Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

Peter Jacko

Dištančné chromatické číslo šesťuholníkovej siete

(Práca na ŠVK)

Košice 2001

Obsah

Úvod

K tejto práci som bol motivovaný dlhoročným problémom — vrcholovým farbením grafov. Podnietil ma tiež príspevok *Vrcholové farbenie n-rozmernej kocky* od autorov D. S. Kim, D-Z. Du a P. M. Pardalos.

Nekonečná šesťuholníková sieť je špeciálnym grafom: je 3-regulárna, planárna a navyše jej hrany nie sú ohodnotené. V súčasnosti je viacero problémov, ktoré sú transformovateľné a riešiteľné v teórii grafov práve na takejto šesťuholníkovej sieti. Špeciálnym prípadom je práve vzdialenostné farbenie, využiteľné napr. v chémii pre priestorové umiestnenie častíc, vo výpočtovej technike, kde hrá dôležitú úlohu pri riešení stability procesorov, či v komunikačnej oblasti pri budovaní rôznych sietí.

Nech $\chi_{\overline{d}}$ je minimálny počet farieb, ktorými sa nekonečná šesťuholníková sieť dá ofarbiť tak, aby každé dva vrcholy so vzdialenosťou nanajvýš d mali rôznu farbu. V práci odvodím presné hodnoty pre $\chi_{\overline{d}}$, ak d je nepárne číslo a dolné a horné ohraničenia pre $\chi_{\overline{d}}$, ak d je párne číslo.

1. Úvodné definície

Nekonečná šesťuholníková sieť (NŠS) je súvislý graf s vrcholmi $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, ktoré sú pravidelne rozložené v rovine tak, že vytvárajú pravidelné šesťuholníky so stranami dĺžky 1. Každý vrchol má práve troch susedov, teda aj tri incidentné hrany s dĺžkou 1 (pozri obr. 1).

Okom siete nazveme každú kružnicu na šiestich vrcholoch.

Pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov v_i, v_j definujme ich *grafovú vzdialenosť* $\mathrm{dist}(v_i, v_j)$ nasledovne:

a) $\mathrm{dist}(v_i, v_j) = 0$, ak $i = j$,

b) inak $\mathrm{dist}(v_i, v_j)$ sa rovná počtu hrán na najkratšej $v_i v_j$-ceste.

Ak d je ľubovoľné kladné celé číslo, potom minimálny počet farieb, potrebných na ofarbenie vrcholov NŠS tak, aby ľubovoľné dva rôzne vrcholy s grafovou vzdialenosťou nanajvýš d boli ofarbené rôznou farbou, nazveme *dištančné chromatické číslo* a označíme ho $\chi_{\overline{d}}$.

Vezmime ľubovoľné oko siete, jeho vrcholy označme $v_1, v_2, \ldots, v_6$. Definujme *okruhy* vrcholov indukciou nasledovne:

1° Vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_6$ ležia na okruhu 1.

2° Nech vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú práve tie, ktoré ležia na okruhoch $1, 2, \ldots, m$. Potom pre každé $i > n$ platí: Vrchol v_i leží na okruhu $m + 1$ práve vtedy, keď existuje $j \leq n$ také, že $\mathrm{dist}(v_i, v_j) \leq 2$ (pozri obr. 2).

Všimnime si, že každý vrchol na m-tom okruhu „prinesie“ do $(m + 1)$-vého okruhu 1 vrchol, navyše sú tam po 2 vrcholy v každom „rohu“ okruhu. Teda ak na m-tom okruhu leží O_m vrcholov, tak na $(m + 1)$-vom okruhu leží $O_m + 12$ vrcholov. Na prvom okruhu leží 6 vrcholov, teda na druhom 18, na treťom 30 ... Vo všeobecnosti na m-tom okruhu leží $6(2m - 1)$ vrcholov.

Uvažujme všetky vrcholy, ktoré ležia na okruhoch $1, 2, \ldots, k$. Každý z nich je grafovo vzdialený od prvého okruhu (od najbližšieho vrchola, ktorý leží na prvom okruhu) nanajvýš $2(k - 1)$. Na prvom okruhu je najväčšia možná vzdialenosť dvoch vrcholov 3, teda ľubovoľné dva z uvažovaných vrcholov sú od seba vzdialené nanajvýš $2 \cdot 2(k - 1) + 3 = 4k - 1$.

Počet vrcholov ležiacich na prvých k okruhoch je

$$\sum_{m=1}^{k} 6(2m - 1) = 12 \sum_{m=1}^{k} m - 6 \sum_{m=1}^{k} 1 = 12 \frac{k(k+1)}{2} - 6k = 6k^2.$$

2. Hlavné výsledky

Veta 1. Ak $d = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, tak $\chi_{\overline{d}} = \dfrac{3}{8}(d + 1)^2$.

Dôkaz:

Uvažujme pre $d = 4k - 1$ všetky vrcholy, ktoré ležia na okruhoch $1, 2, \ldots, k$. Ľubovoľné dva z uvažovaných vrcholov sú vzdialené nanajvýš $4k - 1 = d$. Teda všetky musia byť ofarbené rôznymi farbami. Ich počet je

$$6k^2 = 6\left(\frac{d+1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}(d + 1)^2.$$

Toľko farieb naozaj stačí. Popíšem postup, ako ofarbovať vrcholy.

Zadefinujme si pre účely tohto dôkazu nasledovné. Majme dané oko siete — *stred.* Útvar zložený z prvých k okruhov okolo stredu nazveme *blok* vrcholov. *Ofarbením bloku* budeme rozumieť ofarbenie všetkých vrcholov bloku rôznymi farbami, ktorých je presne $\frac{3}{8}(d + 1)^2$.

Uvažujme ľubovoľné oko siete ako stred bloku a ofarbme tento blok. Nájdime teraz 6 nových stredov okolo tohto bloku. Nový stred vznikne posunutím pôvodného (teda jeho vrcholov) v smere niektorej hrany NŠS (tých smerov je 6) presne o hranovú vzdialenosť $4k$. Ofarbme teraz týchto 6 blokov rovnakým spôsobom ako pôvodný blok. Takýto postup môžme použiť na každý z týchto nových blokov, potom opäť, atď (pozri obr. 3).

Je zrejmé, že takto „ukladané" bloky sa neprekrývajú a že pokryjú všetky vrcholy NŠS. Ak vezmeme ľubovoľné dva vrcholy ofarbené rovnakou farbou, musia byť v rôznych blokoch. Ich vzdialenosť je ale aspoň $4k$, teda ofarbenie je tiež v poriadku. □

Veta 2. Ak $d = 4k+1, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, tak $\chi_{\overline{d}} = \frac{3}{8}(d+1)^2 + \frac{1}{2}$.

Dôkaz:

Uvažujme pre $d = 4k+1$ všetky vrcholy, ktoré ležia na okruhoch $1, 2, \ldots, k$. Ľubovoľné dva z uvažovaných vrcholov sú vzdialené nanajvýš $4k-1$. Ak teraz k uvažovaným vrcholom pridáme ešte tie, ktoré sú od nich vzdialené práve 1, tak ľubovoľné dva vrcholy sú vzdialené nanajvýš $4k+1 = d$. Teda všetky musia byť ofarbené rôznymi farbami. Spočítajme teraz ich počet. Na prvých k okruhoch leží $6k^2$ vrcholov. Na $(k+1)$-vom okruhu leží $6(2k+1) = 12k+6$ vrcholov. Po odpočítaní šiestich rohových vrcholov je práve každý druhý vo vzdialenosti 1 od vrcholov na k-tom okruhu. Teda počet posledne pridaných vrcholov je $6k$. Takže máme

$$\chi_{\overline{d}} \geq 6k^2 + 6k = 6k(k+1) = 6\left(\frac{d-1}{4}\right)\left(\frac{d-1}{4}+1\right) = \frac{6}{16}(d-1)(d+3) = \frac{3}{8}(d+1)^2 - \frac{3}{2}$$

Všimnime si ale teraz zvyšné vrcholy na $(k+1)$-vom okruhu. Je ich $6k+6$. Konkrétne zamerajme pozornosť na $k+1$ z nich, ktoré tvoria jednu „hranu" celého útvaru (pozri obr. 4). Ich vzájomná grafová vzdialenosť je nanajvýš $2k$ (susedné sú totiž vždy vzdialené práve 2), teda musia byť ofarbené rôznymi farbami. Navyše ak by sme chceli použiť len doteraz používané farby, tak každý z nich môže mať len farbu jedného z vrcholov na protiľahlej hrane útvaru. Tých je tam ale len k, takže podľa Dirichletovho princípu potrebujeme aspoň jednu novú farbu. Rovnako, ak sa zameriame na $k+1$ vrcholov na susednej hrane útvaru, tiež potrebujú aspoň jednu novú farbu. Preto počet nutne potrebných farieb je

$$\frac{3}{8}(d+1)^2 - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{8}(d+1)^2 + \frac{1}{2}.$$

Toľko farieb naozaj stačí. Popíšem postup, ako ofarbovať vrcholy.

Zadefinujme si pre účely tohto dôkazu nasledovné. Majme dané oko siete — *stred*. *Blokom* vrcholov teraz nazveme útvar zložený z prvých k okruhov okolo stredu, z vrcholov $(k+1)$-vého okruhu, ktorých vzdialenosť od vrcholov na k-tom okruhu je práve 1 a z dvoch vrcholov v dvoch susedných rohoch $(k+1)$-vého okruhu (pozri obr. 5). *Ofarbením bloku* budeme rozumieť ofarbenie všetkých vrcholov bloku rôznymi farbami, ktorých ich presne $\frac{3}{8}(d+1)^2 + \frac{1}{2}$.

Uvažujme ľubovoľné oko siete ako stred bloku a ofarbme tento blok. Nájdime teraz 6 nových stredov okolo tohto bloku. Nový stred vznikne posunutím pôvodného (teda jeho vrcholov) v smere niektorej hrany NŠS (tých smerov je 6) presne o hranovú vzdialenosť $4k+2$. Ofarbme teraz týchto 6 blokov rovnakým spôsobom ako pôvodný blok. Takýto postup môžme použiť na každý z týchto nových blokov, potom opäť, atď (pozri obr. 5).

Je zrejmé, že takto „ukladané" bloky sa neprekrývajú a že pokryjú všetky vrcholy NŠS. Ak vezmeme ľubovoľné dva vrcholy ofarbené rovnakou farbou, musia byť v rôznych blokoch. Ich vzdialenosť je ale aspoň $4k+2$, teda ofarbenie je tiež v poriadku. □

Lema 1. Nech v_0 je ľubovoľný vrchol NŠS, nech $i \in \mathbb{Z}, i \geq 1$. Označme $V_i = \{v_k;\ \mathrm{dist}(v_k, v_0) = i\}$. Potom $|V_i| = 3i$.

Dôkaz:

Matematickou indukciou dokážeme, že $|V_i| = 3i$ (pozri obr. 6).

1° V_1 obsahuje práve susedov vrchola v_0, a tí sú traja. V_2 obsahuje 6 vrcholov, ktoré sú susedné vrcholom z V_1 a rôzne od v_0.

2° Nech $j \in \mathbb{Z}, j \geq 3$. Predpokladajme, že pre každé $i = 1, 2, \ldots, j$ platí $|V_i| = 3i$. Pozrime sa na V_{j+1}. Do V_{j+1} patria práve všetci susedia vrcholov patriacich do V_j takí, ktorí nepatria do V_{j-1}. Totiž ak by niektorý vrchol $v \in V_j$ mal suseda z $V_l, l \leq j-2$, tak by musel $v \in V_{l+1}$, ale to je spor. Podobne ak by niektorý vrchol z V_j mal suseda $v \in V_l, l \geq j+2$, tak by musel $v \in V_{j+1}$, čo je opäť spor.

Každý z vrcholov patriacich do V_j má 3 susedov, máme teda $3 \cdot 3j = 9j$ možných vrcholov. Uvedomme si, že ku každému vrcholu $v_x \in V_j$ existujú vrcholy $v_y, v_z \in V_j$ také, že $\mathrm{dist}(v_x, v_y) = \mathrm{dist}(v_x, v_z) = 2$. Takže práve $|V_j|$ vrcholov sme započítali dvakrát, máme teda $9j - 3j = 6j$ možných vrcholov. V nich sú ale ešte tie, ktoré patria do V_{j-1}, a tých je $3j-3$. Ostalo nám konečne $6j - (3j-3) = 3j+3$ vrcholov, ktoré patria do V_{j+1}. □

Veta 3. Ak $d = 2k, k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$, tak $\frac{3}{8}d\,(d+2) + 2 \leq \chi_{\overline{d}} \leq \frac{3}{8}\,(d+2)^2 + \frac{1}{2}$.

Dôkaz:

Najprv dokážeme dolné ohraničenie. Nech $k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$. Vezmime ľubovoľný vrchol NŠS, označme ho v_0 a označme V_i pre $i = 1, 2, \ldots, k$ ako v Leme 1 (obr. 6). Uvažujme teraz všetky vrcholy patriace do $V_1, V_2, \ldots, V_k$, je ich $\sum_{i=1}^{k} 3i = 3\frac{k(k+1)}{2} = \frac{3}{8}d(d+2)$. Grafová vzdialenosť každého z nich od v_0 je nanajvýš $k = \frac{d}{2}$, z čoho vyplýva, že grafová vzdialenosť každej dvojice vrcholov je nanajvýš d — teda všetky musia mať rôznu farbu. Navyše aj vrchol v_0 musí mať ďalšiu farbu, teda $\frac{3}{8}d\,(d+2) + 1 \leq \chi_{\overline{d}}$. Tento útvar pre účely tohto dôkazu volajme *blok*.

Pozrime sa teraz na množinu V_{k+1}. Ak vezmeme $v_1 \in V_{k+1}$ a $v_2 \in V_{k-1}$, tak vidíme, že $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \leq 2k$, teda tieto vrcholy nemôžu mať rovnakú farbu. Pre spor predpokladajme, že nám doterajšie ohraničenie pre $\chi_{\overline{d}}$ postačuje.

Teda vrcholy z množiny V_{k+1} môžu mať len takú farbu, ako majú vrcholy z V_k. No takých farieb je len $|V_k| = 3k$, ale potrebujeme ofarbiť $|V_{k+1}| = 3k+3$ vrcholov. Zjavne nemôže existovať farba taká, že by ofarbovala až 3 vrcholy z V_{k+1}. Musí totiž ofarbovať aj niektorý z vrcholov z bloku, ale ten by nebol dostatočne vzdialený od všetkých troch. Teda podľa Dirichletovho princípu musia existovať aspoň 3 farby také, že každá z nich ofarbuje dvojicu vrcholov z V_{k+1} a jeden vrchol z bloku. Dokonca podľa vyššieuvedeného ten tretí vrchol musí byť z V_k. Skúsme teda nájsť takú trojicu vrcholov, ktorú môžme ofarbiť rovnakou farbou. Ak by sme spomedzi vrcholov vo V_k vybrali iný ako rohový vrchol, tak z množiny V_{k+1} sú vo vzdialenosti (práve) $2k+1$ len vrcholy susedné s vrcholmi na protiľahlej hrane nášho bloku (pozri obr. 7). Tie sú však od seba vzdialené určite menej ako $2k+1$, teda nemôžu byť ofarbené rovnakou farbou. Z množiny V_k teda môžme vziať jedine roh bloku. K nemu už jednoznačne existuje dvojica vrcholov z V_{k+1} taká, že je vzdialená viac ako $2k$. Máme teda trojicu vrcholov, ofarbenú jednou farbou (farbou vrchola z V_k). Môžme nájsť ešte jednu takú trojicu, ktorú podobne ofarbíme druhou farbou. Ale pre tretiu farbu takú trojicu nenájdeme, preto na ofarbenie všetkých vrcholov z V_{k+1} budeme potrebovať ešte aspoň jednu farbu.

Teda $\frac{3}{8}d\,(d+2) + 2 \leq \chi_{\overline{d}}$.

Teraz dokážeme horné ohraničenie. Z predchádzajúcich dvoch viet vieme, že pre $k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$ platí

$$\chi_{\overline{2k+1}} \leq \frac{3}{8}\,(2k+2)^2 + \frac{1}{2}.$$

Uvedomme si, že platí $\chi_{\overline{2k}} \leq \chi_{\overline{2k+1}}$, preto pre $d = 2k$ platí $\chi_{\overline{d}} \leq \frac{3}{8}\,(d+2)^2 + \frac{1}{2}$. □

3. Niekoľko konkrétnych prípadov

Prípad 1. $\chi_{\overline{1}} = 2$.

Dôkaz:

Ak si vezmeme ľubovoľný vrchol v_0, tak jeho susedia v_1, v_2, v_3 musia byť ofarbení inou farbou ako v_0, potrebujeme teda aspoň dve farby. Ale tie aj stačia, pretože NŠS neobsahuje nepárne kružnice, teda vrcholy v_1, v_2, v_3 môžme ofarbiť rovnakou farbou (pozri obr. 8). $\square$

Prípad 2. $\chi_{\overline{2}} = 4$.

Dôkaz:

Ak si vezmeme ľubovoľný vrchol v_0 a jeho susedov v_1, v_2, v_3, tak všetky vrcholy sú od seba vzdialené nanajvýš 2, teda potrebujeme aspoň 4 farby. A tie nám aj stačia, ako vidno z obr. 9. $\square$

Prípad 3. $\chi_{\overline{4}} = 11$.

Dôkaz:

Podľa Vety 3 potrebujeme aspoň 11 farieb. A 11 farieb nám stačí, ako vidno z obr. 10. $\square$

Prípad 4. $\chi_{\overline{6}} = 20$.

Dôkaz:

Podľa Vety 3 potrebujeme aspoň 20 farieb. A 20 farieb nám stačí, ako vidno z obr. 11. $\square$

Prípad 5. $\chi_{\overline{8}} \geq 33$,

Dôkaz:

Preskúšaním všetkých možností ofarbenia grafu so 120 vrcholmi sa dá zistiť, že 32 farieb nestačí. $\square$

Záver

Ako vidieť z Vety 3, ohraničenie pre dištančné chromatické číslo pre párne vzdialenosti nie je konečné a malo by sa dať zlepšiť z oboch strán. Pre praktické použitie je ešte vhodné riešiť dištančné farbenie vrcholov tak, aby boli rôzne ofarbené vrcholy práve vo vzdialenosti d.

Úlohu je možné a užitočné vyriešiť aj vo viacrozmernom priestore, ďalej pre ohodnotené šesťuholníkové siete, pre konečné siete, špeciálne útvary a pod.