\infty$ равномерно по $t\geqslant 1$. Следовательно, имеет место

Лемма 47. *Пусть распределение G имеет длинный хвост. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $G \in \mathscr{S}_{\rm str}$;

(ii) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся* U *и* x_0 *такие, что для всех* $x \geqslant x_0$ *и* $t \geqslant 1$ *выполняется*

$$\int_U^x \overline{G_t}(x-u)dG_t(u) \leqslant \varepsilon\overline{G_t}(x);$$

(iii) *существует последовательность* $U(x) \to \infty$ *такая, что* $\overline{G}(x - U(x)) \sim \overline{G}(x)$ *и равномерно по* $t \geqslant 1$

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\,dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \text{ при } x \to \infty;$$

(iv) *для любой последовательности* $U(x) \to \infty$ *такой, что* $\overline{G}(x-U(x)) \sim \overline{G}(x)$, *выполняется равномерное по* $t \geqslant 1$ *соотношение*

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\,dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \text{ при } x \to \infty.$$

В следующей лемме формулируется свойство замкнутости класса $\mathscr{S}_{\rm str}$ относительно отношения слабой эквивалентности хвостов распределений (терминология из [68]).

Лемма 48. *Пусть* G *и* H *— два распределения с длинными хвостами в* $\mathbf{R}^+$. *Если* $G \in \mathscr{S}_{\rm str}$ *и* $c_1\overline{G}(x) \leqslant \overline{H}(x) \leqslant c_2\overline{G}(x)$ *для некоторых* c_1 *и* c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, *то* H *также попадает в класс* $\mathscr{S}_{\rm str}$.

Доказательство. Так как распределение H имеет длинный хвост, а G сильно субэкспоненциальное, по лемме 47 найдётся последовательность $U(x) \to \infty$ такая, что $\overline{G}(x - U(x)) \sim \overline{G}(x)$, $\overline{H}(x - U(x)) \sim \overline{H}(x)$ и

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\,dG_t(u) \;=\; o(\overline{G_t}(x)) \tag{256}$$

при $x \to \infty$ равномерно по $t \geqslant 1$. Поскольку $\overline{H}(x) \leqslant c_2\overline{G}(x)$, то после интегрирования по частям получаем

$$\int_{U(x)}^x \overline{H_t}(x-u)\,dH_t(u) \;\leqslant\; c_2\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\,dH_t(u)$$

$$= \; -c_2\overline{G_t}(x-u)\overline{H_t}(u)\Big|_{U(x)}^{x} + c_2\int_{U(x)}^{x}\overline{H_t}(u)\,d_u\overline{G_t}(x-u)$$
$$\leqslant \; c_2\overline{G_t}(x-U(x))\overline{H_t}(U(x)) + c_2^2\int_{U(x)}^{x}\overline{G_t}(u)\,d_u\overline{G_t}(x-u).$$

Отсюда ввиду (256) и условия $\overline{H}(x) \geqslant c_1\overline{G}(x)$ вытекает соотношение

$$\int_{U(x)}^{x}\overline{H_t}(x-u)\,dH_t(u) \; = \; o(\overline{G_t}(x)) = o(\overline{H_t}(x)),$$

которое в силу леммы 47 завершает доказательство.

39.2. Некоторые свойства свёрток сильно субэкспоненциального распределения. Пусть G — сильно субэкспоненциальное распределение в $\mathbf{R}^+$. Настоящий раздел содержит аналоги стандартных свойств субэкспоненциальных распределений для распределений класса $\mathscr{S}_{\mathrm{str}}$.

Лемма 49. *Для любого натурального k асимптотика хвоста k-ой свёртки распределения G_t имеет вид $\overline{G_t^{k*}}(x) \sim k\overline{G_t}(x)$ при $x\to\infty$ равномерно по $t\geqslant 1$.*

Доказательство следует по индукции из равенства для хвоста свёртки $G_t^{(k+1)*}$

$$\overline{G_t^{(k+1)*}}(x) \; = \; \left(\int_0^U + \int_U^x\right)\overline{G_t^{k*}}(x-u)\,dG_t(u) + \overline{G_t}(x) \tag{257}$$

и из леммы 47.

Докажем следующую оценку для хвоста k-й свёртки меры G_t.

Лемма 50. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что при любых $x \geqslant 0$, $t \geqslant 1$ и $k = 1, 2, ...$ имеет место неравенство*

$$\overline{G_t^{k*}}(x) \leqslant c\overline{G_t}(x)(1+\varepsilon)^k.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду сильной субэкспоненциальности распределения G из (254) вытекает существование числа $x_0 = x_0(\varepsilon)$ такого, что при любых $x \geqslant x_0$ и $t \geqslant 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \leqslant 1+\varepsilon. \tag{258}$$

Обозначим

$$A_k \equiv \sup_{x\geqslant 0,\ t\geqslant 1} \frac{\overline{G_t^{k*}}(x)}{\overline{G_t}(x)}.$$

Оценим сверху A_{k+1} через A_k. В силу (257)

$$A_{k+1} \ \leqslant \ \sup_{x\geqslant 0, t\geqslant 1} \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) + 1. \tag{259}$$

По определению A_k имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \ &= \ \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x-u)} \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \\ &\leqslant \ A_k \int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u), \end{aligned}$$

Ввиду (258), имеем отсюда верную при $x \geqslant x_0$ оценку

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \ \leqslant \ A_k(1+\varepsilon).$$

Кроме того, при $x < x_0$ и $t \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \ &\leqslant \ \frac{1}{\overline{G_t}(x_0)} \\ &\leqslant \ \frac{1}{\min(1, \overline{G}(x_0+1))} \\ &\equiv \ c_1(x_0) < \infty. \end{aligned}$$

Из двух последних оценок следует, что для любых $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \ \leqslant \ A_k(1+\varepsilon) + c_1.$$

Подставляя эту оценку в (259), получаем $A_{k+1} \leqslant A_k(1+\varepsilon) + c_1 + 1$. Отсюда вытекает неравенство $A_{k+1} \leqslant (c_1+1)(k+1)(1+\varepsilon)^k$, которое эквивалентно оценке леммы.

§ 40. Оценка сверху для хвоста распределения первой до момента времени n неотрицательной суммы

Положим $\eta = \min\{k \geqslant 1 : S_k > 0\}$ — номер первой положительной лестничной высоты (считаем $\min\varnothing = \infty$), $\eta^{[n]} = \min\{k \in [1,n] : S_k > 0\}$ — номер первой до момента времени n положительной лестничной высоты и $\chi^{[n]} = S_{\eta^{[n]}}$ — первая до момента времени n положительная сумма.

Поскольку $\mathbf{E}\xi < 0$, то η, $\eta^{[n]}$ и $\chi^{[n]}$ — несобственные случайные величины; положим $p = \mathbf{P}\{\eta < \infty\}$, $p^{[n]} = \mathbf{P}\{\eta^{[n]} < \infty\}$. При любом n справедливы неравенства

$$0 < \mathbf{P}\{\xi \geqslant 0\} \leqslant p^{[n]} \leqslant p < 1. \tag{260}$$

Кроме того,

$$p^{[n]} \uparrow p \quad \text{при } n \to \infty. \tag{261}$$

Справедлива следующая оценка сверху для вероятности события $\{\chi^{[n]} > x\}$ при больших значениях n и x.

Лемма 51. *Пусть распределение F имеет длинный хвост. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа n_1 и x_1 такие, что при $n \geqslant n_1$ и $x \geqslant x_1$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} > x\} \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1-p}{|a|}\int_x^{x+n|a|} \overline{F}(u)du.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} > x\} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{S_i \leqslant 0 \text{ при всех } i \leqslant j-1,\ S_j > x\}. \tag{262}$$

Положим

$$\psi_j(B) = \mathbf{P}\{S_i \leqslant 0 \text{ при всех } i \leqslant j,\ S_j \in B\},\ B \subseteq (-\infty, 0].$$

По формуле полной вероятности справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{S_i \leqslant 0 \text{ при всех } i \leqslant j-1,\ S_j > x\} = \int_x^\infty F(dy)\psi_{j-1}(x-y,0].$$

Подставляя это равенство в (262), получаем

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} > x\} = \int_x^\infty F(dy) \sum_{j=1}^n \psi_{j-1}(x-y,0]. \tag{263}$$

Оценим сумму в последнем представлении. Для любого $N < n$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_{j-1}(x-y,0] &\leqslant \\ &\leqslant\ N + \sum_{j=N+1}^n \mathbf{P}\{S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0, S_j > x-y\} \\ &=\ N + \mathbf{P}\{S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\} \sum_{j=N+1}^n \mathbf{P}\{S_j > x-y | S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\{S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\} \to 1-p \ \text{ при } N \to \infty, \tag{264}$$

то для любого $\delta > 0$ найдется N такое, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_{j-1}(x-y,0] &\leqslant\ N + (1-p+\delta) \sum_{j=N+1}^n \mathbf{P}\{S_j > x-y | S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\} \\ &\leqslant\ N + (1-p+\delta) \sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_j > x-y | S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

Асимптотика функции восстановления не зависит от значений первых N слагаемых. Поэтому для любого фиксированного N в силу теоремы восстановления для любого $\delta > 0$ найдется t такое, что при $y - x \geqslant t$

$$\sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_{j-1} > x-y | S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\} \ \leqslant\ (1+\delta)\frac{y-x}{|a|}.$$

Кроме того, при $y \in (x, x+t]$ справедлива оценка

$$\sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_{j-1} > x-y | S_1 \leqslant 0, \ldots, S_N \leqslant 0\}$$

$$\leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{j-1} > -t | S_1 \leqslant 0, \dots, S_N \leqslant 0\}$$
$$= \widetilde{c} = \widetilde{c}(-t) < \infty.$$

Из двух последних оценок вытекает неравенство, верное при любом $y > x$ ($\widehat{c} = N + \widetilde{c}$):

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}(x-y, 0] \ \leqslant \ (1-p+\delta)(1+\delta)\frac{y-x}{|a|} + \widehat{c}. \tag{265}$$

При любом $y \geqslant x$ имеем также следующие неравенство и асимптотику

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}(x-y, 0] \ &\leqslant \ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{S_1 \leqslant 0, S_2 \leqslant 0, \dots, S_j \leqslant 0\} \\ &\sim \ n(1-p) \end{aligned}$$

при $n \to \infty$, ввиду (264). Следовательно, при достаточно больших n

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}(x-y, 0] \ \leqslant \ n(1-p+\delta). \tag{266}$$

Обозначим

$$g(x, y) \equiv (1-p+\delta) \min\left((1+\delta)\frac{y-x}{|a|}, n\right).$$

Подставляя оценки (265) и (266) в (263), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi^{[n]} > x\} \ &\leqslant \ \widehat{c}\int_x^{\infty} F(dy) + \int_x^{\infty} F(dy) g(x, y) \\ &= \ \widehat{c}\overline{F}(x) - \overline{F}(y) g(x, y)\Big|_x^{\infty} + \int_x^{\infty} \overline{F}(y) d_y g(x, y) \\ &= \ \widehat{c}\overline{F}(x) + (1-p+\delta)\frac{1+\delta}{|a|}\int_x^{x+n|a|/(1+\delta)} \overline{F}(y) dy. \end{aligned} \tag{267}$$

Поскольку функция $\overline{F}(x)$ имеет длинный хвост, то

$$\overline{F}(x) = o\left(\int_x^{x+n|a|/(1+\varepsilon)} \overline{F}(y) dy\right) \text{ при } n, x \to \infty.$$

Поэтому из (267) вытекает утверждение леммы.

§ 41. Оценка сверху для вероятностей больших уклонений максимума сумм

Определим собственную случайную величину $\widetilde{\chi}^{[n]}$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}^{[n]} \in B\} = \frac{\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \in B\}}{p^{[n]}}, \quad B \subseteq (0, \infty).$$

Пусть $\varepsilon > 0$; положим $b = (1+\varepsilon)(1-p)/p|a|$. В силу леммы 51 и сходимости (261) существуют n_0 и x_0 такие, что для любых $n \geqslant n_0$ и $x \geqslant x_0$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}^{[n]} > x\} \ \leqslant \ b \int_x^{x+n|a|} \overline{F}(u)\, du. \tag{268}$$

Определим вероятностную меру G на полупрямой $\mathbf{R}^+$, положив

$$\overline{G}(x) = \min(1, b\overline{F}(x)) \ \text{ при } x \geqslant x_0 + 1, \quad \overline{G}(x_0+1) = 1. \tag{269}$$

Тогда в силу (268) при $n \geqslant n_0$ и $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}^{[n]} > x\} \leqslant \overline{G_{n|a|}}(x). \tag{270}$$

Пусть $\widetilde{\chi}_1^{[n]}$, $\widetilde{\chi}_2^{[n]}$, … — независимые копии случайной величины $\widetilde{\chi}^{[n]}$. Одна из сумм S_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, превосходит уровень x лишь тогда, когда одна из лестничных высот превзошла этот уровень. Вероятность того, что i-ая лестничная высота существует, причем до момента времени n, не превосходит $(p^{[n]})^i$. Обозначим через $\widehat{p}_i^{[n]}$ условную вероятность i-й лестничной высоте быть последней в предположении, что она существует до момента времени n. Для любого фиксированного i имеем монотонную сходимость

$$\widehat{p}_i^{[n]} \downarrow 1 - p \ \text{ при } n \to \infty. \tag{271}$$

По формуле полной вероятности для любых x и n имеем неравенство

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant i \leqslant n} S_i > x\} \ \leqslant \ \sum_{i=1}^{n} (p^{[n]})^i \widehat{p}_i^{[n]} \mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1^{[n]} + \cdots + \widetilde{\chi}_i^{[n]} > x\}.$$

Пусть $N < n$. Разбивая последюю сумму на две и используя (260) и неравенства $\widehat{p}_i^{[n]} \leqslant \widehat{p}_{i+1}^{[n]}$, (270), получаем оценку

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \;\leqslant\; \widehat{p}_N^{[n]} \sum_{i=1}^{N} p^i \overline{G_{n|a|}^{i*}}(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} p^i \overline{G_{n|a|}^{i*}}(x), \tag{272}$$

верное для распределения F с длинным хвостом.

Далее считаем, что случайная величина ξ имеет сильно субэкспоненциальное распределение. Соответственно, в силу определения (269) и леммы 48 распределение G также сильно субэкспоненциальное. Имеет место

Лемма 52. *Пусть $F \in \mathscr{S}_{\text{str}}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует x_1 такое, что при всех $n \geqslant 1$ и $x \geqslant x_1$ справедлива оценка*

$$\mathbf{P}\{M_n > x\} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{|a|} \int_x^{x+n|a|} \overline{F}(u)du.$$

Доказательство. Поскольку временнóй параметр n принимает лишь счётное число значений и функция $\overline{F}(u)$ имеет длинный хвост, то достаточно проверить следующие два соотношения: при любом фиксированном n

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n > x\}}{\overline{F}(x)} = \frac{n}{|a|} \tag{273}$$

и

$$\limsup_{n,x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n > x\}}{\displaystyle\int_x^{x+n|a|} \overline{F}(u)du} \leqslant \frac{1}{|a|}. \tag{274}$$

Так как распределение F субэкспоненциальное, то равенство (5) позволяет проверить (273) по индукции. Действительно, при $n = 1$ имеем $X_1 = \xi_1^+$ и $\mathbf{P}\{X_1 > x\} = \overline{F}(x)$ при $x > 0$. Поскольку $\mathbf{P}\{X_{n+1} > x\} = \mathbf{P}\{X_n + \xi_{n+1} > x\}$ при $x > 0$, индукционный переход следует из стандартных свойств субэкспоненциальных распределений (см., например, доказательство теоремы 1 в [30] и предложения 1 в [55]).

Перейдем к проверке соотношения (274), исходя из оценки (272). Распределение G сильно субэкспоненциальное, поэтому по лемме 50 для любого $\delta > 0$ существует c_1 такое, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{G_{n|a|}}(x)} \sum_{i=N+1}^{\infty} p^i \overline{G^{i*}_{n|a|}}(x) \ \leqslant\ \frac{c_1[p(1+\delta)]^{N+1}}{1-p(1+\delta)}$$

равномерно по $n \geqslant 1$. Подставляя это неравенство в (272), а также используя (271) и лемму 49, получаем

$$\limsup_{n,x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n > x\}}{\overline{G_{n|a|}}(x)} \ \leqslant\ (1-p)\sum_{i=1}^{N} p^i i + \frac{c_1[p(1+\delta)]^{N+1}}{1-p(1+\delta)}.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора δ и N вытекает неравенство

$$\limsup_{n,x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n > x\}}{\overline{G_{n|a|}}(x)} \ \leqslant\ \frac{p}{1-p},$$

следствием которого в силу определения G является соотношение

$$\limsup_{n,x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n > x\}}{\displaystyle\int_x^{x+n|a|} \overline{F}(u)du} \ \leqslant\ \frac{1+\varepsilon}{|a|}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то справедливо (274). Лемма доказана.

§ 42. Достационарные распределения цепей Маркова в субэкспоненциальном случае

В настоящем параграфе рассматривается однородная во времени цепь Маркова X_n, $n = 0, 1, \ldots$ со значениями на вещественной прямой $\mathbf{R}$ и изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{X_n > x\}$ при $x \to \infty$ как при фиксированных, так и при растущих значениях времени n.

Пусть G — распределение в $\mathbf{R}$ с неограниченным справа носителем и конечным средним значением. Отметим, что распределение G, имеющее длинный хвост, для любого фиксированного $s > 0$ с необходимостью удовлетворяет соотношению

$$G_s(x) = o(G_t(x)) \quad \text{при } t, x \to \infty \tag{275}$$

(определение распределения G_t см. в (249)).

Одним из основных объектов изучения будут цепи с асимптотически однородным сносом, т. е. цепи, относительно которых предполагается лишь, что $\mathbf{E}\xi(y) \to m$ при $y \to \infty$. Для таких цепей в § 43 получены оценки снизу для вероятности $\overline{\pi}_n(x) = \mathbf{P}\{X_n > x\}$. В § 44 приводятся оценки сверху для этих вероятностей. На основании этих результатов доказывается равномерная по временно́му параметру теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для асимптотически однородной в пространстве цепи X.

Итак, в следующей теореме мы рассматриваем асимптотически однородную в пространстве цепь, т. е. предполагаем при $u \to \infty$ слабую сходимость $\xi(u) \Rightarrow \xi$, причём $\mathbf{E}\xi < 0$. Предполагаем также, что начальное распределение π_0 сосредоточено на множестве, ограниченном сверху, и имеет место сходимость по вариации (1).

Пусть ζ — неограниченная сверху случайная величина с распределением G и отрицательным средним значением. Предполагаем, что распределение случайной величины $\zeta\mathbf{I}\{\zeta \geqslant 0\}$ сильно субэкспоненциальное.

Теорема 36. *Пусть найдётся уровень U такой, что семейство случайных величин $\{|\xi(u)|, u > U\}$ обладает интегрируемой мажорантой и выполнено условие*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{u + \xi(u) > t\} &\leqslant \overline{G}(t) \text{ при } u \leqslant U, \\ \xi(u) &\leqslant_{\mathrm{st}} \zeta \text{ при } u > U, \end{aligned}$$

для $t \geqslant U$. Пусть для некоторой функции $c(u) \leqslant 1$ имеет место равномер-

ная по u сходимость

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi(u) > t\}}{\overline{G}(t)} \to c(u) \quad \text{\textit{при} } t \to \infty.$$

Тогда при $x \to \infty$ имеет место равномерное по $n \geqslant 1$ соотношение

$$\overline{\pi}_n(x) \;=\; (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \overline{G}(x + (n-k)|\mathbf{E}\xi|),$$

где постоянные c_k определяются равенствами

$$c_k \;=\; \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi_k(du).$$

В частности,

$$\overline{\pi}_n(x) = (c_\infty/|\mathbf{E}\xi| + o(1))\overline{G}_{n|\mathbf{E}\xi|}(x)$$

при n, $x \to \infty$, где

$$c_\infty \equiv \lim_{k\to\infty} c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi(du).$$

З а м е ч а н и е 18. В случае правильно меняющего на бесконечности хвоста распределения G из теоремы вытекает, что асимптотика при $n/x \to \infty$ вероятности $\overline{\pi}_n(x)$ имеет вид (если $c_\infty > 0$)

$$\overline{\pi}_n(x) \sim \frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\xi|} \overline{G}_I(x)$$

и, в частности, совпадает с асимптотикой хвоста инвариантной меры: $\overline{\pi}_n(x) \sim \overline{\pi}(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 36. В силу условий теоремы для любого $\varepsilon > 0$ найдутся случайная величина ζ_ε с распределением G_ε и уровень U_ε такие, что $\mathbf{E}\zeta_\varepsilon \leqslant \mathbf{E}\xi + \varepsilon$, $\mathbf{P}\{\zeta_\varepsilon > t\} = \mathbf{P}\{\zeta > t\}$ для всех достаточно больших значениях t и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{u + \xi(u) > t\} \quad &\leqslant \quad \overline{G}_\varepsilon(t) \;\; \text{при } u \leqslant U_\varepsilon, \\ \xi(u) \quad &\leqslant_{\mathrm{st}} \quad \zeta_\varepsilon \;\; \text{при } u > U_\varepsilon, \end{aligned}$$

для $t \geqslant U_\varepsilon$. Из леммы 59 вытекает оценка сверху, верная при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 1$:

$$\overline{\pi}_n(x) \ \leqslant \ (1+o(1))\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}\overline{G}(x+(n-k)(|\mathbf{E}\xi|-\varepsilon)).$$

Так как функция $\overline{G}(y)$ имеет длинный хвост, отсюда в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ следует оценка сверху

$$\overline{\pi}_n(x) \ \leqslant \ (1+o(1))\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}\overline{G}(x+(n-k)|\mathbf{E}\xi|).$$

Поскольку временнóй параметр n принимает лишь счётное число значений, то соответствующая оценка снизу вытекает из леммы 55 следующего § 43, а также из следующего соотношения: для любого *фиксированного* n

$$\overline{\pi}_n(x) \ \geqslant \ (1+o(1))\overline{G}(x)\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Последнее соотношение проверяется по индукции также, как и доказываемое ниже соотношение (290). Теорема доказана.

§ 43. Оценка снизу вероятностей больших уклонений для достационарной цепи

В настоящем параграфе приводится асимптотически правильная оценка снизу для вероятности $\overline{\pi}_n(x)$ при больших значениях n и x. Предварительно устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения.

43.1. Утверждения типа усиленного закона больших чисел для марковской последовательности. Рассмотрим неоднородную во времени цепь Маркова $Y = \{Y_n\}$. Начальное распределение цепи полагаем произвольным. Пусть $\eta_{n+1}(u)$ — случайная величина, отвечающая скачку цепи Y в момент времени n из состояния u, т. е. такая случайная величина, что

$$\mathbf{P}\{Y_{n+1} \in \cdot \,|Y_n = u\} = \mathbf{P}\{u + \eta_{n+1}(u) \in \cdot\}.$$

Лемма 53. *Пусть снос цепи Маркова Y_n в любой момент времени $n \geqslant 1$ и в любом состоянии $u \in \mathbf{R}$ ограничен снизу числом $\widehat{a}$: $\mathbf{E}\eta_n(u) \geqslant \widehat{a}$. Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{|\eta_n(u)|, n \geqslant 1, u \in \mathbf{R}\}$ найдётся интегрируемая мажоранта, т. е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что $|\eta_n(u)| \leqslant_{\mathrm{st}} \eta$ для любых n и u. Тогда для любого начального распределения Y_0 почти наверное*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Y_n - Y_0}{n} \geqslant \widehat{a}.$$

Доказательство вытекает из теоремы 2.

Лемма 54. *Пусть цепь Маркова Y_n такова, что ее снос выше некоторого пространственного уровня U ограничен снизу числом $\widehat{a}$: $\mathbf{E}\eta_n(u) \geqslant \widehat{a}$ для любых $n \geqslant 1$ и $u > U$. Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{|\eta_n(u)|, n \geqslant 1, u > U\}$ найдётся интегрируемая мажоранта, т. е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что $|\eta_n(u)| \leqslant_{\mathrm{st}} \eta$ для любых n и $u \geqslant U$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\mathbf{P}\{Y_k > u - n(\widehat{a}+\varepsilon) \text{ при всех } k{\leqslant}n | Y_0 = u\} \to 1,$$

равномерно по $u > U + n(\widehat{a}+\varepsilon)$.

Доказательство состоит в рассмотрении вспомогательной, также неоднородной во времени цепи Маркова $\widetilde{Y}_n$, у которой скачки $\widetilde{\eta}_n(u)$ совпадают с $\eta_n(u)$ при $u \geqslant U$ и равны $\widehat{a}$ при $u < U$, с дальнейшим применением леммы 53.

43.2. Оценка снизу вероятностей больших уклонений. Начальное распределение π_0 цепи X полагаем произвольным. Пусть f — положительная невозрастающая функция с длинным хвостом. Пусть функция $\underline{c}(u) \geqslant 0$ такова, что для любого $U > 0$

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) > x\}}{f(x)} \geqslant \underline{c}(u) + o(1)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $|u| \leqslant U$. Обозначим

$$c_\infty \equiv \lim_{U\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{-U}^{U} \underline{c}(u)\pi_n(du) \in [0,\infty].$$

В частности, если распределение π_n сходится к некоторой (с необходимостью инвариантной) мере π в метрике полной вариации, т. е. если имеет место сходимость (1), то

$$c_\infty = \int_{\mathbf{R}} \underline{c}(u)\pi(du).$$

Если функция $\underline{c}(u)$ непрерывна, то последнее равенство остаётся в силе и в случае лишь слабой сходимости $\pi_n \Rightarrow \pi$.

Положим

$$\underline{a} \equiv \liminf_{u\to\infty} \mathbf{E}\xi(u).$$

В лемме 1 из [89] было установлено, что в условиях существования инвариантной меры и конечности $\sup_u \mathbf{E}|\xi(u)|$ с необходимостью $\underline{a} \leqslant 0$. В настоящем же разделе нет ограничений на знак числа $\underline{a}$.

Справедлива следующая

Лемма 55. *Пусть $a = -\underline{a}$, если $\underline{a} < 0$, и a — произвольное фиксированное положительное число, если $\underline{a} \geqslant 0$. Пусть найдётся уровень U такой, что семейство $\{|\xi(u)|, u \geqslant U\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Тогда имеет место оценка*

$$\liminf_{n,x\to\infty} \frac{\overline{\pi}_n(x)}{\displaystyle\int_x^{x+na} f(y)dy} \geqslant \frac{c_\infty}{a}.$$

Доказательство достаточно провести лишь для $c_\infty > 0$. Пусть $c' < c'' < c_\infty$. Определения функции $\underline{c}(u)$ и числа c_∞ влекут существование $U' > 0$ такого, что

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{\xi(u) > x\}}{f(x)} \pi_n(du) \geqslant c'',$$

равномерно по всем достаточно большим x. Так как функция $f(x)$ имеет длинный хвост и не возрастает, $f(x-u)/f(x) \to 1$ при $x \to \infty$ равномерно по $|u| \leqslant U'$. Следовательно, найдутся N и x_0 такие, что

$$\int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{u+\xi(u) > x\}}{f(x)} \pi_n(du) \geqslant c', \tag{276}$$

равномерно по $n \geqslant N$ и $x \geqslant x_0$.

Рассмотрим событие $A_{i,n} \equiv A_{i,n}(x)$, $i \in [1,n]$, состоящее в том, что $X_{i-1} \leqslant x$ и $X_j > x$ для любого $j \in [i,n]$. Во-первых, события $A_{i,n}$, $i \in [1,n]$, не пересекаются. Во-вторых,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{i,n} = \{X_n > x\}.$$

Следовательно,

$$\overline{\pi}_n(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_{i,n}\}. \tag{277}$$

Для $v \in (x,\infty)$ введём вероятность $p_i(v)$ равенством

$$p_i(v) = \mathbf{P}\{X_j > x \text{ для любого } j \leqslant i | X_0 = v\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $b = a + \varepsilon$. Так как событие

$$A_{i,n}(U') \;\equiv\; \{X_{i-1} \in (-U', U'], X_i > x + (n-i)b \text{ и } X_j > x \text{ при } j \in [i+1,n]\}$$

влечёт событие $A_{i,n}$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}\} \;\geqslant\; \int_{-U'}^{U'} \pi_{i-1}(du) \int_{x+(n-i)b}^{\infty} \mathbf{P}\{u+\xi(u) \in dv\} p_{n-i}(v).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}\} \;\geqslant\; \int_{-U'}^{U'} \pi_{i-1}(du) \mathbf{P}\{u+\xi(u) > x+(n-i)b\} \min_{v > x+(n-i)b} p_{n-i}(v). \tag{278}$$

По определению чисел a и b имеем неравенство $\mathbf{E}\xi(v) \geqslant -b+\varepsilon/2$ для всех достаточно больших v. Поэтому в силу леммы 54 при x, $n-i \to \infty$

$$\min_{v \geqslant x+(n-i)b} p_{n-i}(v) \ \to \ 1.$$

Подставляя эту сходимость в (278), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \liminf_{n-i,x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{A_{i,n}\}}{f(x+(n-i)b)} \ &\geqslant \ \int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{u+\xi(u) > x+(n-i)b\}}{f(x+(n-i)b)} \pi_{i-1}(du) \\ &\geqslant \ c', \end{aligned}$$

ввиду (276). Используя последнее неравенство, выводим из (277) оценку

$$\pi_n(x) \ \geqslant \ (c'-\varepsilon)\sum_{i=N}^{n-I} f(x+(n-i)b),$$

верную для сколь угодно медленно растущего I и всех достаточно больших x. Так как функция f имеет длинный хвост и не возрастает, то для любого фиксированного I

$$\sum_{i=N}^{n-I} f(x+(n-i)b) \ \sim \ \frac{1}{b}\int_x^{x+nb} f(y)dy \ \text{ при } x \to \infty.$$

Следовательно,

$$\liminf_{n,x\to\infty} \frac{\overline{\pi}_n(x)}{\displaystyle\int_x^{x+nb} f(y)dy} \geqslant \frac{c'-\varepsilon}{b}.$$

Поскольку $b = a+\varepsilon$, $c' < c_\infty$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно, лемма доказана.

§ 44. Оценки сверху вероятностей больших уклонений для достационарных и стационарных цепей

44.1. Оценка сверху с «неправильным» постоянным множителем. Справедливо следующее обобщение леммы 2 из [87] в части, относящейся к субэкспоненциальным распределениям.

Лемма 56. *Пусть неограниченная сверху случайная величина ζ с распределением G такова, что $\mathbf{E}\zeta < 0$. Пусть найдётся уровень U такой, что*

$$\xi(u) \leqslant_{\mathrm{st}} \zeta \quad \text{при } u > U \tag{279}$$

и

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) > t\} \leqslant \overline{G}(t) \quad \text{при } u \leqslant U, \tag{280}$$

для всех $t \geqslant U$. Тогда

(а) *если распределение G_I (см. определение* 6 *в* § 25) *субэкспоненциальное и цепь X допускает (вообще говоря, не единственную) инвариантную меру π, то имеет место оценка*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{\pi}(x)}{\overline{G}_I(x)} \leqslant \frac{1}{|\mathbf{E}\zeta|}; \tag{281}$$

(б) *если распределение G сильно субэкспоненциальное, то для любого ограниченного сверху начального распределения X_0 имеет место оценка*

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \frac{\overline{\pi}_n(x)}{\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)} \leqslant \frac{1}{|\mathbf{E}\zeta|}. \tag{282}$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $X_0 \leqslant 0$ и $U = 0$. Рассмотрим однородную цепь $\{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определённую равенством $Y_{n+1} = (Y_n + \zeta_{n+1})^+$, где случайные величины ζ_n суть независимые копии ζ. В силу условий (279) и (280) цепь Маркова Y_n мажорирует сверху цепь X_n и, следовательно,

$$\overline{\pi}(x) \leqslant \overline{\pi}^Y(x), \tag{283}$$

где π^Y — инвариантная мера цепи Y.

Поскольку распределение G_I субэкспоненциальное, то в силу теоремы 23 $\overline{\pi}^Y(x) \sim \overline{G}_I(x)/|\mathbf{E}\zeta|$ при $x \to \infty$, что в сочетании с (283) даёт (281).

Неравенство (282) вытекает также из мажоризации цепи X_n цепью Y_n, в силу которой для любых n и x справедлива оценка

$$\overline{\pi}_n(x) \leqslant \overline{\pi}_n^Y(x) = \mathbf{P}\{Y_n > x\}.$$

Остаётся воспользоваться теоремой 35. Лемма доказана.

44.2. Вспомогательные леммы. Пусть ζ_1, ζ_2, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Лемма 57. *Пусть* $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \cdots + \zeta_k > 0 \text{ для любого } k \leqslant n\}$$

сходится.

Доказательство. Рассмотрим однородную в пространстве цепь, определённую равенством $Y_{n+1} = (Y_n + \zeta_{n+1})^+$, с начальным значением $Y_0 = 1$. Имеем неравенство и равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\zeta_1 + \cdots + \zeta_k > 0 \text{ для любого } k \leqslant n\} &\leqslant \mathbf{P}\{Y_k > 0 \text{ для любого } k \leqslant n | Y_0 = 1\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta > n\},\end{aligned}$$

где η — момент первого достижения цепью $\{Y_n\}$ состояния 0. Поскольку $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$, цепь $\{Y_n\}$ является положительно возвратной, т. е. $\mathbf{E}\eta < \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta > n\}$ сходится и лемма доказана.

В следующей лемме изучается локальное поведение функции, мажорируемой сверху функцией с длинным хвостом. Пусть положительная невозрастающая интегрируемая на бесконечности функция $f(x)$ имеет длинный хвост. Поскольку функция f не возрастает, то она имеет длинный хвост тогда и только тогда, когда существует последовательность $\Delta(x) \to \infty$ такая, что $f(x)/f(x-\Delta(x)) \to 1$ при $x \to \infty$. Пусть c — произвольная константа. Положим

$$f_n(x) = \int_x^{x+cn} f(y)dy.$$

Имеем равномерную по всем значениям n эквивалентность

$$f_n(x-\Delta(x)) \sim f_n(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{284}$$

Пусть неотрицательная функция $h_n(x)$ такова, что при каждом n она не возрастает по x.

Лемма 58. *Пусть $h_n(x) \leqslant f_n(x)$ для любых n и x. Тогда существует последовательность отрезков $[x_n^-, x_n^+] \subseteq [x-\Delta(x), x]$ таких, что $x_n^+ - x_n^- \to \infty$ и $h_n(x_n^-) - h_n(x_n^+) = o(f_n(x))$ при n, $x \to \infty$.*

Доказательство. Пусть последовательность $u(x) \to \infty$ такова, что $u(x) = o(\Delta(x))$ при $x \to \infty$ и $l(x) = \Delta(x)/u(x)$ — целое число; по выбору $u(x)$ имеем $l(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

В силу (284) для доказательства леммы достаточно показать, что для любых n и x существует точка $x_n^- \in [x-\Delta(x), x-u(x)]$, для которой

$$h_n(x_n^-) - h_n(x_n^- + u(x)) \;=\; o(f_n(x_n^-)) \quad \text{при } n, x \to \infty$$

(и положить $x_n^+ = x_n^- + u(x)$). Предположим, что, напротив, последнее соотношение не имеет места. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность индексов $n_k \to \infty$ и $x_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такие, что для любого $y \in [x_k - \Delta(x_k), x_k - u(x_k)]$ выполняется

$$h_{n_k}(y) - h_{n_k}(y + u(x_k)) \;\geqslant\; \varepsilon f_{n_k}(y). \tag{285}$$

В частности, ввиду неравенства $h_{n_k} \leqslant f_{n_k}$,

$$\begin{aligned} h_{n_k}(y + u(x_k)) &\leqslant h_{n_k}(y) - \varepsilon f_{n_k}(y) \\ &\leqslant (1-\varepsilon) h_{n_k}(y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}h_{n_k}(x_k - u(x_k)) &\leqslant (1-\varepsilon)^{l(x_k)-1} h_{n_k}(x_k - \Delta(x_k))\\ &\leqslant (1-\varepsilon)^{l(x_k)-1} f_{n_k}(x_k - \Delta(x_k))\\ &= o(f_{n_k}(x_k - u(x_k)))\end{aligned}$$

при $k \to \infty$ в силу $l(x_k) \to \infty$ и (284). Противоречие с (285) при $y = x_k - u(x_k)$. Лемма доказана.

44.3. Оценка сверху с «правильным» постоянным множителем. Предполагаем, что начальное распределения π_0 сосредоточено на множестве, ограниченном сверху.

Лемма 59. *Пусть неограниченная сверху случайная величина* ζ *с распределением* G *такова, что распределение случайной величины* $\zeta \mathbf{I}\{\zeta \geqslant 0\}$ *сильно субэкспоненциальное и* $\mathbf{E}\zeta < 0$. *Пусть найдется уровень* U *такой, что выполняется* (279). *Пусть, кроме того, для некоторой функции* $c(v) \leqslant 1$ *выполняется при* $u > U$ *неравенство*

$$\mathbf{P}\{\xi(u) > t\} \leqslant c(u)\overline{G}(t) \tag{286}$$

для всех $t \geqslant U$, *а при* $u \leqslant U$ *неравенство*

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) > t\} \leqslant c(u)\overline{G}(t) \tag{287}$$

для всех $t \geqslant U$. *Если, кроме того, имеет место сходимость по вариации* (1), *то при* $x \to \infty$ *справедлива равномерная по всем значениям* $n \geqslant 1$ *оценка*

$$\overline{\pi}_n(x) \leqslant (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}\overline{G}(x + (n-k)|\mathbf{E}\zeta|), \tag{288}$$

где

$$c_k \equiv \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi_k(du) \geqslant 0.$$

В частности,

$$\limsup_{n,x\to\infty} \frac{\overline{\pi}_n(x)}{\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)} \leqslant \frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\zeta|} \tag{289}$$

при n, $x \to \infty$, где

$$c_\infty \equiv \lim_{k\to\infty} c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi(du) \geqslant 0.$$

Доказательство. Поскольку временно́й параметр n принимает лишь счётное число значений, распределение G имеет длинный хвост и $c_n \to c_\infty$, то достаточно проверить по-отдельности следующие два соотношения: для любого *фиксированного* n

$$\overline{\pi}_n(x) \ \leqslant \ (1+o(1))\overline{G}(x)\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \quad \text{при } x\to\infty \tag{290}$$

и (289). Проверим сначала первое из них по индукции. Для любого $U' \in (U, x]$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_{n+1}(x) \ &= \ \left(\int_{-\infty}^{U'} + \int_{U'}^{x-U'} + \int_{x-U'}^{\infty}\right)\mathbf{P}\{u+\xi(u) > x\}\pi_n(du) \\ &\equiv \ I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Ввиду условий (286) и (287) для любого фиксированного значения U' имеем оценку

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{I_1}{\overline{G}(x)} \leqslant \int_{-\infty}^{U'} c(u)\pi_n(du) \leqslant c_n.$$

Ввиду $c(v) \leqslant 1$ и условия (286) второе слагаемое I_2 допускает оценку:

$$I_2 \leqslant \int_{U'}^{x-U'} \overline{G}(x-u)\pi_n(du).$$

Интегрируя по частям, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} I_2 \ &\leqslant \ -\overline{G}(x-u)\overline{\pi}_n(u)\Big|_{U'}^{x-U'} + \int_{U'}^{x-U'} \overline{\pi}_n(x-u)G(du) \\ &\leqslant \ \overline{G}(x-U')\overline{\pi}_n(U') + \int_{U'}^{x-U'} \overline{\pi}_n(x-u)G(du). \end{aligned}$$

Используя здесь индукционное предположение, получаем оценку

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{I_2}{\overline{G}(x)} \ \leqslant\ c\overline{G}(U')+c\limsup_{x\to\infty}\int_{U'}^{x-U'}\frac{\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)}G(du).$$

Поскольку распределение G является субэкспоненциальным, то в силу соотношения (2) из [54] значение верхнего предела в правой части оценки можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое значение U'. Таким образом,

$$\lim_{U'\to\infty}\limsup_{x\to\infty}\frac{I_2}{\overline{G}(x)} \ =\ 0.$$

Третье слагаемое I_3 не превосходит $\overline{\pi}_n(x-U')$. Поэтому по индукционному предположению и ввиду того, что распределение G имеет длинный хвост, для любого фиксированного U' справедлива оценка

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{I_3}{\overline{G}(x)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_{k-1}.$$

Собирая оценки для I_1, I_2 и I_3, убеждаемся в справедливости индукционного перехода $n\to n+1$.

Докажем соотношение (289). Не ограничивая общности считаем, что $X_0\leqslant 0$ и $U=0$. Пусть последовательность точек x_k, $k=1,\,2,\,\ldots$, такова, что $x_{k+1}-x_k\to\infty$ и $\overline{G}(x_{k+1})\sim\overline{G}(x_k)$ при $k\to\infty$. В частности, $\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_{k+1})\sim\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_k)$ при $k\to\infty$ равномерно по всем значениям n. Поэтому соотношение (289) эквивалентно соотношению

$$\limsup_{n,k\to\infty}\frac{\overline{\pi}_n(x_k)}{\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_k)}\leqslant\frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\zeta|}. \tag{291}$$

В силу леммы 56 для любого фиксированного i функция $h_n(x)\equiv\overline{\pi}_{n-i}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 58 при $f(x)\equiv\mathrm{const}\cdot\overline{G}(x)$ и $c=|\mathbf{E}\zeta|$. Поэтому найдутся последовательности x^-_{kn} и x^+_{kn} такие, что $[x^-_{kn},x^+_{kn}]\subseteq[x_k,x_{k+1}]$, $x^+_{kn}-x^-_{kn}\to\infty$ и

$$\pi_{n-i}(x^-_{kn})-\pi_{n-i}(x^+_{kn})=o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_{k+1}))$$

при n, $k \to \infty$. На основании этих рассуждений не будет ограничением общности предполагать для удобства существование (для любого фиксированного i) функции x_n^- такой, что $x_n^- \in [0, x]$, $x - x_n^- \to \infty$ и

$$\overline{\pi}_{n-i}(x_n^-, x_n^+] \;=\; \overline{\pi}_{n-i}(x_n^-) - \pi_{n-i}(x) = o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \text{ при } n, x \to \infty. \quad (292)$$

Из условия (287) вытекает выполнение (280). Рассмотрим однородную цепь $\{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определённую в ходе доказательства леммы 56. Поскольку цепь $\{Y_n\}$ мажорирует цепь $\{X_n\}$, то в случае $X_0 = Y_0$ цепи $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что при любом n с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$X_n \;\leqslant\; Y_n. \quad (293)$$

В дальнейшем различные характеристики, отвечающие цепи $\{X_n\}$, помечаем верхним индексом X, а цепи $\{Y_n\}$ — верхним индексом Y.

События $A_{i,n}$ и вероятности $p_i(v)$ определены в ходе доказательства леммы 55. Обратимся снова к тождеству (277). Из оценки (282) и из (275) для любого фиксированного i вытекают соотношения

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} \;\leqslant\; \mathbf{P}\{X_i > x\} = \overline{\pi}_i(x) = O(\overline{G}_{i|\mathbf{E}\zeta|}(x)) = o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))$$

при n, $x \to \infty$. Следовательно, найдётся неограниченно возрастающая последовательность $I = I(n, x)$ такая, что

$$\overline{\pi}_n(x) \;=\; \sum_{i=I}^{n} \mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} + o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{ при } n, x \to \infty. \quad (294)$$

На самом деле любое конечное число последних слагаемых в этой сумме есть также величина порядка $o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))$. Это более тонкое наблюдение проверяется в конце доказательства.

Для вероятности события $A^X_{i,n}$ имеем равенство

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} \;=\; \int_{-\infty}^{x} \pi^X_{i-1}(du) \int_x^\infty P^X(u,dv)p^X_{n-i}(v).$$

Используя (293) при $X_0 = Y_0 = v$, получаем $p^X_{n-i}(v) \leqslant p^Y_{n-i}(v)$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} \;\leqslant\; \int_{-\infty}^{x} \pi^X_{i-1}(du) \int_x^\infty P^X(u,dv)p^Y_{n-i}(v). \tag{295}$$

Цепь Y_n, будучи однородной, стохастически возрастает. Поэтому функция $p^Y_{n-i}(v)$ не убывает с ростом v и, следовательно, является функцией ограниченной вариации. Интегрируя по частям, можно преобразовать внутренний интеграл последней оценки следующим образом:

$$\int_x^\infty P^X(u,dv)p^Y_{n-i}(v) \;=\; P^X(u,[x,\infty))p^Y_{n-i}(x) + \int_x^\infty P^X(u,[v,\infty))dp^Y_{n-i}(v).$$

Оценивая $P^X(u,[v,\infty))$ в правой части последнего неравенства с помощью условия (287) и производя обратное интегрирование по частям, получаем последовательно для любого $u \in (-\infty, U)$ оценку и равенство

$$\begin{aligned}\int_x^\infty P^X(u,dv)p^Y_{n-i}(v) \;&\leqslant\; c(u)\left(\overline{G}(x)p^Y_{n-i}(x) + \int_x^\infty \overline{G}(v)dp^Y_{n-i}(v)\right)\\ &=\; c(u)\int_x^\infty \overline{G}(dv)p^Y_{n-i}(v). \end{aligned}\tag{296}$$

Ровно также ввиду условия (286) и неравенства $c(u) \leqslant 1$ получаем для любого $u \in [U, x)$

$$\int_x^\infty P^X(u,dv))p^Y_{n-i}(v) \;\leqslant\; c(u)\int_x^\infty \overline{G}(dv-u)p^Y_{n-i}(v) \tag{297}$$

$$\leqslant\; \int_x^\infty \overline{G}(dv-u)p^Y_{n-i}(v). \tag{298}$$

Так как функция $\overline{G}(t)$ имеет длинный хвост, то найдется неограниченно растущий уровень (при $x\to\infty$) V такой, что $\overline{G}(v-u) \sim \overline{G}(v)$ при $u \in [U,V)$ и $v \geqslant x$. При этом неравенство (297) при $u \in [U,V)$ принимает вид

$$\int_x^\infty P^X(u,dv))p^Y_{n-i}(v) \;\leqslant\; (c(u)+o(1))\int_x^\infty \overline{G}(dv)p^Y_{n-i}(v), \quad x\to\infty. \tag{299}$$

Подставляя (296), (298) и (299) в (295), приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} \leqslant (1+o(1))\int_{-\infty}^{V}\pi^X_{i-1}(du)c(u)\int_x^\infty \overline{G}(dv)p^Y_{n-i}(v) + \int_V^x \pi^X_{i-1}(du)\int_x^\infty \overline{G}(dv-u)p^Y_{n-i}(v).$$

Вспоминая определение констант c_i, получаем

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} \leqslant (c_{i-1}+o(1))\int_x^\infty G(dv)p^Y_{n-i}(v)+\int_V^x \pi^X_{i-1}(du)\int_x^\infty G(dv-u)p^Y_{n-i}(v)$$

при $x\to\infty$, равномерно по $i\in[1,n]$. Суммируя эти неравенства по i от $I(n,x)$ до n и учитывая при этом сходимость $c_i\to c_\infty$ при $i\to\infty$, получаем из (294) при n, $x\to\infty$ соотношение

$$\overline{\pi}^X_n(x) \leqslant (c_\infty+o(1))\int_x^\infty G(dv)\sum_{i=1}^n p^Y_{n-i}(v) + \sum_{i=I}^n\int_V^x \pi^X_{i-1}(du)\int_x^\infty G(dv-u)p^Y_{n-i}(v)+o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)). \quad (300)$$

Для однородной цепи Y имеем неравенство

$$\mathbf{P}\{A^Y_{i,n}\} \geqslant \int_0^V \pi^Y_{i-1}(du)\int_x^\infty P^Y(u,dv)p^Y_{n-i}(v) = \int_0^V \pi^Y_{i-1}(du)\int_x^\infty G(dv-u)p^Y_{n-i}(v).$$

В силу выбора уровня V имеем

$$\mathbf{P}\{A^Y_{i,n}\} \geqslant \int_0^V \pi^Y_{i-1}(du)\int_x^\infty G(dv)p^Y_{n-i}(v) = \pi^Y_{i-1}[0,V)\int_x^\infty G(dv)p^Y_{n-i}(v).$$

Поскольку $V\to\infty$, то при $x\to\infty$ равномерно по $i\in[1,n]$

$$\mathbf{P}\{A^Y_{i,n}\} \geqslant (1+o(1))\int_x^\infty G(dv)p^Y_{n-i}(v).$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до n, выводим из (277) соотношение

$$\pi^Y_n(x)=\sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{A^Y_{i,n}\} \geqslant (1+o(1))\int_x^\infty G(dv)\sum_{i=1}^n p^Y_{n-i}(v).$$

Из теоремы 35 вытекает, что при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 1$

$$\overline{\pi}_n^Y(x) \leqslant (1+o(1))\frac{\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)}{|\mathbf{E}\zeta|}.$$

Два последние неравенства влекут оценку

$$\int_x^\infty G(dv)\sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v) \;\leqslant\; (1+o(1))\frac{\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)}{|\mathbf{E}\zeta|} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Подставляя её в (300), приходим при n, $x \to \infty$ к соотношению

$$\overline{\pi}_n^X(x) \;\leqslant\; \frac{c_\infty + o(1)}{|\mathbf{E}\zeta|}\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x) + \sum_{i=I}^n \int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u), \tag{301}$$

где

$$q_{n-i}(u) = \int_x^\infty G(dv-u)p_{n-i}^Y(v).$$

Ввиду предыдущих рассмотрений имеем также для цепи Y равномерную по $n \geqslant 1$ оценку, верную при $x \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^n \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du)\int_x^\infty G(dv-u)p_{n-i}^Y(v) \;=\; o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)). \tag{302}$$

Осталось оценить общее слагаемое в сумме из (301). Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u) \;=\; -\overline{\pi}_{i-1}^X(u)q_{n-i}(u)\Big|_V^x + \int_V^x \overline{\pi}_{i-1}^X(u)dq_{n-i}(u).$$

Ввиду леммы 56 и теоремы 35, $\overline{\pi}_{i-1}^X(u) \leqslant c\overline{\pi}_{i-1}^Y(u)$ при некотором $c < \infty$ для всех u и i. Поэтому

$$\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u) \;\leqslant\; c\overline{\pi}_{i-1}^Y(V)q_{n-i}(V) + c\int_V^x \overline{\pi}_{i-1}^Y(u)dq_{n-i}(u).$$

Повторно интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u) \;&\leqslant\; c\overline{\pi}_{i-1}^Y(V)q_{n-i}(V) + c\overline{\pi}_{i-1}^Y(u)q_{n-i}(u)\Big|_V^x \\ &\qquad + c\int_V^x \pi_{i-1}^Y(du)q_{n-i}(u) \\ &\leqslant\; c\overline{\pi}_{i-1}^Y(x)q_{n-i}(x) + c\int_V^x \pi_{i-1}^Y(du)q_{n-i}(u). \end{aligned} \tag{303}$$

Ровно также получаем оценку

$$\begin{aligned}\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u) &= \left(\int_V^{x_n^-}+\int_{x_n^-}^x\right)\pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u)\\ &\leqslant c\overline{\pi}_{i-1}^Y(x_n^-)q_{n-i}(x_n^-)+c\int_V^{x_n^-}\pi_{i-1}^Y(du)q_{n-i}(u)+\pi_{i-1}^X[x_n^-,x).\end{aligned} \tag{304}$$

Пусть J — фиксированное натуральное число. Применяя при $i\in[I,n-J]$ оценку (303), а при $i\in[n-J+1,n]$ — (304), выводим неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{i=I}^n\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u) &\leqslant c\sum_{i=I}^{n-J}\overline{\pi}_{i-1}^Y(x)q_{n-i}(x)+c\sum_{i=n-J+1}^{n}\overline{\pi}_{i-1}^Y(x_n^-)q_{n-i}(x_n^-)\\ &\quad +c\sum_{i=I}^n\int_V^x\pi_{i-1}^Y(du)q_{n-i}(u)+\sum_{i=n-J+1}^n\pi_{i-1}^X([x_n^-,x)).\end{aligned}$$

В силу (302) третья сумма в правой части оценки есть величина порядка $o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))$; четвертая сумма того же порядка при любом фиксированном J в силу (292). Следовательно, при достаточно медленно растущем уровне $J\equiv J_n(x)\to\infty$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\sum_{i=I}^n\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)q_{n-i}(u) &\leqslant c\sum_{i=I}^{n-J}\overline{\pi}_{i-1}^Y(x)q_{n-i}(x)+c\sum_{i=n-J+1}^{n}\overline{\pi}_{i-1}^Y(x_n^-)q_{n-i}(x_n^-)\\ &\quad +o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))\\ &\equiv c\Sigma_1+c\Sigma_2+o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n,x\to\infty.\end{aligned} \tag{305}$$

Так как

$$\begin{aligned}q_{n-i}(x) &= \int_x^\infty G(dv-x)p_{n-i}^Y(v)\\ &= \int_x^\infty G(dv-x)\mathbf{P}\{Y_k>x \text{ для любого } k\in[2,n-i+1]|Y_1=v\}\\ &= \mathbf{P}\{Y_k>x \text{ для любого } k\in[1,n-i+1]|Y_0=x\},\end{aligned}$$

то

$$\Sigma_1 = \sum_{i=I}^{n-J}\overline{\pi}_{i-1}^Y(x)\mathbf{P}\{\zeta_1+\cdots+\zeta_k>0 \text{ для любого } k\leqslant n-i+1\}$$

$$= \ O(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))\sum_{i=I}^{n-J}\mathbf{P}\{\zeta_1+\cdots+\zeta_k>0 \text{ для любого } k\leqslant n-i+1\}.$$

Поскольку $J\to\infty$, по лемме 57

$$\sum_{i=I}^{n-J}\mathbf{P}\{\zeta_1+\cdots+\zeta_k>0 \text{ для любого } k\leqslant n-i+1\}\to 0.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \ = \ o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n,x\to\infty. \tag{306}$$

Докажем теперь, что

$$\Sigma_2 \ = \ o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n,x\to\infty. \tag{307}$$

Поскольку последовательность $J_n(x)$ может возрастать сколь угодно медленно, для этого достаточно проверить, что для любого фиксированного i выполняется

$$\pi^Y_{n-i}(x_n^-)q_{i-1}(x_n^-) \ = \ o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n,x\to\infty.$$

Ввиду (292) и леммы 56 имеем

$$\overline{\pi}^Y_{n-i}(x_n^-)=\overline{\pi}^Y_{n-i}(x)+o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))=O(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\pi}^Y_{n-i}(x_n^-)q_{i-1}(x_n^-) \ &= \ O(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))q_{i-1}(x_n^-)\\ &\leqslant \ O(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))P(x_n^-,[x,\infty))\\ &= \ o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)),\end{aligned}$$

так как $x-x_n^-\to\infty$ и $P(x_n^-,[x,\infty))\to 0$. Таким образом, соотношение (307) доказано.

Подставляя (306) и (307) в (305), приходим к соотношению

$$\sum_{i=I}^{n} \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \;=\; o(\overline{G}_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \to \infty.$$

Учитывая последнее соотношение в (301), приходим к оценке (289), а вместе с тем и к утверждению леммы.

§ 45. Асимптотический анализ случайных блужданий с зависимыми приращениями в случае тяжёлых хвостов

В настоящем параграфе и до конца главы рассматривается случайное блуждание $\{S_n\}$ с отрицательным сносом, имеющее зависимые приращения с тяжёлыми хвостами. Изучается асимптотика вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$ при $x \to \infty$. В случае независимых приращений блуждания $\{S_n\}$ точное асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$ хорошо известно и обсуждалось в § 25. Здесь же мы исследуем случай, когда приращения блуждания сформированы асимптотически стационарным процессом скользящих средних. Показывается, что асимптотика хвоста распределения $\sup_n S_n$ существенно зависит от линейных коэффициентов в скользящем среднем.

В ряде недавних работ (см. [35, 36, 38, 40, 66, 73]) изучается асимптотика хвоста распределения супремума случайного блуждания с отрицательным сносом в случае зависимых приращений с тяжёлыми хвостами. Мы продолжаем эти исследования и рассматриваем стохастическую модель, которую можно обосновать следующим образом. Пусть номинальный (планируемый) доход в единицу времени некоторого производства или финансовой компании равен некоторой константе $a > 0$. Однако на практике в различных ситуациях реальные доходы за конкретные единичные периоды времени таковы, что этот номинальный доход достигается не в точности. Поэтому мы предполагаем, что реальный доход за n-й период времени есть результат некоторых случайных возмущений $\eta_1, \ldots, \eta_n$ (с нулевым средним значением), возникающих в n первых единичных периодов времени благодаря неожиданным расходам или дополнительным финансовым поступлениям. Например, возмущение η_n, возникающее в n-й период времени, может быть не полностью учтено (предъявлено к оплате) именно в этот момент времени и может также влиять на доходы в последующие периоды времени. Более точно, в n-й период времени учитывается доля $c_0\eta_n$ от η_n, в $(n+1)$-й период — доля $c_1\eta_n$, в $(n+2)$-й период — доля $c_2\eta_n$ и так далее, где $c_0,\ c_1,\ \ldots \in [0,1]$, причём $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = 1$. Следовательно, если система начинает функционировать в нулевой момент времени, то реальный доход за k-й период времени даётся выражением $a - \sum_{j=1}^{k} c_{k-j}\eta_j$. Кроме того, сумма $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, где $\xi_k = \sum_{j=1}^{k} c_{k-j}\eta_j - a$, может рассматриваться как итоговый (совокупный) баланс расходов в момент времени n.

Результаты, представленные здесь, имеют место при более общих условиях на коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$. А именно, эти коэффициенты могут быть произвольными фиксированными действительными числами такими, что $\sum_{i=0}^{\infty} |c_i| < \infty$. Коэффициенты бóльшие единицы и отрицательные могут трактоваться, например, как предъявление к оплате слишком больших исков и возврат средств в дальнейшем, соответственно.

Ответ на вопрос о том, является ли процесс баланса расходов $\{S_n,\ n \geqslant 1\}$ хорошо контролируемым или опасным, в ряде случаев может быть дан, если достаточно хорошо изучено асимптотическое при $x \to \infty$ поведения хвоста распределения $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$. В настоящей статье мы находим условия, при которых возможно точное определение асимптотического поведения $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$. Оказывается, что искомая асимптотика существенно зависит от выбора коэффициентов $c_0,\ c_1,\ \ldots$.

45.1. Математическая модель. Пусть $\{\eta_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с нулевым средним, $\mathbf{E}\eta_n = 0$. Обозначим через F распределение η_n, т. е. $F(x) = \mathbf{P}\{\eta_n \leqslant x\}$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Правый хвост распределения F обозначаем через $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Для любого $x \geqslant 0$ определим интегралы

$$G_+(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)\,dy \quad \text{и} \quad G_-(x) = \int_x^\infty F(-y)\,dy,$$

которые конечны при любом x, ввиду конечности среднего значения $\mathbf{E}\eta_n$. Для любых двух действительных чисел $B \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, не равных одновременно нулю, рассмотрим функцию $G_{B,b}$, задаваемую равенством (здесь $x/0 = \infty$ при $x \geqslant 0$):

$$G_{B,b}(x) \;=\; BG_+(x/B) + bG_-(x/b), \quad x \geqslant 0.$$

По определению $G_+ = G_{1,0}$, $G_- = G_{0,1}$ и

$$G_{B,b}(x) \;=\; \int_x^\infty \Big(\overline{F}(y/B) + F(-y/b)\Big)dy.$$

Пусть $a > 0$ и $c_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, — набор констант, из которых хотя бы одна отлична от нуля. Определим случайную величину ξ_k равенством

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{k} c_{k-j}\eta_j - a.$$

Рассмотрим частичные суммы

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \geqslant 1.$$

Определённую таким образом последовательность $\{S_n,\, n \in \mathbf{N}\}$ мы называем *случайным блужданием с асимптотически стационарными зависимыми приращениями и с отрицательным сносом.* Оказывается полезным следующее представление частичных сумм S_n. Введя обозначение

$$\overline{c}_k = \sum_{i=0}^{k} c_i, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{308}$$

получаем представление в терминах суммы *взвешенных слагаемых*:

$$S_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{n-j}\eta_j - na. \tag{309}$$

Всюду предполагаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty. \tag{310}$$

При этом условии последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, т. е. $S_n/n \to -a < 0$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$ (соответствующее элементарное доказательство см. ниже в лемме 60). Следовательно, супремум $\sup_{n\in\mathbf{N}} S_n$ случайного блуждания $\{S_n\}$ — корректно определённая случайная величина, конечная с вероятностью 1.

45.2. Основные результаты. Основная цель — найти условия, при которых асимптотическое поведение хвоста $\mathbf{P}\{\sup_{n\in\mathbf{N}} S_n > x\}$ просто выражается в терминах функций $G_+(x)$ и $G_-(x)$ при $x \to \infty$.

В § 46 выводится асимптотическая оценка снизу для вероятности $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$. В теореме 38 показано, что если взять два любых различных натуральных числа m_1, $m_2 \in \mathbf{N}$ и положить $C = \max\{0, \overline{c}_{m_1}\} \geqslant 0$ и $c = \min\{0, \overline{c}_{m_2}\} \leqslant 0$, то

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{C,|c|}(x)} \;\geqslant\; \frac{1}{a} \tag{311}$$

при условии, что $C + |c| > 0$ и $G_{C,|c|}$ является *функцией с длинным хвостом.*

В § 47 мы выводим асимптотически точную верхнюю оценку (теорема 39). Положим $\overline{C} = \sup\{0, \overline{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \geqslant 0$ и $\overline{c} = \inf\{0, \overline{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \leqslant 0$, где $\overline{C} + |\overline{c}| > 0$, поскольку не все c_k равны 0. Показано, что если $G_{\overline{C},|\overline{c}|}$ принадлежит классу $\mathscr{S}$ *субэкспоненциальных* распределений, то

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x)} \;\leqslant\; \frac{1}{a}. \tag{312}$$

Объединение оценок (311) и (312) немедленно приводит к следующей асимптотике хвостов $\sup_n S_n$:

Теорема 37. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(i) *для некоторых m_1 и m_2*

$$\overline{c}_{m_1} = \overline{C} \equiv \sup\{0, \overline{c}_k, k \in \mathbf{N}\} > 0$$

и

$$\overline{c}_{m_2} = \overline{c} \equiv \inf\{0, \overline{c}_k, k \in \mathbf{N}\} < 0;$$

(ii) $\overline{C} = \overline{c}_{m_1} > 0$ *для некоторого m_1 и $\overline{c} = 0$;*

(iii) $\overline{C} = 0$ *и $\overline{c} = \overline{c}_{m_2} < 0$ для некоторого m_2.*

Тогда, если $G_{\overline{C},|\overline{c}|} \in \mathscr{S}$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\} \sim a^{-1} G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

В § 48 рассматриваются оставшиеся случаи, не охватываемые теоремой 37, а именно, когда $\overline{C} > 0$ и $\overline{C} > \overline{c}_m$ для любого m либо $\overline{c} < 0$ и $\overline{c} < \overline{c}_m$ для любого m. Показывается, что тогда утверждение теоремы 37 остается в силе при дополнительном предположении (почти) правильного изменения на бесконечности хвостов распределений.

Отметим, что формально наши результаты обобщают теорему 23(ii) об асимптотическом поведении хвоста распределения супремума случайного блуждания с независимыми приращениями субэкспоненциального типа с отрицательным сносом, которому соответствует случай $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = \ldots = 0$. Недавно были доказаны некоторые обобщения этой теоремы на случай случайных блужданий с зависимыми приращениями (см. [35, 36, 38, 40, 66]). Одно из этих обобщений, в наибольшей степени коррелирующее с нашими результатами, получено в [73], где предполагается правильное изменение на бесконечности правого и левого хвостов F. Это предположение, сделанное в [73], существенно для использования утверждений типа теоремы Карамата. Мы используем другие методы доказательства (см. § 46 и 47), позволяющие избежать в теореме 37 предположения о правильном изменении распределения F.

45.3. Усиленный закон больших чисел. Сформулируем и докажем элементарный усиленный закон больших чисел для последовательности S_n, определяемой равенством (309).

Лемма 60. *С вероятностью* 1 *при* $n \to \infty$ *имеет место сходимость* $S_n/n \to -a$.

Доказательство. Ввиду условия (310) последовательность $\overline{c}_n$ имеет предел при $n \to \infty$; обозначим этот предел через $c \in \mathbf{R}$. Тогда для любых n и $N \in \mathbf{N}$, связанных неравенством $n \geqslant N$, имеем равенство

$$\frac{S_n + na}{n} \;=\; \frac{c}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-N}(\overline{c}_{n-j} - c)\eta_j + \sum_{j=0}^{N-1}(\overline{c}_j - c)\frac{\eta_{n-j}}{n}.$$

Так как $\mathbf{E}|\eta_1|$ конечно, то в силу стандартного усиленного закона больших чисел $\frac{c}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1. Кроме того, $|\eta_{n-j}|/n \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1 для любого фиксированного $j \geqslant 0$. Поэтому для любого фиксированного $N \in \mathbf{N}$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{S_n + na}{n}\right| \;\leqslant\; \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-N}(\overline{c}_{n-j} - c)\eta_j\right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N такое, что $|\overline{c}_n - c| \leqslant \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-N}(\overline{c}_{n-j} - c)\eta_j\right| \;\leqslant\; \varepsilon\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\eta_j| = \varepsilon\mathbf{E}|\eta_j|,$$

что завершает доказательство леммы, так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым.

§ 46. Оценки снизу

Сначала сформулируем и докажем некоторые асимптотические свойства рапределений с длинными хвостами. Они будут применяться в следующем разделе 46.2 при выводе асимптотической оценки снизу для хвоста распределения супремума сумм.

46.1. Свойства распределений с длинными хвостами. Как и ранее, будем писать $F \in \mathscr{L}$, если распределение F имеет длинный правый хвост. Отметим, что $F \in \mathscr{L}$ влечёт $G_+ \in \mathscr{L}$.

Говорят, что распределение F имеет *длинный левый хвост*, если $F(-x) \in \mathscr{L}$. Обозначим через $\mathscr{L}^-$ семейство всех распределений в $\mathbf{R}$, обладающих этим свойством. Заметим, что распределение F случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{L}^-$ тогда и только тогда, когда распределение $-\eta$ принадлежит $\mathscr{L}$.

Лемма 61. *Пусть последовательность случайных величин T_1, T_2, ... такова, что $T_n/n \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью* 1. *Тогда найдётся неубывающая функция $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ такая, что $h(n) = o(n)$ при $n \to \infty$ и*

$$\lim_{z\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\geqslant 1} \Big\{|T_n| \leqslant z + h(n)\Big\}\Big\} = 1.$$

Доказательство. Поскольку $T_n/n \to 0$ с вероятностью 1, то существует последовательность натуральных чисел $\{N_k,\ k \geqslant 1\}$ такая, что $N_k \to \infty$ и

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant N_k} \Big\{|T_n| > n/k\Big\}\Big\} \leqslant 2^{-k} \tag{313}$$

при любом $k = 1, 2, \ldots,$ причём не ограничивая общности можно считать, что $N_{k+1} \geqslant N_k + 1$. Положим

$$h^*(n) = \begin{cases} n & \text{при } n < N_1, \\ n/k & \text{при } N_k \leqslant n < N_{k+1}. \end{cases} \tag{314}$$

Поскольку $N_k \to \infty$, то $h^*(n) = o(n)$. Для любого фиксированного $M \in \mathbf{N}$ имеем неравенство

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant 1}\Big\{|T_n| > z + h^*(n)\Big\}\Big\} \ \leqslant \ \sum_{n=1}^{N_M-1}\mathbf{P}\{|T_n| > z\} + \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant N_M}\Big\{|T_n| > h^*(n)\Big\}\Big\}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{z\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant 1}\Big\{|T_n| > z + h^*(n)\Big\}\Big\} \ \leqslant \ \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant N_M}\Big\{|T_n| > h^*(n)\Big\}\Big\}.$$

Используя (313) и (314), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant N_M}\Big\{|T_n| > h^*(n)\Big\}\Big\} \ &\leqslant \ \sum_{k=M}^{\infty}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{N_k\leqslant n<N_{k+1}}\Big\{|T_n| > h^*(n)\Big\}\Big\} \\ &\leqslant \ \sum_{k=M}^{\infty}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant N_k}\Big\{|T_n| > n/k\Big\}\Big\} \\ &\leqslant \ \sum_{k=M}^{\infty}2^{-k} = 2^{-M+1}.\end{aligned}$$

Так как M можно выбрать произвольным образом, то предельный переход при $M \to \infty$ приводит к соотношению

$$\limsup_{z\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\geqslant 1}\Big\{|T_n| > z + h^*(n)\Big\}\Big\} = 0,$$

что эквивалентно

$$\lim_{z\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\geqslant 1}\Big\{|T_n| \leqslant z + h^*(n)\Big\}\Big\} = 1.$$

Полагая теперь $h(n) \equiv \max\{h^*(k),\ k \leqslant n\}$, получаем неубывающую функцию $h(n) = o(n)$, удовлетворяющую заключению леммы.

Пусть $b_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, — ограниченная сходящаяся последовательность. Тогда, в частности, супремум $b = \sup_k |b_k|$ конечен. Положим

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k$$

и для любых натуральных чисел $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$, $n > m$,

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-m-1} b_{n-k}\eta_k.$$

По определению, при $n > m$

$$T_n = T_n^{(m)} + \sum_{k=n-m}^{n} b_{n-k}\eta_k.$$

Последовательности $\{T_n\}$ и $\{T_n^{(m)}\}$ удовлетворяют условию леммы 61. Действительно, так как $\mathbf{E}\eta_i = 0$, то имеем сходимости $\lim_{n\to\infty} T_n/n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} T_n^{(m_1)}/n = 0$ с вероятностью 1 в силу усиленного закона больших чисел (см. лемму 60). Следовательно, для любой функции $g(x)$ со свойством $g(x) \to \infty$ найдётся функция $h(n)$ со свойством $h(n) = o(n)$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\geqslant 1}\Big\{|T_n| \leqslant g(x) + h(n)\Big\}\Big\} = 1 \tag{315}$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\geqslant m_1}\Big\{|T_n^{(m)}| \leqslant g(x) + h(n)\Big\}\Big\} = 1. \tag{316}$$

Кроме того, для $n > m_1 \in \mathbf{N}$ определим событие B_n равенством

$$\begin{aligned} B_n \;=\; & \bigcap_{j=1}^{n-m_1-1}\Big\{|T_j| \leqslant g(x) + h(j)\Big\} \cap \Big\{|T_n^{(m_1)}| \leqslant g(x) + h(n)\Big\} \\ & \cap\Big\{b_{m_1}\eta_{n-m_1} > x + (2 + m_1 b)g(x) + na + 2h(n)\Big\} \\ & \cap \bigcap_{j=n-m_1+1}^{n}\Big\{|\eta_j| \leqslant g(x)\Big\}, \end{aligned}$$

а для $n > m_2 \in \mathbf{N}$ событие

$$\begin{aligned} B_n^- \;=\; & \bigcap_{j=1}^{n-m_2-2} \Big\{|T_j| \leqslant g(x)+h(j)\Big\} \cap \Big\{|T_n^{(m_2)}| \leqslant g(x)+h(n)\Big\} \\ & \cap \Big\{b_{m_2}\eta_{n-m_2} > x + (2+m_2 b)g(x) + na + 2h(n)\Big\} \\ & \cap \bigcap_{j=n-m_2+1}^{n} \Big\{|\eta_j| \leqslant g(x)\Big\}. \end{aligned}$$

Лемма 62. *Пусть m_1, $m_2 \in \mathbf{N}$ — произвольные натуральные числа такие, что $b_{m_1} \geqslant 0$ и $b_{m_2} \leqslant 0$. Тогда события B_n, $n > m_1$, и B_n^-, $n > m_2$, попарно не пересекаются.*

Доказательство. Рассмотрим для примера любые два события из числа B_n, скажем, B_k и B_n, $m_1 < k < n$. Если $n \leqslant k + m_1$, то для $\omega \in B_n$ имеем

$$b_{m_1}\eta_{n-m_1}(\omega) \;>\; x + (2+m_1 b)g(x) + na + 2h(n) \geqslant b_{m_1} g(x),$$

в то время как для $\omega \in B_k$

$$b_{m_1}\eta_{n-m_1}(\omega) \;\leqslant\; b_{m_1}|\eta_{n-m_1}(\omega)| \leqslant b_{m_1} g(x).$$

Если $n > k + m_1$, то для $\omega \in B_k$ имеем

$$\begin{aligned} T_k(\omega) \;&=\; T_k^{(m_1)}(\omega) + b_{m_1}\eta_{k-m_1}(\omega) + \sum_{j=k-m_1+1}^{k} b_{k-j}\eta_j(\omega) \\ &>\; -g(x) - h(k) + x + (2+m_1 b)g(x) + ka + 2h(k) - m_1 b g(x) \\ &\geqslant\; g(x) + h(k), \end{aligned}$$

в то время как для $\omega \in B_n$ выполняется неравенство $|T_k(\omega)| \leqslant g(x) + h(k)$. Далее доказательство завершается подобными же рассуждениями.

Лемма 63. *Пусть $b_{m_1} > 0$ и $G_+ \in \mathscr{L}$. Пусть $g(x) \to \infty$ — функция такая, что $G_+((x+g(x))/b_{m_1}) \sim G_+(x/b_{m_1})$ при $x \to \infty$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Big\}}{b_{m_1} G_+(x/b_{m_1})} = \frac{1}{a}.$$

Доказательство. Существование такой функции $g(x)$ гарантировано тем, что распределение G_+ имеет длинный хвост. В силу леммы 62

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Big\} &= \sum_{n>m_1}\mathbf{P}\{B_n\}\\ &= \sum_{n>m_1}\mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{n-m_1-1}\Big\{|T_j|\leqslant g(x)+h(j)\Big\}\cap\Big\{|T_n^{(m_1)}|\leqslant g(x)+h(n)\Big\}\right\}\\ &\quad\times\mathbf{P}^{m_1}\{|\eta_1|\leqslant g(x)\}\mathbf{P}\Big\{b_{m_1}\eta_{n-m_1}>x+(2+m_1b)g(x)+na+2h(n)\Big\}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующая оценка сверху:

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Big\}\leqslant\sum_{n>m_1}\mathbf{P}\Big\{b_{m_1}\eta_1>x+na\Big\},\tag{317}$$

а также оценка снизу:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Big\}\\ &\geqslant\ \mathbf{P}\left\{\bigcap_{n\geqslant 1}\Big\{|T_n|\leqslant g(x)+h(n)\Big\}\cap\bigcap_{n\geqslant m_1}\Big\{|T_n^{(m_1)}|\leqslant g(x)+h(n)\Big\}\right\}\\ &\quad\times\mathbf{P}^{m_1}\Big\{|\eta_1|\leqslant g(x)\Big\}\sum_{n>m_1}\mathbf{P}\Big\{b_{m_1}\eta_1>x+(2+m_1b)g(x)+na+2h(n)\Big\}.\end{aligned}\tag{318}$$

При $x\to\infty$ справедлива сходимость $\mathbf{P}\{|\eta_1|\leqslant g(x)\}\to 1$, а также сходимости (315) и (316). Следовательно, неравенства (317) и (318) ввиду $h(n)=o(n)$ влекут искомое утверждение леммы.

Лемма 64. *Пусть* $b_{m_1}\geqslant 0$, $b_{m_2}\leqslant 0$ *и* $b_{m_1}+|b_{m_2}|>0$. *Пусть* $G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}\in\mathscr{L}$ *и* $g(x)\to\infty$ *— такая функция, что (здесь* $m=\max\{m_1,m_2\}$*) имеет место эквивалентность* $G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x+(2+mb)g(x))\sim G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x)$ *при* $x\to\infty$. *Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}(B_n\cup B_n^-)\Big\}}{G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x)}\ \geqslant\ \frac{1}{a}.$$

З а м е ч а н и е 19. Отметим, что $G_{B,b} \in \mathscr{L}$, если $G_+ \in \mathscr{L}$ и $G_- \in \mathscr{L}^-$. Ещё одним комплексом условий, достаточных для принадлежности $G_{B,b} \in \mathscr{L}$, является $G_+ \in \mathscr{L}$ и $G_-(x/b) = o(G_+(x/B))$ при $x \to \infty$. Отметим также, что функция $g(x)$ в лемме 64 существует ввиду того, распределение $G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}$ имеет длинный хвост.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 64. В силу леммы 62

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}(B_n \cup B_n^-)\Big\} \;=\; \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m} B_n\Big\} + \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m} B_n^-\Big\}.$$

Следуя теперь рассуждениям из доказательства леммы 63, выводим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся x_0 такое, что для $x \geqslant x_0$

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Big\} \;\geqslant\; (1-\varepsilon)\sum_{n>m_1}\mathbf{P}\Big\{b_{m_1}\eta_1 > x + (2+mb)g(x) + na + 2h(n)\Big\};$$

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_2} B_n^-\Big\} \;\geqslant\; (1-\varepsilon)\sum_{n>m_2}\mathbf{P}\Big\{|b_{m_2}|\eta_1 < -x - (2+mb)g(x) - na - 2h(n)\Big\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}(B_n \cup B_n^-)\Big\} \;&\geqslant\; (1-\varepsilon)\sum_{n>m}\Bigg(\overline{F}\Big(\frac{x+(2+mb)g(x)+na+2h(n)}{b_{m_1}}\Big) \\
&\qquad + F\Big(-\frac{x+(2+mb)g(x)+na+2h(n)}{|b_{m_2}|}\Big)\Bigg) \\
&\sim\; (1-\varepsilon)a^{-1}G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x+(2+mb)g(x)) \\
&\sim\; (1-\varepsilon)a^{-1}G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x).
\end{aligned}$$

46.2. Асимптотические оценки снизу для хвоста распределения супремума. Теперь мы готовы сформулировать и доказать асимптотическую оценку снизу для хвоста $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$ при $x \to \infty$.

Теорема 38. *Пусть m_1, $m_2 \in \mathbf{N}$ — два произвольных различных натуральных числа. Положим $C = \max\{0, \overline{c}_{m_1}\} \geqslant 0$ и $c = \min\{0, \overline{c}_{m_2}\} \leqslant 0$. Если $C + |c| > 0$ и $G_{C,|c|} \in \mathscr{L}$, то*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{C,|c|}(x)} \geqslant \frac{1}{a}. \tag{319}$$

Доказательство. В лемме 64 положим $b_k = \overline{c}_k$ и $T_n = S_n + na$. Обозначим $m = \max\{m_1, m_2\}$ и пусть $g(x) \to \infty$ — такая функция, что $G_{C,|c|}(x + (2 + mb)g(x)) \sim G_{C,|c|}(x)$ при $x \to \infty$; её существование гарантировано тем, что распределение $G_{C,|c|}$ имеет длинный хвост. Для $n > m$ рассмотрим события

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_n \ = \ &\Big\{|T_n^{(m_1)}| \leqslant g(x) + h(n)\Big\} \cap \Big\{C\eta_{n-m_1} > x + (2 + m_1 b)g(x) + na + 2h(n)\Big\} \\ &\cap \bigcap_{j=n-m_1+1}^{n} \Big\{|\eta_j| \leqslant g(x)\Big\}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_n^- \ = \ &\Big\{|T_n^{(m_2)}| \leqslant g(x) + h(n)\Big\} \cap \Big\{|c|\eta_{n-m_2} > x + (2 + m_2 b)g(x) + na + 2h(n)\Big\} \\ &\cap \bigcap_{j=n-m_2+1}^{n} \Big\{|\eta_j| \leqslant g(x)\Big\},\end{aligned}$$

где $h(n)$ — функция, рассмотренная в (315) и (316). По определению, $B_n \subseteq \widetilde{B}_n \subseteq \{S_n > x\}$ и $B_n^- \subseteq \widetilde{B}_n^- \subseteq \{S_n > x\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{\bigcup_n (B_n \cup B_n^-)\Big\}.$$

Теперь искомое утверждение следует из леммы 64.

Из доказательства теоремы 38 немедленно вытекают следующие утверждения.

Следствие 17. *Пусть $\overline{c}_m > 0$ для некоторого $m \geqslant 0$ и $G_+ \in \mathscr{L}$. Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{\overline{c}_m G_+(x/\overline{c}_m)} \ \geqslant \ \frac{1}{a}.$$

Следствие 18. *Пусть $\overline{c}_m < 0$ для некоторого $m \geqslant 0$ и $G_- \in \mathscr{L}^-$. Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{|\overline{c}_m| G_-(x/|\overline{c}_m|)} \ \geqslant \ \frac{1}{a}.$$

§ 47. Оценка сверху

Ради простоты будем писать $G_{B,b} \in \mathscr{S}$, когда $G_{B,b}(x)/G_{B,b}(0)$, $x \geqslant 0$, представляет собой хвост субэкспоненциального распределения.

Лемма 65. *Пусть* $b_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, $B \geqslant \sup\{0, b_k, k \in \mathbf{N}\}$ *и* $b \leqslant \inf\{0, b_k, k \in \mathbf{N}\}$. *Пусть существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} b_k \ = \ \widetilde{b}. \tag{320}$$

Тогда если $B + |b| > 0$ *и* $G_{B,|b|} \in \mathscr{S}$, *то*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\Big\{\sup_n \Big\{\sum_{k=1}^n b_{n-k}\eta_k - na\Big\} > x\Big\}}{G_{B,|b|}(x)} \ \leqslant \ \frac{1}{a}.$$

З а м е ч а н и е 20. Условие $G_{B,|b|} \in \mathscr{S}$ выполнено, если, например, $G_+ \in \mathscr{S}$ и $G_-(x/b) = (\gamma + o(1))G^+(x/B)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ при $x \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 65. Наше доказательство основано на использовании метода срезок. Для любого действительного $z > 0$ и любой случайной величины η с распределением F положим

$$\eta^{[z]}(\omega) \ \equiv \ \begin{cases} B\eta(\omega) & \text{при} \quad \eta(\omega) > z, \\ \widetilde{b}\eta(\omega) & \text{при} \quad -z \leqslant \eta(\omega) \leqslant z, \\ b\eta(\omega) & \text{при} \quad \eta(\omega) < -z. \end{cases}$$

Если $x > \max\{B, -b, |\widetilde{b}|\}z$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta^{[z]} > x\} \ &= \ \mathbf{P}\{B\eta > x\} + \mathbf{P}\{b\eta > x\} \\ &= \ \overline{F}(x/B) + F(-x/|b|). \end{aligned} \tag{321}$$

Поскольку $G_{B,|b|} \in \mathscr{S}$, то интегральный хвост распределения $\eta_1^{[z]}$ является субэкспоненциальным. Далее, для любых $\omega \in \Omega$ и $b' \in [b, B]$ имеем

$$b'\eta(\omega) \ \leqslant \ \begin{cases} B\eta(\omega) & \text{при} \quad \eta(\omega) > z, \\ b'\eta(\omega) & \text{при} \quad -z < \eta(\omega) \leqslant z, \\ b\eta(\omega) & \text{при} \quad \eta(\omega) < -z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \eta^{[z]}(\omega) & \text{при} \quad \eta(\omega) > z, \\ \eta^{[z]}(\omega) + (b' - \tilde{b})\eta(\omega) & \text{при} \quad -z < \eta(\omega) \leqslant z, \\ \eta^{[z]}(\omega) & \text{при} \quad \eta(\omega) < -z \end{cases}$$

$$\leqslant \ \eta^{[z]}(\omega) + |\widetilde{b} - b'|z.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} + z\sum_{k=0}^{n-1} |\widetilde{b} - b_k|.$$

Фиксируем $\varepsilon \in (0, a/2)$. Поскольку $b_k \to \widetilde{b}$, то существует K такое, что $|b_k - \widetilde{b}| \leqslant \varepsilon$ для любого $k \geqslant K$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k \ &\leqslant \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} + z\sum_{k=0}^{K} |\widetilde{b} - b_k| + n\varepsilon \\ &\equiv \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} + \widehat{b}z + n\varepsilon, \end{aligned}$$

где $\widehat{b} \equiv \sum_{k=0}^{K} |\widetilde{b} - b_k|$. Так как $\mathbf{E}\eta_1 = 0$, найдётся достаточно большое $z > 0$ такое, что $\mathbf{E}\eta_1^{[z]} \leqslant \varepsilon$. Ввиду теоремы 23(ii) и (321)

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{n\geqslant 1}\Big\{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} - na\Big\} > x\Big\} \ \sim \ \frac{1}{a - \mathbf{E}\eta_1^{[z]}} G_{B,|b|}(x)$$

при $x \to \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\Big\{\sup_{n}\Big\{\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k - na\Big\} > x\Big\} \\ &\qquad\qquad \leqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{n}\Big\{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} - n(a-\varepsilon)\Big\} > x - \widehat{b}z\Big\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant \frac{1+o(1)}{a-2\varepsilon} G_{B,|b|}(x - \widehat{b}z) \sim \frac{1}{a-2\varepsilon} G_{B,|b|}(x). \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, доказательство закончено.

Из последней леммы вытекает следующая асимптотическая верхняя оценка для хвоста $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$.

Теорема 39. *Пусть* $\overline{C} = \sup\{0, \overline{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \geqslant 0$ *и* $\underline{c} = \inf\{0, \overline{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \leqslant 0$. *Тогда если* $G_{\overline{C},|\underline{c}|} \in \mathscr{S}$, *то*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\overline{C},|\underline{c}|}(x)} \leqslant \frac{1}{a}\,. \tag{322}$$

Доказательство вытекает из леммы 65, если положить $b_k = \overline{c}_k$, $B = \overline{C}$ и $b = \underline{c}$. При этом условие (320) выполнено ввиду (310).

В случае, когда все коэффициенты $\overline{c}_k$ неотрицательны или все неположительны, мы немедленно получаем следующие два следствия теоремы 39.

Следствие 19. *Предположим, что* $\overline{c}_k \geqslant 0$ *для любого* $k \in \mathbf{N}$. *Пусть* $G_+ \in \mathscr{S}$ *и* $\overline{C} = \sup_k \overline{c}_k > 0$. *Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{\overline{C}G_+(x/\overline{C})} \ \leqslant\ \frac{1}{a}.$$

Следствие 20. *Предположим, что* $\overline{c}_k \leqslant 0$ *для любого* $k \in \mathbf{N}$. *Пусть* $G_- \in \mathscr{S}$ *и* $\underline{c} = \inf_k \overline{c}_k < 0$. *Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{|\underline{c}|G_-(x/|\underline{c}|)} \ \leqslant\ \frac{1}{a}.$$

§ 48. Асимптотики в случае правильно меняющихся хвостов

Настоящий параграф посвящён случаям, оставшимся вне рассмотрения в теореме 37.

Функция $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ называется *почти правильно меняющейся*, если

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x(1+\delta))}{f(x)} = 1\,. \tag{323}$$

Класс почти правильно меняющихся на бесконечности функций содержит правильно меняющиеся на бесконечности функции. Если распределение G имеет почти правильно меняющийся хвост, то $G \in \mathscr{S}$.

Теорема 40. *Пусть* $G_{\overline{C},|\overline{c}|} \in \mathscr{S}$. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(i) $\overline{C} > 0$, $\overline{C} > \overline{c}_m$ *для любого* m, $\overline{c} = \overline{c}_{m_2} < 0$ *для некоторого* m_2 *и* G_+ *почти правильно меняется на бесконечности;*

(ii) $\overline{C} = \overline{c}_{m_1} > 0$ *для некоторого* m_1, $\overline{c} < 0$, $\overline{c} < \overline{c}_m$ *для любого* m *и* G_- *почти правильно меняется на бесконечности;*

(iii) $\overline{C} > 0$, $\overline{C} > \overline{c}_m$ *для любого* m, $\overline{c} < 0$, $\overline{c} < \overline{c}_m$ *для любого* m *и* $G_{\overline{C},|\overline{c}|}$ *почти правильно меняется на бесконечности.*

Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\} \sim a^{-1} G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{324}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что выполнено условие (i). В силу (323) существуют $\delta \in (0, \varepsilon]$ и $x_0 > 0$ такие, что для $x \geqslant x_0$

$$\frac{G_+(x/(\overline{C}-\delta))}{G_+(x/\overline{C})} \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{325}$$

Поскольку $\sup_{k \geqslant 0} \overline{c}_k = \overline{C}$, то найдётся k_0 такое, что $\overline{c}_{k_0} \geqslant \overline{C} - \delta$. Из (319) вытекает, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\overline{c}_{k_0},|\overline{c}_{m_2}|}(x)} \geqslant \frac{1}{a}. \tag{326}$$

Принимая во внимание равенства

$$\frac{G_{\overline{c}_{k_0},|\overline{c}_{m_2}|}(x)}{G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x)} = \frac{G_{\overline{c}_{k_0},|\overline{c}|}(x)}{G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x)} = \frac{\overline{c}_{k_0} G_+(x/\overline{c}_{k_0}) + |\overline{c}| G_-(x/|\overline{c}|)}{\overline{C} G_+(x/\overline{C}) + |\overline{c}| G_-(x/|\overline{c}|)}$$

и (325), получаем при $x \geqslant x_0$ оценку

$$\begin{aligned}\frac{G_{\overline{c}_{k_0},|\overline{c}_{m_2}|}(x)}{G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x)} &\geqslant \frac{(\overline{C}-\delta)(1-\varepsilon) G_+(x/\overline{C}) + |\overline{c}| G_-(x/|\overline{c}|)}{\overline{C} G_+(x/\overline{C}) + |\overline{c}| G_-(x/|\overline{c}|)} \\ &\geqslant \frac{(\overline{C}-\delta)(1-\varepsilon)}{\overline{C}} \\ &\geqslant \frac{(\overline{C}-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{\overline{C}}.\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольным образом, из (326) вытекает, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x)} \geqslant \frac{1}{a}.$$

Объединяя это неравенство с верхней оценкой (322), приходим к (324). В случаях (ii) и (iii) доказательство проводится таким же образом.

ГЛАВА IV

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ПРОМЕЖУТОЧНОМ СЛУЧАЕ

§ 49. Асимптотика супремума случайного блуждания

Как и ранее, ξ_1, ξ_2, $\ldots$ — независимые случайные величины с общим распределением F на $(-\infty, \infty)$ таким, что $F(-\infty, 0] < 1$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, и

$$M = \sup\{S_n, n \geqslant 0\}.$$

Предполагаем, что среднее $\mathbf{E}\max(0, \xi_1)$ существует и $a = \mathbf{E}\xi_1 \in [-\infty, 0)$; ввиду этого условия S_n уходит на $-\infty$ и, соответственно, M конечно почти наверное.

В настоящей главе исследуем «промежуточный» случай, когда преобразование Лапласа $\varphi(\lambda)$ распределения F удовлетворяет условиям

$$\beta = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) \leqslant 1\} > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\beta) < 1.$$

В этом случае нам подобится следующее

Определение 12. Говорят, что нерешётчатое распределение F в $\mathbf{R}$ принадлежит классу распределений $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, если функция $e^{\gamma x}\overline{F}(x)$ имеет длинный хвост, $\varphi(\gamma) \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\gamma t} F(dt) < \infty$ и

$$\overline{F * F}(x) \ \sim \ c\overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Говорят, что распределение F на решётке $\{nh, n \in \mathbf{Z}^+\}$ принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, если упомянутые свойства справедливы для x кратным шагу решётки h.

Известно (см. [27, 25]), что тогда с необходимостью имеет место равенство

$$c = 2\varphi(\gamma).$$

Ясно, что $\mathscr{S} = \mathscr{S}(0)$. Класс $\mathscr{S}(\gamma)$ включает в себя, в частности, распределения с хвостами типа $e^{-\gamma u}g(u)$, где $g(u)$ — интегрируемая функция, правильно меняющаяся на бесконечности. Отметим, что если распределение случайной величины ξ принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$ и $\varphi(\gamma) \leqslant 1$, то $\beta = \gamma$.

Если $\gamma > 0$ и $G \in \mathscr{S}(\gamma)$, то известно (см., например, [1, § 22]), что

$$\int_x^\infty \overline{G}(t)dt \ \sim \ \frac{\overline{G}(x)}{\gamma}, \quad x \to \infty \tag{327}$$

в случае нерешётчатого распределения G и

$$\int_{nh}^\infty \overline{G}(t)dt \ \sim \ \frac{\overline{G}(nh)}{1 - e^{-\gamma h}}, \quad n \to \infty \tag{328}$$

в случае распределения G на решётке с шагом h.

Теорема 41. *Если $\varphi(\beta) < 1$ и функция $e^{\beta x}\overline{F}(x)$ имеет длинный хвост, то следующие утверждения эквивалентны* (*в решётчатом случае следует взять x пропорциональным шагу решётки*):

(i) *распределение случайной величины $\xi_1\mathbf{I}\{\xi_1 \geqslant 0\}$ принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$;*

(ii) *при $x \to \infty$ имеет место эквивалентность*

$$\mathbf{P}\{M > x\} \ \sim \ \frac{\mathbf{E}e^{\beta M}}{1 - \varphi(\beta)}\overline{F}(x); \tag{329}$$

(iii) $\mathbf{P}\{M \geqslant x\} \sim c\overline{F}(x)$ *при $x \to \infty$ для некоторого $c \in (0, \infty)$.*

Ввиду (327) и (328) из соотношения (329) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{M > x\} \ \sim \ \frac{\beta\mathbf{E}e^{\beta M}}{1 - \varphi(\beta)} \int_x^\infty \overline{F}(t)dt \quad \text{при } x \to \infty$$

в случае нерешётчатого распределения ξ_1 и

$$\mathbf{P}\{M \geqslant nh\} \sim \frac{(1-e^{-\beta h})\mathbf{E}e^{\beta M}}{1-\varphi(\beta)} \int_{nh}^{\infty} \overline{F}(t)dt \quad \text{при } n \to \infty,$$

в случае, когда ξ_1 имеет решётчатое распределение с шагом h. Правые части последних соотношений «переходят по непрерывности» при $\beta \downarrow 0$ в правую часть соотношения (ii) из теоремы 23 для субэкспоненциальных распределений.

Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) теоремы 41 доказана в [1, § 22] для случая, когда функция $e^{\beta x}\overline{F}(x)$ является надстепенной. В сформулированных условиях импликация (i)$\Rightarrow$(ii) сформулирована в работе [84, теорема 2]; корректное доказательство изложено в [42, теорема 1].

Доказательство импликации (iii)$\Rightarrow$(i). Рассмотрим случайную величину ξ с распределением F такую, что ξ и M незавмсимы. Из определения супремума вытекает, что случайные величины $\max\{0, M+\xi\}$ и M имеют одинаковое распределение. Следовательно, для любых $x>0$ и $y>0$ имеем равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M > x\} &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{\xi > x-t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} \\ &= \int_0^{x-y} \overline{F}(x-t) d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} - \int_{x-y}^{\infty} \overline{F}(x-t) d\mathbf{P}\{M > t\} \\ &= \int_0^{x-y} \overline{F}(x-t) d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} + \overline{F}(y)\mathbf{P}\{M > x-y\} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{y} \mathbf{P}\{M > x-t\} dF(t) \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{330}$$

Поскольку $e^{\beta x}\overline{F}(x)$ — функция с длинным хвостом, то в силу условия (iii) функция $e^{\beta x}\mathbf{P}\{M > x\}$ также имеет длинный хвост и найдётся последовательность $y = y(x) \to \infty$ такая, что

$$\frac{\mathbf{P}\{M > x\}}{\mathbf{P}\{M > x+h\}} \to e^{\beta h} \tag{331}$$

при $x \to \infty$ равномерно в области $|h| \leqslant y(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_3 &\sim \mathbf{P}\{M > x\} \int_{-\infty}^{y} e^{\beta t} dF(t) \\ &\sim \mathbf{P}\{M > x\} \mathbf{E} e^{\beta\xi}, \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{332}$$

Ввилу условия (iii), сходимости (331) и неравенства Чебышёва получаем

$$\begin{aligned} I_2 \equiv \overline{F}(y)\mathbf{P}\{M > x - y\} &\sim \mathbf{P}\{\xi > y\} c \mathbf{P}\{\xi > x\} e^{\beta y} \\ &\leqslant \frac{\mathbf{E}\{e^{\beta\xi}; \xi > y\}}{e^{\beta y}} c \mathbf{P}\{\xi > x\} e^{\beta y} \\ &= o(\mathbf{P}\{\xi > x\}) \\ &= o(\mathbf{P}\{M > x\}). \end{aligned} \tag{333}$$

Используя условие (iii) и подставляя (332) и (333) в (330), выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M > x\} &= \frac{1 + o(1)}{c} \int_0^{x-y} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{M > x\}(\mathbf{E} e^{\beta\xi} + o(1)) \end{aligned} \tag{334}$$

при $x \to \infty$. Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} &= \int_0^{x-y} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{M > y\}\mathbf{P}\{M > x - y\} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{y} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\}, \end{aligned}$$

практически такие же вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} &= \int_0^{x-y} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{M > x\}(\mathbf{E} e^{\beta M} + o(1)) \end{aligned} \tag{335}$$

при $x \to \infty$. Из соотношений (334) и (335) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{M > x - t\} d\mathbf{P}\{M \leqslant t\} &= \mathbf{P}\{M > x\}(\mathbf{E} e^{\beta M} + c - c\mathbf{E} e^{\beta\xi} + o(1)) \\ &\equiv (\widehat{c} + o(1))\mathbf{P}\{M > x\}. \end{aligned}$$

Поэтому распределение случайной величины M принадлежит $\mathscr{S}(\beta)$. Следовательно, в силу условия (iii) и теоремы 2.7 [54] распределение случайной величины $\xi_1\mathbf{I}\{\xi_1 \geqslant 0\}$ также принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Теорема 41 доказана.

§ 50. Точная асимптотика $\overline{\pi}_n(x)$ для асимптотически однородной цепи

В настоящем параграфе исследуется асимптотически однородная в пространстве цепь Маркова в промежуточном случае. Асимптотика вероятностей больших уклонений цепи найдена в явном виде при всех значениях времени n. Ответы и доказательства здесь существенно отличаются от крамеровского и субэкспоненциального случаев.

Именно, всюду в этом параграфе предполагаем, что существует случайная величина η с распределением G и преобразованием Лапласа $\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\eta}$ такая, что для некоторого $V \in \mathbf{R}$ выполняется

$$v + \xi(v) \ \leqslant_{\mathrm{st}} \ V + \eta \ \text{ при } v \leqslant V, \quad \xi(v) \leqslant_{\mathrm{st}} \eta \ \text{ при } v > V. \tag{336}$$

Основные условия накладываются на η: $\mathbf{E}\eta < 0$ и $\psi(\beta) < 1$, где $\beta = \sup\{\lambda : \psi(\lambda) \leqslant 1\}$. Отметим, что *теперь параметр* β, играющий всюду важную роль, *относится к распределению* G *мажоранты* η, а не к распределению F величины ξ.

50.1. Оценки сверху для хвостов достационарного и стационарного распределений цепи. В этом разделе приводится некоторое обобщение леммы 2 из [89], касающееся оценки сверху хвоста распределения цепи со значениями в $\mathbf{R}$ в промежуточном случае.

Лемма 66. *Пусть распределение G случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Тогда, если цепь X допускает (вообще говоря, не единствен-*

ную) инвариантную меру π, *то*

$$\sup_x \frac{\overline{\pi}(x)}{\overline{G}(x)} < \infty. \tag{337}$$

Если начальное распределение π_0 *цепи таково, что* $\overline{\pi}_0(x) \leqslant c'\overline{G}(x)$ *для некоторого* c', *то*

$$\sup_{n,x} \frac{\overline{\pi}_n(x)}{\overline{G}(x)} < \infty. \tag{338}$$

Доказательство. Рассмотрим однородную в пространстве цепь $Y = \{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определённую равенством $Y_{n+1} = (Y_n + \eta_{n+1})^+$, где случайные величины η_n суть независимые копии η. В силу условия (336) цепь Маркова $V + Y_n$ мажорирует цепь X_n и, следовательно,

$$\overline{\pi}(x) \leqslant \overline{\pi}_Y(x - V), \tag{339}$$

где π_Y — инвариантная мера цепи Y. Поскольку $\mathbf{E}e^{\beta\eta} < 1$ и распределение случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$, то в силу теоремы 41 $\overline{\pi}_Y(x) \sim c_1\mathbf{P}\{\eta > x\}$ при $x \to \infty$ для некоторого c_1. Поскольку функция $e^{\beta t}\overline{G}(t)$ имеет длинный хвост, $\overline{\pi}_Y(x - V) \sim c_1 e^{\beta V}\overline{G}(x)$. Подставляя полученную эквивалентность в (339), приходим к оценке (337).

Докажем (338). Пусть $Y_0 = 0$ и, стало быть, $Y_1 = \eta_1^+$. Ввиду условия $\overline{\pi}_0(x) \leqslant c'\overline{G}(x)$ и того, что функция $e^{\beta x}\overline{G}(x)$ имеет длинный хвост, найдётся достаточно большой уровень V' такой, что $X_0 \leqslant_{\mathrm{st}} V' + Y_1$. Отсюда в силу условия (336) $X_n \leqslant_{\mathrm{st}} V' + Y_{n+1}$ для любого n и, соответственно,

$$\overline{\pi}_n(x) \leqslant \mathbf{P}\{Y_{n+1} > x - V'\}.$$

Последнее неравенство влечёт (282), поскольку, как известно, однородная цепь Y_n при нулевом начальном условии не убывает по распределению и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{Y_{n+1} > x - V'\} \leqslant \overline{\pi}_Y(x - V')$$

для любого n. Лемма доказана.

50.2. Точная асимптотика достационарных распределений.

Теорема 42. *Пусть распределение G случайной величины η нерешётчатое и принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Пусть выполнено условие* (336) *и для каждого $u \in \mathbf{R}$ существует $c(u)$ такое, что*

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) > t\}}{\overline{G}(t)} \to c(u) \tag{340}$$

при $t \to \infty$ равномерно по u из любого компакта. Кроме того, предполагаем выполненной сходимость (1). *Тогда*

(i) *если начальное распределение π_0 таково, что $\overline{\pi}_0(x)/\overline{G}(x) \to c_0 \geqslant 0$, то имеет место равномерное по $n \geqslant 0$ соотношение*

$$\overline{\pi}_n(x) = (c_n + o(1))\overline{G}(x) \quad \text{при } x \to \infty, \tag{341}$$

где c_n при $n \geqslant 1$ определяется рекуррентным образом $c_n = \alpha_{n-1} + \varphi(\beta)c_{n-1}$,

$$\alpha_{n-1} = \int_{\mathbf{R}} c(u)e^{\beta u}\pi_{n-1}(du) \geqslant 0;$$

(ii) *если $\overline{\pi}_0(x) \leqslant c'\overline{G}(x)$, то при n, $x \to \infty$*

$$\overline{\pi}_n(x) = (c_\infty + o(1))\overline{G}(x), \tag{342}$$

где

$$c_\infty = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\alpha_\infty}{1-\varphi(\beta)}, \qquad \alpha_\infty = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \int_{\mathbf{R}} c(u)e^{\beta u}\pi(du) \geqslant 0.$$

З а м е ч а н и е 21. Пусть распределение G сосредоточено на решётке целых чисел, причём данная решётка минимальна. Тогда утверждения теоремы остаются справедливыми, если значения цепи X выше некоторого уровня, а также параметров t и x в (340), (341) и (342) — целые.

З а м е ч а н и е 22. Поскольку $\varphi(\beta) \leqslant \psi(\beta) < 1$ и $c(u) \leqslant c$, то в силу леммы 66 все константы α_n конечны и, более того, последовательность $\{\alpha_n\}$, а вместе с ней и $\{c_n\}$, равномерно ограничена.

Из теоремы, пункт (ii), вытекает, что при n, $x \to \infty$ асимптотика вероятности $\overline{\pi}_n(x)$ совпадает с асимптотикой хвоста инвариантной меры: $\overline{\pi}_n(x) = (1 + o(1))\overline{\pi}(x)$.

Пусть случайные величины ξ_n независимы и распределены одинаково с ξ, $\varphi(\beta) < 1$ и распределение случайной величины ξ принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Пусть X — однородная цепь в $\mathbf{R}^+$, т. е. $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$. Применяя теорему 42 в этом конкретном случае, получаем, что для однородных цепей

$$\overline{\pi}_n(x) = (c_n + o(1))\overline{F}(x)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 1$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k(\beta)\mathbf{E}e^{\beta X_{n-1-k}}.$$

В частности,

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\leqslant n} S_k > x\Big\} \sim \mathbf{P}\Big\{\sup_{k} S_k > x\Big\} \sim c_\infty\overline{F}(x) \quad \text{при } n, x \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 42 проведём в нерешётчатом случае (в решётчатом случае следует внести лишь минимальные изменения, связанные с целочисленностью некоторых параметров). Поскольку временной параметр n принимает лишь счётное число значений, для доказательства теоремы достаточно проверить, что

(а) (341) выполнено при $x \to \infty$ для любого фиксированного n;

(б) выполнено (342).

Фиксируем $U > V$. Для любого $x > 2U$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\pi}_{n+1}(x)}{\overline{G}(x)} &= \left(\int_{-\infty}^{-U} + \int_{-U}^{U} + \int_{U}^{x-U} + \int_{x-U}^{\infty}\right) \frac{\mathbf{P}\{u + \xi(u) > x\}}{\overline{G}(x)}\pi_n(du) \\ &\equiv I_1(U, n, x) + \cdots + I_4(U, n, x). \end{aligned} \tag{343}$$

Рассмотрим отдельно каждое из этих четырёх слагаемых.

Поскольку функция $e^{\beta x}\mathbf{P}\{\eta > x\}$ имеет длинный хвост, то ввиду условия (340) имеем равномерную по $|u| \leqslant U$ сходимость

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) > x - u\}}{\overline{G}(x)} \to c(u)e^{\beta u} \text{ при } x\to\infty. \tag{344}$$

Следовательно, равномерно по n

$$I_2(U,n,x) \to \int_{-U}^{U} c(u)e^{\beta u}\pi_n(du) \text{ при } x\to\infty. \tag{345}$$

Докажем, что слагаемые $I_1(U,n,x)$ и $I_3(U,n,x)$ в известном смысле пренебрежимо малы. Ввиду условия (336) слагаемое $I_1(U,n,x)$ допускает оценку

$$I_1(U,n,x) \leqslant \frac{\overline{G}(x-V)}{\overline{G}(x)}\pi_n(-U).$$

Так как функция $e^{\beta x}\overline{G}(x)$ имеет длинный хвост, а семейство распределений $\{\pi_n\}$ слабо компактно, из последней оценки имеем

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_1(U,n,x)\right) \leqslant e^{\beta V}\sup_n \pi_n(-U) \equiv I_1(U), \quad \lim_{U\to\infty} I_1(U) = 0. \tag{346}$$

Оценим слагаемое $I_3(U,n,x)$. Используя условие (336) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_3(U,n,x) &\leqslant \int_U^{x-U} \frac{\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)}\pi_n(du) \\ &= -\left.\frac{\overline{\pi}_n(u)\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)}\right|_U^{x-U} + \int_U^{x-U}\frac{\overline{\pi}_n(u)d_u\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)} \\ &\leqslant \frac{\overline{\pi}_n(U)\overline{G}(x-U)}{\overline{G}(x)} + \int_U^{x-U}\frac{\overline{\pi}_n(x-v)G(dv)}{\overline{G}(x)} \\ &\equiv I_{31}(U,n,x) + I_{32}(U,n,x). \end{aligned} \tag{347}$$

Для любого фиксированного U

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_{31}(U,n,x)\right) \leqslant \sup_n \overline{\pi}_n(U)e^{\beta U},$$

и, следовательно, в силу леммы 66

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_{31}(U,n,x)\right) \leqslant \widehat{c}\overline{G}(U)e^{\beta U} = I_{31}(U), \quad \lim_{U\to\infty} I_{31}(U) = 0. \tag{348}$$

Повторно используя лемму 66, оценим слагаемое I_{32}:

$$I_{32}(U,n,x) \leqslant \widehat{c}\int_U^{x-U} \frac{\overline{G}(x-v)G(dv)}{\overline{G}(x)}.$$

Поэтому, как следует из [54] (см. формулу (2) там),

$$\lim_{U\to\infty}\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_{32}(U,n,x)\right) = 0. \tag{349}$$

Подставляя (348) и (349) в (347), приходим к соотношениям

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_3(U,n,x)\right) \leqslant I_3(U), \quad \lim_{U\to\infty} I_3(U) = 0. \tag{350}$$

Оценим $I_4(U,n,x)$. Обозначим

$$\overline{c}_n = \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\pi}_n(x)}{\overline{G}(x)}.$$

Согласно лемме 66 $\overline{c}_n < \infty$ для любого n. Так как условие слабой сходимости распределений скачков эквивалентно сходимости в метрике Леви — Прохорова, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $u_0 = u_0(\varepsilon)$ такое, что

$$F(v+\varepsilon) - \varepsilon \leqslant \mathbf{P}\{\xi(u) > v\} \leqslant F(v-\varepsilon) + \varepsilon \tag{351}$$

для любых $u \geqslant u_0$ и v. Поэтому при $u \geqslant u_0 + U$ слагаемое $I_4(U,n,x)$ в (343) можно оценить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} I_4(U,n,x) &\leqslant \int_{x-U}^{\infty}(\overline{F}(x-u-\varepsilon)+\varepsilon)\frac{\pi_n(du)}{\overline{G}(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{U-\varepsilon}\overline{F}(v)\frac{d_v\pi_n(x-\varepsilon-v)}{G(x)} + \varepsilon\frac{\overline{\pi}_n(x-U)}{\overline{G}(x)} \\ &\equiv I_{41}(U,n,x) + I_{42}(U,n,x). \end{aligned} \tag{352}$$

Интегрируя по частям, оценим $I_{41}(U,n,x)$:

$$I_{41}(U,n,x) = \int_{-\infty}^{U-\varepsilon}\frac{\overline{\pi}_n(x-\varepsilon-v)}{\overline{G}(x)}dF(v) + \frac{\overline{F}(U-\varepsilon)\overline{\pi}_n(x-U)}{\overline{G}(x)}.$$

Отсюда и из (352) в силу определения $\overline{c}_n$ имеем

$$\limsup_{x\to\infty} I_4(U,n,x) \leqslant \overline{c}_n e^{\beta\varepsilon}\int_{-\infty}^{U} e^{\beta v}F(dv) + O\left(\overline{F}(U-\varepsilon)e^{\beta U}+\varepsilon\right). \qquad (353)$$

Подставляя (346), (345), (350) и (353) в (343), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\overline{c}_{n+1} \;\leqslant\; & \int_{-U}^{U} c(u)e^{\beta u}\pi_n(du) + \overline{c}_n e^{\beta\varepsilon}\int_{-\infty}^{U} e^{\beta v}F(dv) \\ & + O\left(I_1(U)+I_3(U)+\overline{F}(U-\varepsilon)e^{\beta U}+\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\overline{c}_{n+1} \;\leqslant\; \int_{-U}^{U} c(u)e^{\beta u}\pi_n(du) + \overline{c}_n\int_{-\infty}^{U} e^{\beta v}F(dv) + O\left(I_1(U)+I_3(U)+\overline{F}(U)e^{\beta U}\right).$$

Устремляя $U\to\infty$ и используя (345), (346) и (350), выводим оценку

$$\overline{c}_{n+1} \leqslant \alpha_n + \overline{c}_n\varphi(\beta).$$

Отсюда по индукции заключаем, что верхний предел при $x\to\infty$ отношения $\overline{\pi}_{n+1}(x)/\overline{G}(x)$ не превосходит c_{n+1}. Ровно также доказывается, что нижний предел того же отношения не меньше c_{n+1}. Следовательно, пункт (а) доказан.

Для доказательства пункта (б) обозначим

$$\overline{c} = \limsup_{n,x\to\infty}\frac{\overline{\pi}_n(x)}{\overline{G}(x)};$$

$\overline{c} < \infty$, ввиду леммы 66. Вместо (353) получаем, ровно также, как и ранее, оценку

$$\limsup_{n,x\to\infty} I_4(U,n,x) \leqslant \overline{c}e^{\beta\varepsilon}\int_{-\infty}^{U} e^{\beta v}F(dv) + O\left(\overline{F}(U-\varepsilon)e^{\beta U}+\varepsilon\right). \qquad (354)$$

Подставляя (346), (345), (350) и (354) в (343), учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$ и устремляя $U\to\infty$, приходим к соотношению

$$\overline{c} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\alpha_n + \overline{c}\varphi(\beta) = \alpha_\infty + \overline{c}\varphi(\beta).$$

Следовательно, верхний предел при n, $x \to \infty$ отношения $\overline{\pi}_{n+1}(x)/\overline{G}(x)$ не превосходит $\alpha_\infty/(1-\varphi(\beta))$. Ровно также доказывается, что нижний предел того же отношения не меньше $\alpha_\infty/(1-\varphi(\beta))$. Пункт (б), а вместе с ним и теорема 42 доказаны.

5.3. Точная асимптотика стационарных распределений. В этом разделе предполагается, что цепь X допускает инвариантную меру π. Справедливо следующее усиление теоремы 5 из [89] о вероятностях больших уклонений стационарного распределения.

Теорема 43. *Пусть выполнены условия теоремы* 42 (*кроме* (1)). *Тогда*

$$\overline{\pi}(x) = \frac{\alpha_\infty + o(1)}{1-\varphi(\beta)}\overline{G}(x)$$

при $x \to \infty$, *где*

$$\alpha_\infty \equiv \int_{\mathbf{R}} c(u) e^{\beta u} \pi(du) \geqslant 0.$$

Замечание 23. Сформулированная теорема обобщает теорему 5 из [89] в том, что класс распределений ξ расширяется от класса надстепенных распределений до класса $\mathscr{S}(\beta)$ и, что не менее важно, в следующем. В теореме 5 из [89] использовалось условие

$$|\mathbf{P}\{\xi(u) > t\} - \mathbf{P}\{\xi > t\}| \leqslant \delta(u)\mathbf{P}\{\xi > t\},$$

где $\delta(u) \downarrow 0$ при $u \to \infty$, которое влечёт сходимость распределений $\xi(u)$ и ξ в равномерной метрике. Если цепь X принимает значения на решётке, сходимость в равномерной метрике эквивалентна слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$. В общем случае, когда цепь X вещественнозначна, сходимость в равномерной метрике существенно сильнее, вообще говоря, чем слабая сходимость $\xi(u) \Rightarrow \xi$, предполагаемая нами.

Доказательство теоремы 43. По лемме 1 найдётся $\widehat{c}$ такое, что $\overline{\pi}(x) \leqslant \widehat{c}\overline{G}(x)$ для любого x. Остаётся воспользоваться теоремой 42 при $\pi_0 = \pi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А. А.*, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

2. *Боровков А. А.*, Математическая статистика. Новосибирск: Наука; Изд-во Института математики, 1997.

3. *Боровков А. А.*, Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

4. *Боровков А. А.*, Асимптотически оптимальные решения в задаче о разладке. *Теория вероятн. примен.* **43** (1998) 625–654.

5. *Боровков А. А.*, Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. *Сиб. мат. журн.* **3** (1962) 645–694.

6. *Боровков А. А.*, Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

7. *Боровков А. А.*, О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. *Сиб. мат. журн.* **36** (1995) 493–509.

8. *Боровков А. А.*, Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями. *Сиб. мат. журн.* **37** (1996) 732–744.

9. *Боровков А. А., Боровков К. А.*, О вероятностях больших уклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно изменяющимися хвостами. *Теория вероятн. примен.* **46** (2001) 211–232.

10. *Боровков А. А., Могульский А. А.*, Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Труды института математики СО РАН, Новосибирск: 1992, Т. 19. Перевод: Large deviations and testing statistical hypotheses. I. Large deviations of sums of random vectors. *Siberian Adv. in Math.* **2** (1992) 52–120.

11. *Боровков А. А., Могульский А. А.*, Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий. *Сиб. мат. журн.* **37** (1996) 745–782.

12. *Боровков А. А., Могульский А. А.*, Большие уклонения для цепей Маркова в положительном квадранте. *Успехи мат. наук* **56** (2001) 3–116.

13. *Боровков А. А., Фосс С. Г.*, Оценки для перескока случайного блуждания через произвольную границу и их применения. *Теория вероятн. примен.* **44** (1999) 249–277.

14. *Вентцель А. Д.*, Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986.

15. *Гнеденко Б. В.*, Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Наука, 1969.

16. *Годованчук В. В.*, Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона. *Теория вероятн. примен.* **23** (1978) 624–630.

17. *Добрушин Р. Л.*, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I. *Теория вероятн. и её примен.* **1** (1956) 72–89.

18. *Добрушин Р. Л.*, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II. *Теория вероятн. примен.* **1** (1956) 365–425.

19. *Добрушин Р. Л., Печерский Е. А.*, Большие уклонения для случайных процессов с независимыми приращениями на бесконечном интервале. *Проблемы передачи информации* **34** (1998) 76–108.

20. *Дынкин Е. Б.*, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями. *Изв. Академии Наук СССР, Сер. Матем.* **19** (1955) 247–266.

21. *Новак С. Ю., Утев С. А.*, Об асимптотике распределения отношения сумм случайных величин. *Сиб. мат. журн.* **31** (1990) 92–101.

22. *Петров В. В.*, Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

23. *Петров В. В.*, О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятн. примен.* **10** (1965) 310–322.

24. *Пинелис И. Ф.*, Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий. *Теория вероятн. примен.* **26** (1981) 73–87.

25. *Рогозин Б. А.*, О постоянной в определении субэкспоненциальных распределений. *Теория вероят. примен.* **44** (1999) 455–457.

26. *Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.*, Банаховы алгебры мер на прямой. *Сиб. мат. журн.* **21** (1980) 160–169.

27. *Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.*, Сильно субэкспоненциальные распределения и банаховы алгебры мер. *Сиб. мат. журн.* **40** (1999) 1137–1146.

28. *Сгибнев М. С.*, Банаховы алгебры функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности. *Сиб. мат. журн.* **22** (1981) 179–187.

29. *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

30. *Чистяков В. П.*, Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся процессам. *Теория вероятн. примен.* **9** (1964) 710–718.

31. *Ширяев А. Н.*, Вероятность. М.: Наука, 1989.

32. *Asmussen S.*, Applied Probability and Queues. John Wiley & Sons, Chichester, 1987 (2nd ed., Springer, New York, 2003).

33. *Asmussen S.*, Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore, 2000.

34. *Asmussen S.*, A probabilistic look at the Wiener–Hopf equation. *SIAM Review* **40** (1998) 189–201.

35. *Asmussen S., Henriksen L. Fløe, Klüppelberg C.*, Large claims approximations for risk processes in a Markovian environment. *Stochastic Process. Appl.* **54** (1994) 29–43.

36. *Asmussen S., Højgaard B.*, Ruin probability approximations for Markov-modulated risk processes with heavy tails. *Theory Random Proc.* **2** (1996) 96–107.

37. *Asmussen S., Kalashnikov V., Konstantinides D., Klüppelberg C., and Tsitsiashvili G.*, A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails. *Statist. Probab. Letters* **56** (2002) 399–404.

38. *Asmussen S., Schmidli H., Schmidt V.*, Tail probabilities for non-standard risk and queueing processes with subexponential jumps. *Adv. Appl. Probab.* **31** (1999) 422–447.

39. *Athreya K., Ney P.*, Branching Processes. Springer: Berlin, 1972.

40. *Baccelli F., Schlegel S., Schmidt V.*, Asymptotics of stochastic networks with subexponential service times. *Queueing Systems. Theory Appl.* **33** (1999) 205–232.

41. *Bertoin J., Doney R. A.*, On the local behaviour of ladder height distributions. *J. Appl. Prob.* **31** (1994) 816–821.

42. *Bertoin J., Doney R. A.*, Some asymptotic results for transient random walks, *Adv. Appl. Prob.* **28** (1996) 207–226.

43. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.*, Regular Variation. Cambridge University Press, 1987.

44. *Borovkov A. A.*, Large deviations probabilities for random walks in the absence of finite expectations of jumps, *Probab. Theory Relat. Fields* **125** (2003) 421–446.

45. *Callaert H., Cohen J. W.*, A lemma on regular variation of a transient renewal function. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **24** (1972) 275–278.

46. *Chover J., Ney P., Wainger S.*, Functions of probability measures. *J. d'Analyse Mathématique* **26** (1973) 255–302.

47. *Chover J., Ney P., Wainger S.*, Degeneracy properties of subcritical branching processes, *Ann. Probability* **1** (1973) 663–673.

48. *Cohen J. W.*, Some results on regular variation for distributions in queueing and fluctuation theory. *J. Appl. Probab.* **10** (1973) 343–353.

49. *Cramér H.*, Collective risk theory. Stockholm: Esselte, 1955.

50. *Csörgö S., Deheuvels P., Mason D. M.*, Kernel estimates of the tail index of a distribution. *Ann. Statist.* **13** (1985) 1050–1077.

51. *Dupuis P., Ellis R. S.*, Large deviations for Markov processes with discontinuous statistics, II: random walks, *Probab. Th. Rel. Fields* **91** (1992) 153–194.

52. *Dupuis P., Ellis R. S.*, A weak convergence approach to the theory of large deviations. Wiley, 1997.

53. *Embrechts P., Goldie C. M.*, On closure and factorization properties of subexponential distributions, *J. Austr. Math. Soc.*, Ser. A **29** (1980) 243–256.

54. *Embrechts P., Goldie C. M.*, On convolution tails, *Stochastic Process. Appl.* **13** (1982) 263–278.

55. *Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N.*, Subexponentiality and infinite divisibility. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **49** (1979) 335–347.

56. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.*, Modelling Extremal Events. Springer, Berlin, 1997.

57. *Embrechts P., Omey E.*, A property of longtailed distributions, *J. Appl. Prob.* **21** (1984) 80–87.

58. *Embrechts P., Veraverbeke N.*, Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims, *Insurance: Math. and Economics* **1** (1982) 55–72.

59. *Erickson K. B.*, Strong renewal theorems with infinite mean, *Transactions of the American Mathematical Society* **151** (1970) 263–291.

60. *Erickson K. B.*, The strong law of large numbers when the mean is undefined, *Transactions of the American Mathematical Society* **185** (1973) 371–381.

61. *Foss S., Zachary S.*, The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift. *Ann. Appl. Prob.* **13** (2003) 37–53.

62. *Haeusler E., Teugels J. L.*, On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation. *Ann. Statist.* **13** (1985) 743–756.

63. *Harris T.*, The Theory of Branching Processes. Springer, Berlin, 1963.

64. *Hoffman-Jørgensen J., Pisier G.*, The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. *Ann. Probab.* **4** (1976) 587–599.

65. *Höglund T.*, A unified formulation of the Central Limit Theorem for small and large deviations from the mean. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.* **49** (1979) 105–117.

66. *Jelenković P. R., Lazar A. A.*, A network multiplexer with multiple time scale and subexponential arrivals. In *Stochastic Networks: Stability and Rare Events.* New York: Springer, 1996. P. 215–235.

67. *Karlin S., Taylor H. M.*, A First Course in Stochastic Processes. 2nd Edition. New York, London, etc.: Academic Press, 1975.

68. *Klüppelberg C.*, Subexponential distributions and integrated tails, *J. Appl. Probab.* **25** (1988) 132–141.

69. *Klüppelberg C.*, Subexponential distributions and characterization of related classes. *Probab. Th. Rel. Fields* **82** (1989) 259–269.

70. *Klüppelberg C., Kyprianou A. E., Maller R. A.*, Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. Submitted for publication (2003).

71. *Korshunov D. A.*, Transition phenomena for real-valued Markov chains. *Sibirian Adv. Math.* **3** (1993) 53–100.

72. *Meyn S. P., Tweedie R. L.*, Markov Chains and Stochastic Stability. London, Berlin, etc.: Springer–Verlag, 1993.

73. *Mikosch T., Samorodnitsky G.*, The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps, *Ann. Appl. Probab.* **10** (2000) 1025–1064.

74. *Pakes A. G.*, On the tails of waiting-time distribution, *J. Appl. Probab.* **12** (1975) 555–564.

75. *Pinelis I.*, Optimum bounds for the distribution of martingales in Banach spaces. *Ann. Probab.* **22** (1994) 1679–1706.

76. *Pisier G.*, Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel J. Math.* **20** (1975) 326–350.

77. *Puhalskii A.*, Large deviations and idempotent probability. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, 2001.

78. *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.*, Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley, Chichester, 1998.

79. *Stadje W.*, A note on the maximum of a random walk, *Statistics & Probability Letters* **23** (1995) 227–231.

80. *Stone C.*, On characteristic functions and renewal theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965) 327–342.

81. *Stone C.*, On moment generating functions and renewal theory. *Ann. Math. Statis.* **36** (1965) 1298–1301.

82. *Teugels J. L.*, The class of subexponential distributions, *Ann. Probab.* **3** (1975) 1000–1011.

83. *Varadhan S. R. S.*, Large Deviations and Applications. Philadelphia: Soc. for industr. and appl. math., 1984.

84. *Veraverbeke N.*, Asymptotic behavior of Wiener-Hopf factors of a random walk. *Stochastic Process. Appl.* **5** (1977) 27–37.

85. *Woodroofe M.*, Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 39. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1982.

Работы автора по теме диссертации

86. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.*, Ergodicity in a sense of weak convergence, equilibrium-type identities and large deviations for Markov chains. *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Proceedings of the Sixth Vilnius Conference (1993) P. 89–98.

87. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.*, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения. *Теория вероятн. примен.* **41** (1996) 3–30.

Перевод на английский: Large-deviation probabilities for one-dimensional Markov chains Part 1: Stationary distributions. *Theory Probab. Appl.* **41** (1997) 1–24.

88. *Korshunov D.*, On distribution tail of the maximum of a random walk. *Stochastic Processes Appl.* **72** (1997) 97–103.

89. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.*, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае. *Теория вероятн. примен.* **45** (2000) 437–468.

Перевод на английский: Large-deviation probabilities for one-dimensional Markov chains. Part 2: Prestationary distributions in the exponential case. *Theory Probab. Appl.* **45** (2001) 379–405.

90. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.*, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 3. Достационарные распределения в субэкспоненциальном случае. *Теория вероятн. примен.* **46** (2001) 640–657.

Перевод на английский: Large-deviation probabilities for one-dimensional Markov chains. Part 3: Prestationary distributions in the subexponential case. *Theory Probab. Appl.* **46** (2002) 603–618.

91. *Foss S., Korshunov D.*, Sampling at a random time with a heavy-tailed distribution. *Markov Processes and Related Fields* **6** (2000) 543–568.

92. *Коршунов Д. А.*, Предельные теоремы для общих цепей Маркова. *Сиб. мат. журн.* **42** (2001) 354–371.

Перевод на английский: Limit theorems for general Markov chains. *Sib. Math. J.* **42** (2001) 301–316.

93. *Коршунов Д. А.*, Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением. *Теория вероятн. примен.* **46** (2001) 387–397.

Перевод на английский: Large-deviation probabilities for maxima of sums of independent random variables with negative mean and subexponential distribution. *Theory Probab. Appl.* **46** (2002) 355–366.

94. *Assmusen S., Foss S., Korshunov D.*, Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour. *J. Theoretical Probab.* **16** (2003) 489-518.

95. *Коршунов Д. А.*, Одномерные асимптотически однородные цепи Маркова: преобразование Крамера и вероятности больших уклонений. *Математические труды* **6** (2003) 102–143.

96. *Коршунов Д. А., Шмидт Ф., Шлёгель С.*, Асимптотический анализ случайных блужданий с зависимыми приращениями в случае тяжелых хвостов. *Сиб. мат. журн.* **44** (2003) 1067–1081.

Перевод на английский: Asymptotics for random walks with dependent heavy-tailed increments. *Sib. Math. J.* **44** (2003) 833–844.

97. *Foss S., Denisov D., Korshunov D.*, Tail asymptotics for the supremum of a random walk when the mean is not finite. *Queueing Systems* **46** (2004) 15–33.

Препринты автора по теме диссертации

98. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.*, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. 1. Стационарные распределения. *Препринт* №10, Институт математики СО РАН (1995) 35 с.

99. *Korshunov D., Schlegel S., Schmidt V.*, Asymptotics for random walks with dependent heavy-tailed increments. *Eurandom Report* 2000-043 (2000).

Тезисы конференций по теме диссертации

100. *Коршунов Д. А.*, Об асимптотике распределения супремума частичных сумм. *Предельные теоремы и смежные вопросы*, Тезисы докладов международного семинара, Омск (1995) 32–34.

101. *Korshunov D.*, Large deviation probabilities for partial maxima of sums of independent random variables with subexponential distribution and negative expectation. Abstracts of the Workshop *Stochastic networks: Large deviations, Stability and Fluid Models*, Lorentz Center, Leiden University, The Netherlands (1998).

102. *Korshunov D.*, Large deviations for one-dimensional Markov chains with subexponential jumps. Abstracts of the Workshop *Heavy tails and queues*, Eurandom, Eindhoven University of Technology, The Netherlands (1999).

103. *Korshunov D.*, Asymptotics for random walks with dependent heavy-tailed increments. Abstracts of the Workshop *Modern Problems in Applied Probability*, Novosibirsk, Russia (2000) p. 12.

104. *Korshunov D.*, Large deviation probabilities for one-dimensional Markov chains. Abstracts of the *27th Conference on Stochastic Processes and their Applications*, Cambridge, UK (2001).

105. *Korshunov D.*, Large deviations for sums and Markov chains: heavy-tailed case. Abstracts of reports of the *Ukrainian Congress of Mathematics*, Section Probability Theory and Mathematical Statistics, Kiev, Ukraine (2001) 18–19.

106. *Korshunov D.*, Subexponential distributions revisited: local properties. Abstracts of the Workshop *The mathematics of stochastic networks*, Eindhoven, The Netherlands (2001).

107. *Korshunov D.*, Subexponential distributions revisited: local behaviour of convolutions. Abstracts of the Advanced Concentrated Course on *Long Range Dependence, Heavy tails and Rare Events*, Copenhagen, Denmark (2002).

108. *Korshunov D.*, Large deviation calculations for Markov chains via Cramér transform and CLT. Abstracts of the LMS/ICMS Workshop *Modern Problems in Applied Probability*, Edinburgh, UK (2002).

109. *Korshunov D.*, Tail asymptotics for the supremum of a random walk when the mean is not finite. Abstracts of the Workshop *Applied Probability and Advanced Communication Networks*, Będlewo, Poland (2003) p. 10.