Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.21

МОМЕНТЫ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С АСИМПТОТИЧЕСКИ НУЛЕВЫМ СНОСОМ

Д. А. Коршунов

Аннотация. Рассматривается цепь Маркова со значениями в $\mathbb{R}^+$ с асимптотически нулевым сносом и конечными вторыми моментами скачков. Предполагается, что цепь имеет инвариантное распределение. Исследуются вопросы существования и несуществования моментов инвариантного распределения. В основе анализа лежит метод пробных функций.

Ключевые слова: стационарная цепь Маркова, асимптотически нулевой снос, инвариантное распределение, распределение с тяжелым хвостом, степенные моменты, моменты вейбулловского типа, пробные функции (Ляпунова), тождество равновесия.

Учителю по случаю 80-летия посвящается статья,
тематически связанная с дипломной работой
и кандидатской диссертацией

§ 1. Введение

Пусть $X = \{X_n, n \geq 0\}$ — однородная во времени цепь Маркова со значениями в $\mathbb{R}^+$. Обозначим через $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, случайную величину, отвечающую скачку цепи из состояния x, т. е. случайную величину с распределением

$$\mathbb{P}\{\xi(x) \in B\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} - X_n \in B \mid X_n = x\}, \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Обозначим средний снос в состоянии x через $m(x) := \mathbb{E}\xi(x)$ и второй момент приращения — через $b(x) := \mathbb{E}\xi^2(x)$.

В настоящей работе исследуется стационарная цепь Маркова X, что означает, что распределение π_n величины X_n не зависит от n. Обозначим это инвариантное распределение через π. Мы изучим условия, достаточные для конечности или бесконечности тех или иных моментов инвариантного распределения.

Наиболее исследованным типом случайных блужданий является случайное блуждание с задержкой в нуле, которое описывается рекурсией Линдли $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$, где ξ_n, $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины; для любого вещественного x используем обозначения $x^+ := \max(x, 0)$ и $x^- := \max(-x, 0)$, так что $x = x^+ - x^-$. Для этого случая $\xi(x) = \max(\xi_1, -x)$, $m(x) = \mathbb{E}\max(\xi, -x) = \mathbb{E}\xi_1 + o(1/x)$ при $x \to \infty$ и при условии, что $b := \mathbb{E}\xi_1^2 < \infty$, а также $b(x) \to b$. Эта цепь Маркова имеет инвариантное распределение тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}\xi_1 < 0$. В контексте теории массового обслуживания хорошо известно, что для любого $\gamma > 0$ инвариантное распределение имеет конечный момент порядка γ, $\mathbb{E}X_0^\gamma < \infty$, тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}(\xi^+)^{\gamma+1} < \infty$ (см. статью Кифера и Вольфовица [1]). Известно также, что инвариантное распределение имеет легкий хвост тогда и только тогда, когда распределение ξ имеет легкий хвост; здесь и далее будем говорить, что случайная величина η имеет распределение с *легким* (*правым*) *хвостом*, если $\mathbb{E}e^{\lambda\eta} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$.

Ясно, что асимптотически нулевой снос, когда $m(x) \to 0$ при $x \to \infty$, утолщает хвост инвариантного распределения и сокращает число конечных моментов инвариантного распределения. В частности, в § 2 доказываем, что инвариантное распределение практически любой цепи Маркова с асимптотически нулевым сносом имеет тяжелый хвост; здесь и далее будем говорить, что случайная величина η имеет распределение с *тяжелым* (*правым*) *хвостом*, если $\mathbb{E}e^{\lambda\eta} = \infty$ для всех $\lambda > 0$.

Рассмотрим, например, критический случай, когда $m(x)$ порядка $-c/x$ для больших x. Это критический случай, потому что, как правило, цепь Маркова не имеет инвариантного распределения, когда $m(x) = o(1/x)$ при $x \to \infty$. Существование инвариантного распределения в критическом случае изучено Ламперти в [2]; в основе лежит рассмотрение пробной функции $V(x) = x^2$. Средний снос функции V в точке x равен $\mathbb{E}\{V(X_{n+1}) - V(X_n) \mid X_n = x\} = 2xm(x) + b(x)$, и если $2xm(x) + b(x) < -\varepsilon$ для всех достаточно больших x, то цепь устойчива при весьма широких дополнительных условиях технического характера (см. [3, гл. 11]).

В § 4 мы приводим весьма общие условия для существования моментов, а в § 5 обсуждаем условия несуществования моментов. В § 6 изучаются следствия для критического случая. Выясняется, какие степенные моменты инвариантного распределения конечны.

В § 7 мы рассматриваем следствия для цепей Маркова, у которых $m(x)$ медленно стремится к нулю, а именно $m(x) \uparrow 0$ при $x \to \infty$, но при этом $m(x)x \to -\infty$. Это случай промежуточный между критическим, рассмотренным в § 6, и случаем асимптотически отрицательного сноса. Для такой цепи Маркова показано, какие моменты вейбулловского типа, обычно $\mathbb{E}e^{\gamma X_0^\beta}$, конечны, а какие бесконечны. В § 8 обсуждаются некоторые соображения, как можно улучшать результаты в вейбулловском случае.

В статье [4] М. В. Меньшиков и С. Ю. Попов исследовали поведение инвариантного распределения $\{\pi(x), x \in \mathbb{Z}^+\}$ для счетных цепей Маркова с асимптотически нулевым сносом и с ограниченными скачками. Были доказаны некоторые грубые теоремы о локальных вероятностях $\pi(x)$; например, если $m(x) \sim -\mu/x$ и $b(x) \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константы $c_- > 0$ и $c_+ < \infty$ такие, что $c_- x^{-2\mu/b-\varepsilon} \le \pi(x) \le c_+ x^{-2\mu/b+\varepsilon}$. Похожий результат был доказан и в случае $m(x) \sim -\mu/x^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Насколько нам известно, в литературе отсутствуют результаты о точной асимптотике $\pi(x)$.

§ 2. Тяжелые хвосты

Вначале докажем следующий результат, который утверждает, что практически каждая стационарная цепь Маркова с асимптотически нулевым сносом порождает инвариантное распределение с тяжелым хвостом.

Теорема 1. *Пусть цепь Маркова X имеет асимптотически нулевой снос, т. е. $m(x) \to 0$ при $x \to \infty$, и, кроме того,*

$$\liminf_{x\to\infty} \mathbb{E}\{\xi^2(x); \xi(x) > 0\} > 0. \tag{1}$$

Тогда любое неограниченное справа инвариантное распределение X имеет тяжелый хвост.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что X стационарная, неограниченная справа и имеет конечный экспоненциальный момент порядка $\lambda > 0$. Тогда для любого x_0

$$\mathbb{E}(V(X_1) - V(X_0)) = 0, \tag{2}$$

где $V(x) := \max(e^{\lambda x}, e^{\lambda x_0})$. Поскольку

$$\mathbb{E}(V(X_1) - V(X_0)) \geq \mathbb{E}\{V(X_1) - V(X_0); X_0 > x_0\}$$

и X_0 имеет неограниченный справа носитель, придем к противоречию с (2), если докажем, что для некоторого x_0

$$v(x) := \mathbb{E}\{V(X_1) - V(X_0) \mid X_0 = x\} > 0 \quad \text{для всех } x > x_0. \tag{3}$$

Для любого $x > x_0$

$$v(x) \geq \mathbb{E}e^{\lambda(x+\xi(x))} - e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\mathbb{E}e^{\lambda\xi(x)} - 1).$$

Так как $e^y \geq 1 + y$ для всех y и $e^y \geq 1 + y + y^2/2$ для всех $y > 0$, то

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi(x)} - 1 \geq \lambda m(x) + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}\{\xi^2(x); \xi(x) > 0\}.$$

В силу $\lambda m(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и условия (1) существует достаточно большое x_0 такое, что сумма в правой части последнего неравенства положительна при всех $x > x_0$, что доказывает (3), а следовательно, и утверждение теоремы.

Покажем на примере, что условие (1), которое является в некотором роде условием невырожденности скачков, существенно для справедливости теоремы. Рассмотрим так называемую непрерывную цепь Маркова X_n со значениями в $\mathbb{Z}^+$, т. е. $\xi(x)$ принимает только значения -1, 1 и 0 с вероятностями $p_-(x)$, $p_+(x)$ и $1 - p_-(x) - p_+(x)$ соответственно, $p_-(0) = 0$. Тогда стационарные вероятности $\pi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^+$, удовлетворяют уравнениям

$$\pi(x) = \pi(x-1)p_+(x-1) + \pi(x)(1 - p_+(x) - p_-(x)) + \pi(x+1)p_-(x+1),$$

которые имеют следующее решение:

$$\pi(x) = \pi(0)\prod_{k=1}^{x}\frac{p_+(k-1)}{p_-(k)}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь случай $p_+(x) := 1/2(x+1)$ и $p_-(x) := 1/(x+1)$. В этом случае наблюдается асимптотически нулевой снос, но стационарные вероятности эквивалентны $c/2^x$, так что инвариантное распределение имеет легкий хвост. Ясно, что условие (1) здесь не выполнено.

§ 3. Тождества равновесия

Как видно, в частности, из предыдущего параграфа, наш подход к доказательству существования и несуществования моментов основан на вычислении среднего сноса подходящей пробной функции от цепи Маркова. Особым свойством экспоненциальной функции является то, что ее производная пропорциональна самой функции, что делает вычисления намного проще. У других пробных функций, например у степенных, производные растут медленнее исходных функций, и это порождает необходимость развивать некоторую технику, связанную с тождествами равновесия.

Если для некоторой пробной функции V математическое ожидание $V(X_0)$ конечно в стационарном режиме, то $\mathbb{E}V(X_1) - \mathbb{E}V(X_0) = 0$. Взятие условного среднего относительно X_0 приводит к тождеству равновесия $\mathbb{E}v(X_0) = 0$, где $v(x) := \mathbb{E}\{V(X_1) - V(x) \mid X_0 = x\}$. Но если среднее $V(X_0)$ не существует, то тождество равновесия может не выполняться.

Для начала сформулируем следующую лемму, которая доказана в [5].

Лемма 1. *Пусть X — цепь Маркова в измеримом пространстве $(S, \mathscr{S})$, и пусть $V(x)$ — неотрицательная измеримая функция, $V : S \to \mathbb{R}^+$. Если X имеет инвариантное распределение π и*

$$\int_S v^+(x)\pi(dx) < \infty, \tag{5}$$

то

$$\int_S v(x)\pi(dx) \geq 0.$$

Без усиления условия (5) невозможно доказать, что интеграл равен нулю. Действительно, рассмотрим цепь Маркова на множестве точек $\{2^k,\ k = 0, 1, \dots\}$ со следующими переходными вероятностями: $\mathbb{P}\{X_1 = 1 \mid X_0 = 2^k\} = 1/2$ и $\mathbb{P}\{X_1 = 2^{k+1} \mid X_0 = 2^k\} = 1/2$, так что $m(2^k) = 1/2$ для всех k. Эта цепь Маркова устойчива с инвариантными вероятностями $\pi(2^k) = 2^{-k-1}$. Для $V(x) = x$ условие (5) выполнено, но ясно, что $\int_S v(x)\pi(dx) = 1/2 \neq 0$.

В следующей лемме приводится некоторое достаточное условие, гарантирующее тождество равновесия для одинаково распределенных случайных величин, не обязательно связанных с цепями Маркова; в этом направлении улучшаем лемму 2.3.1 из [6, гл. 2] (где предполагается, что $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ и $\mathbb{E}|\eta_1 - \eta_2| < \infty$) и лемму 10 из [7] (где η_1 и η_2 — первые два члена стационарной последовательности, и это обстоятельство служит основой доказательства). В конце параграфа приведено следствие для цепей Маркова.

Лемма 2. *Пусть η_1 и η_2 — одинаково распределенные случайные величины. Если*

$$\mathbb{E}(\eta_2 - \eta_1)^+ < \infty, \tag{6}$$

то $\mathbb{E}|\eta_2 - \eta_1| < \infty$ и $\mathbb{E}(\eta_2 - \eta_1) = 0$.

Доказательство. Для любого $A > 0$ рассмотрим случайные величины

$$\eta_k^{[A]} := \begin{cases} -A, & \text{если } \eta_k < -A, \\ \eta_k, & \text{если } \eta_k \in [-A, A], \\ A, & \text{если } \eta_k > A. \end{cases}$$

Тогда $\left|\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]}\right| \leq 2A$ и благодаря одинаковой распределенности $\eta_1^{[A]}$ и $\eta_2^{[A]}$

$$\mathbb{E}\big(\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]}\big) = 0.$$

Далее, в силу определения

$$\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]} \leq (\eta_2 - \eta_1)^+, \tag{7}$$

$$\left|\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]}\right| \le |\eta_2 - \eta_1|. \tag{8}$$

Имеем также сходимость почти наверное $\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]} \to \eta_2 - \eta_1$ при $A \to \infty$. Следовательно, по лемме Фату, применимой в силу оценки (7) и условия (6),

$$0 = \limsup_{A\to\infty} \mathbb{E}\big(\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]}\big) \le \mathbb{E} \limsup_{A\to\infty}\big(\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]}\big) = \mathbb{E}(\eta_2 - \eta_1). \tag{9}$$

Таким образом, $\mathbb{E}(\eta_2 - \eta_1)^- < \infty$, поскольку иначе нарушается (9) ввиду условия (6). Вместе с (6) это влечет первое утверждение леммы, $\mathbb{E}|\eta_2 - \eta_1| < \infty$. В свою очередь, в силу (8) это позволяет применить теорему о мажорируемой сходимости и заключить, что $\mathbb{E}\big(\eta_2^{[A]} - \eta_1^{[A]}\big) = 0$ дает в пределе $\mathbb{E}(\eta_2 - \eta_1) = 0$. Доказательство завершено.

Полагая $\eta_k = V(X_k)$, в качестве следствия получаем результат для стационарной цепи Маркова X; он усиливает второе утверждение леммы 1 из [5].

Лемма 3. *Пусть X — цепь Маркова со значениями в измеримом пространстве $(S, \mathscr{S})$, и пусть $V : S \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Если X имеет инвариантное распределение π и*

$$\int_S \mathbb{E}\{(V(X_1) - V(x))^+ \mid X_0 = x\}\pi(dx) < \infty, \tag{10}$$

то

$$\int_S v(x)\pi(dx) = 0.$$

Заметим, что для цепи Маркова, описанной после леммы 1, условие (10) не выполнено при $V(x) = x$, поскольку в этом случае $\mathbb{E}\{(X_1 - 2^k)^+ \mid X_0 = 2^k\} = 2^k/2$ и, следовательно, ряд

$$\sum_k \mathbb{E}\{(X_1 - 2^k)^+ \mid X_0 = 2^k\}\pi(2^k) = \sum_k 2^{k-1}2^{-k-1}$$

расходится.

§ 4. Существование моментов

Пусть $h(x)$ — убывающая функция, $h(x) \to 0$, такая, что $\liminf\limits_{x\to\infty} h(x)x > 0$. Тогда функция

$$H(x) := \int_0^x h(y)\,dy$$

стремится к бесконечности при $x \to \infty$ и вогнута.

Чтобы понять свойства инвариантного распределения в случае $m(x) = -h(x)$, рассмотрим специальную непрерывную цепь Маркова, введенную в § 2. Если взять $p_+(x) = (1 - h(x))/2$ и $p_-(x) = (1 + h(x))/2$, то $m(x) = -h(x)$ и $b(x) = 1$. Из (4) имеем

$$\begin{aligned}\log\pi(x) &= \log\pi(0) + \sum_{k=1}^x (\log(1 - h(k)) - \log(1 + h(k)))\\ &= \log\pi(0) - 2\sum_{k=1}^x h(k) - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^x h^3(k) - \frac{2}{5}\sum_{k=1}^x h^5(k) - \dots.\end{aligned} \tag{11}$$

В достаточно регулярных случаях доминирующий второй член ведет себя как $-2H(x)$, так что $\pi(x) \approx e^{-2H(x)}$. Это интуитивное соображение лежит в основе следующего результата.

Теорема 2. *Пусть $h(x)$ дифференцируема и*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{h(x)} \to c \in [0,\infty) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{12}$$

Предположим, что

$$\sup_x b(x) < \infty \tag{13}$$

и что существует $\gamma > 0$ такое, что семейство случайных величин

$$(\xi^+(x))^2 e^{\gamma H(\xi^+(x))}, \quad x \geq 0, \tag{14}$$

равномерно интегрируемо и

$$\limsup_{x\to\infty}\left(2\frac{m(x)}{h(x)} + (c+\gamma)b(x)\right) < 0. \tag{15}$$

Тогда $\mathbb{E}e^{\gamma H(X_0)} < \infty$ в стационарном режиме.

Доказательство. Первые две производные пробной функции

$$V(x) := \int_0^x U(y)\,dy, \quad \text{где } U(x) := \int_0^x e^{\gamma H(y)}\,dy,$$

равны $U(x)$ и $e^{\gamma H(x)}$. Отношение производных $U(x)$ и $\frac{1}{h(x)}e^{\gamma H(x)}$ равно

$$\frac{e^{\gamma H(x)}}{\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{h(x)} + \gamma\right)e^{\gamma H(x)}} \to \frac{1}{c+\gamma} \quad \text{при } x \to \infty,$$

поскольку $\frac{d}{dx}\frac{1}{h(x)} \to c$. Принимая во внимание, что $H(x) \to \infty$, по правилу Лопиталя получаем, что

$$U(x) \sim \frac{1}{(c+\gamma)h(x)} e^{\gamma H(x)} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{16}$$

Приращение пробной функции $V(x)$ допускает следующее разложение Тейлора:

$$V(x+y) = V(x) + U(x)y + e^{\gamma H(x+\theta y)}y^2/2, \tag{17}$$

где $0 \leq \theta = \theta(x,y) \leq 1$. В силу возрастания H получаем следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} V(x+y) &\leq V(x) + U(x)y + e^{\gamma H(x+y^+)}y^2/2 \\ &= V(x) + U(x)y + e^{\gamma H(x)}e^{\gamma(H(x+y^+)-H(x))}y^2/2. \end{aligned} \tag{18}$$

Так как $H'(x) = h(x) \downarrow 0$, то $H(x+y^+) - H(x) \to 0$ при $x \to \infty$ для любого y. Кроме того, вогнутость H влечет, что $H(x+y^+) - H(x) \leq H(y^+)$. Тогда по условию (14) семейство случайных величин $(\xi^+(x))^2 e^{\gamma(H(x+\xi^+(x))-H(x))}$, $x \geq 0$, равномерно интегрируемо. Вместе со сходимостью $H(x+\xi^+(x)) - H(x) \to 0$ при $x \to \infty$, отсюда вытекает, что

$$\mathbb{E}e^{\gamma(H(x+\xi^+(x))-H(x))}\xi^2(x) = \mathbb{E}\xi^2(x) + o(1) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Подставляя эту сходимость в (18), приходим к следующей оценке сверху для среднего сноса пробной функции V в точке x при $x \to \infty$:

$$\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) \leq U(x)m(x) + e^{\gamma H(x)}(b(x)/2 + o(1))$$

$$= \frac{m(x)}{h(x)}\frac{1+o(1)}{c+\gamma}e^{\gamma H(x)} + e^{\gamma H(x)}(b(x)/2+o(1))$$
$$= \frac{1+o(1)}{2(c+\gamma)}\Big(2\frac{m(x)}{h(x)} + (c+\gamma)b(x) + o(b(x)+1)\Big)e^{\gamma H(x)}.$$

Ввиду условий (15) и (13) найдутся x_0 и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) \le -\varepsilon e^{\gamma H(x)}$$

для всех $x > x_0$. Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{\gamma H(x)}\pi(dx) \le \frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in[0,x_0]}(\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x)),$$

так что $\mathbb{E}e^{\gamma H(X_0)}$ конечно. Доказательство завершено.

Отметим, что вместо леммы 1 можно было использовать теорему из работы [8]. Первый результат о существовании моментов для харрисовских стационарных цепей Маркова доказан Твиди в [9, теорема 1] (см. также [3, гл. 14]).

§ 5. Несуществование моментов

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие* (12) *и что*

$$\mathbb{E}\xi(x) = O(h(x)) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{19}$$

Пусть также существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\sup_{x\ge 0}\ \mathbb{E}(\xi^+(x))^2 e^{\gamma H(\xi^+(x))} < \infty \tag{20}$$

и семейство $\{(\xi^-(x))^2, x \ge 0\}$ равномерно интегрируемо, т. е.

$$\sup_{x\ge 0}\ \mathbb{E}\{(\xi^-(x))^2; \xi^-(x) > A\} \to 0 \quad \text{при } A \to \infty, \tag{21}$$

так что выполнено (13). *Если*

$$\liminf_{x\to\infty}\Big(2\frac{m(x)}{h(x)} + (c+\gamma)b(x)\Big) > 0, \tag{22}$$

то $\mathbb{E}e^{\gamma H(X_0)} = \infty$ в стационарном режиме при условии, что носитель инвариантного распределения не ограничен справа.

Доказательство. Поскольку $H(x)$ возрастает, выводим из (17) следующую оценку снизу:

$$V(x+y) \ge V(x) + U(x)y + e^{\gamma H(x-y^-)}y^2/2$$
$$= V(x) + U(x)y + e^{\gamma H(x)}e^{\gamma(H(x-y^-)-H(x))}y^2/2. \tag{23}$$

Функция $H(x)$ вогнута, поэтому $H(x-y^-) + H(y^-) \to 0$ при $x \to \infty$ для любого y. Вместе с условием (21) отсюда вытекает, что

$$\mathbb{E}e^{\gamma(H(x-\xi^-(x))-H(x))}\xi^2(x) = b(x) + o(1) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Подставляя это соотношение и (16) в (23), приходим к следующей оценке снизу для среднего сноса V в точке x при $x \to \infty$:

$$\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) \ge (1+o(1))\frac{m(x)}{(c+\gamma)h(x)}e^{\gamma H(x)} + e^{\gamma H(x)}(b(x)/2 + o(1))$$
$$= \frac{1+o(1)}{2(c+\gamma)}\left(2\frac{m(x)}{h(x)} + (c+\gamma)b(x) + o(b(x)+1)\right)e^{\gamma H(x)}.$$

Ввиду (13) и (22) найдутся x_* и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$v(x) := \mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) \ge \varepsilon e^{\gamma H(x)}$$

для всех $x > x_*$. Рассмотрим пробную функцию $V_*(x) := \max(V(x_*), V(x))$. По определению $\mathbb{E}V_*(x+\xi(x)) - V_*(x) \ge 0$ для всех $x \in [0, x_*]$ и

$$v_*(x) := \mathbb{E}V_*(x+\xi(x)) - V_*(x) \ge \mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) > 0$$

для всех $x \ge x_*$. Поскольку носитель инвариантного распределения неограниченный, отсюда вытекает, что

$$\mathbb{E}v_*(X_0) > 0. \tag{24}$$

Чтобы доказать теорему, предположим, что, напротив, $\mathbb{E}e^{\gamma H(X_0)}$ конечно в стационарном режиме. Наша цель — доказать, что тогда

$$\mathbb{E}v_*(X_0) = 0. \tag{25}$$

Это противоречие с (24) показывает, что $\mathbb{E}e^{\gamma H(X_0)}$ не может быть конечным.

Рассмотрим пробные функции $V_n(x)$, $n \ge 1$, определяемые как линейное продолжение V_* в точке $x_* + n$, более точно,

$$V_n(x) := \begin{cases} V_*(x), & \text{если } x \le x_* + n, \\ V_*(x_*+n) + V_*'(x_*+n)(x - x_* - n), & \text{если } x > x_* + n. \end{cases}$$

Функция V выпукла, так как ее вторая производная равна $e^{\gamma H(x)} > 0$. Поэтому по определению V_n тоже выпукла, $V_n'(x) \le V_*'(x_*+n)$ для всех x. Следовательно,

$$u_n(x) := \mathbb{E}|V_n(x+\xi(x)) - V_n(x)| \le V_*'(x_*+n)\mathbb{E}|\xi(x)|.$$

В силу условия (13) имеем $\sup\limits_x \mathbb{E}|\xi(x)| < \infty$, откуда $\mathbb{E}u_n(X_0) < \infty$. Тогда по лемме 3

$$\mathbb{E}v_n(X_0) = 0, \tag{26}$$

где $v_n(x) := \mathbb{E}V_n(x+\xi(x)) - V_n(x)$. Монотонная последовательность функций V_n сходится к V_*. Обоснуем предельный переход в (26) при $n \to \infty$, чтобы получить (25).

Во-первых, ввиду монотонной сходимости $V_n \to V_*$ имеем для любого x

$$v_n(x) \to v_*(x) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{27}$$

Во-вторых, в силу разложения Тейлора

$$v_n(x) = V_n'(x)m(x) + \mathbb{E}V_n''(x+\theta\xi(x))\xi^2(x)/2. \tag{28}$$

Так как $V_n'(x) \le V_*'(x)$ и в силу (16) $V_*'(x) = O(e^{\gamma H(x)}/h(x))$ при $x \to \infty$, то

$$V_n'(x)|m(x)| \le V_*'(x)|m(x)| \le c_1 e^{\gamma H(x)}, \tag{29}$$

где $c_1 < \infty$ благодаря условию (19). Имеем $V_n''(x) \le V_*''(x) = e^{\gamma H(x)}$ при $x > x_*$, поэтому

$$\mathbb{E}V_n''(x + \theta\xi(x))\xi^2(x) \le \mathbb{E}e^{\gamma H(x+\xi^+(x))}\xi^2(x) \le e^{\gamma H(x)}\mathbb{E}e^{\gamma H(\xi^+(x))}\xi^2(x)$$

ввиду вогнутости H. Применяя условия (20) и (21), получаем

$$\mathbb{E}V_n''(x + \theta\xi(x))\xi^2(x) \le c_2 e^{\gamma H(x)}. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в (21), выводим, что v_n допускает следующую оценку сверху:

$$|v_n(x)| \le (c_1 + c_2/2)e^{\gamma H(x)}.$$

Тогда $(c_1 + c_2/2)e^{\gamma H(X_0)}$ является интегрируемой мажорантой для семейства случайных величин $|v_n(X_0)|$, $n \ge 1$. По теореме о мажорируемой сходимости можно проинтегрировать сходимость (27) по инвариантному распределению, так что (26) действительно влечет (25). Поскольку (25) противоречит (24), доказательство завершено.

§ 6. Степенные моменты

Полагая $h(x) = \min(1/x, 1)$, так что $c = 1$ в (12), получаем из теорем 2 и 3 следующие условия существования степенных моментов.

Следствие 1. *Пусть вторые моменты $b(x)$ ограничены и существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$\sup_{x\ge 0}\mathbb{E}\{(\xi^+(x))^{2+\gamma}; \xi(x) > A\} \to 0 \quad \text{при } A \to \infty. \tag{31}$$

Если $2xm(x) + (1+\gamma)b(x) \le -\varepsilon < 0$ для всех достаточно больших x, то момент порядка γ инвариантного распределения X конечен.

Следствие 2. *Пусть $m(x) = O(1/x)$ при $x \to \infty$, семейство $\{(\xi^-(x))^2, x \ge 0\}$ равномерно интегрируемо и существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$\sup_{x\ge 0}\mathbb{E}(\xi^+(x))^{2+\gamma} < \infty.$$

Если $2xm(x) + (1+\gamma)b(x) \ge \varepsilon > 0$ для всех достаточно больших x, то момент порядка γ инвариантного распределения X с неограниченным справа носителем бесконечен.

В случае регулярного поведения первых двух моментов выводим следующий критерий.

Следствие 3. *Пусть для некоторых $b > 0$ и $\mu > b/2$*

$$m(x) \sim -\mu/x \quad \text{и} \quad b(x) \to b \quad \text{при } x \to \infty.$$

Пусть выполнено условие (31) для некоторого $\gamma > 0$ и семейство случайных величин $\{(\xi^-(x))^2, x \ge 0\}$ равномерно интегрируемо. Тогда момент порядка γ инвариантного распределения X конечен, если $\gamma < 2\mu/b - 1$, и бесконечен, если $\gamma > 2\mu/b - 1$ и распределение не ограничено справа.

Видно, что в отличие от случайных блужданий с асимптотически отрицательным сносом в этом следствии конечность γ момента инвариантного распределения требует два (а не один) дополнительных момента у скачков и сильно зависит от асимптотики $m(x)$ и $b(x)$.

Мы не рассматриваем критический случай $\mu = b/2$, когда еще возможно иметь инвариантное распределение (см. [10, 11]). Устойчивость цепи Маркова имеет место, если, например,

$$m(x) = -\frac{b}{2x} - \frac{c_1 + o(1)}{x \log x}, \quad b(x) = b - \frac{c_2}{\log x} \quad \text{при } x \to \infty$$

и $2c_1 + c_2 > b$. Полагая $p_+(x) = b/2 - b/4x + c_1/2x \log x + c_2/2 \log x$, $p_-(x) = b/2 + b/4x - c_1/2x \log x + c_2/2 \log x$ и $p_0(x) = 1 - b - c_2/\log x$ в примере непрерывной цепи Маркова из § 2, приходим к выводу, что только логарифмические моменты $\mathbb{E} \log^\gamma X_0$ порядка $\gamma < 2c_1 + c_2 - 1$ могут быть конечными в этом критическом случае.

§ 7. Моменты вейбулловского типа

В настоящем параграфе рассматривается случай $h(x)x \to \infty$ при $x \to \infty$. Частными случаями являются $m(x) \sim -\mu x^{-1} \log x$ и $m(x) \sim -\mu/x^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

Как вытекает из следствия 1, в случае $xm(x) \to -\infty$ у инвариантного распределения все моменты конечны при условии, что $\xi^+(x)$, $x \geq 0$, обладают этим свойством. Специально для этого случая теорема 2 дает

Следствие 4. *Предположим, что $h(x)$ дифференцируема и $\frac{d}{dx}\frac{1}{h(x)} \to 0$ при $x \to \infty$. Предположим также, что выполнено условие (13), а также условие (14) для некоторого $\gamma > 0$. Если*

$$\limsup_{x \to \infty} \left(2\frac{m(x)}{h(x)} + \gamma b(x) \right) < 0,$$

то $\mathbb{E} e^{\gamma H(X_0)} < \infty$ для стационарной X.

Из теоремы 3 вытекают следующие условия несуществования моментов вейбулловского типа.

Следствие 5. *Предположим, что $h(x)$ дифференцируема и $\frac{d}{dx}\frac{1}{h(x)} \to 0$ при $x \to \infty$. Предположим также, что выполнены условия (19)–(21). Если*

$$\liminf_{x \to \infty} \left(2\frac{m(x)}{h(x)} + \gamma b(x) \right) > 0,$$

то $\mathbb{E} e^{\gamma H(X_0)} = \infty$ для X в стационарном режиме с инвариантным распределением с неограниченным справа носителем.

В случае регулярного поведения первых двух моментов получаем следующие критерии. Первый из них посвящен дробным экспоненциальным моментам.

Следствие 6. *Пусть для некоторых $\mu > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и $b > 0$*

$$m(x) \sim -\mu/x^\alpha \quad \text{и} \quad b(x) \to b \quad \text{при } x \to \infty.$$

Пусть семейство случайных величин $\{(\xi^-(x))^2, x \geq 0\}$ равномерно интегрируемо и для некоторого $\gamma > 0$ семейство случайных величин $\{e^{\gamma(\xi^+(x))^{1-\alpha}}(\xi^+(x))^2, x \geq 0\}$ тоже равномерно интегрируемо. Тогда $\mathbb{E} e^{\gamma X_0^{1-\alpha}} < \infty$, если $\gamma < 2\mu/(1-\alpha)b$, и $\mathbb{E} e^{\gamma X_0^{1-\alpha}} = \infty$, если $\gamma > 2\mu/(1-\alpha)b$ и инвариантное распределение имеет неограниченный носитель.

Второй критерий ориентирован на логнормальные моменты.

Следствие 7. *Пусть для некоторых $\mu > 0$ и $b > 0$*

$$m(x) \sim -\mu\frac{\log x}{x} \quad \text{и} \quad b(x) \to b \qquad \text{при } x \to \infty.$$

Пусть семейство случайных величин $\{(\xi^-(x))^2,\ x \geq 0\}$ равномерно интегрируемо и для некоторого $\gamma > 0$ семейство случайных величин $\{e^{\frac{\gamma}{2}\log^2(1+\xi^+(x))}(\xi^+(x))^2,\ x \geq 0\}$ также равномерно интегрируемо. Тогда $\mathbb{E}e^{\frac{\gamma}{2}\log^2(1+X_0)} < \infty$, если $\gamma < 2\mu/b$, и $\mathbb{E}e^{\frac{\gamma}{2}\log^2(1+X_0)} = \infty$, если $\gamma > 2\mu/b$ и инвариантное распределение имеет неограниченный носитель.

§ 8. Дальнейшие результаты в вейбулловском случае

В этом параграфе, не ограничивая общности, считаем, что $X_n \geq 1$. Результат следствия 4 является грубым в том отношении, что константа-множитель γ в $e^{\gamma H(x)}$ сильно влияет на поведение функции. Возникает вопрос: если $m(x) = -h(x)$ и $b(x)$ сходится к некоторому $b > 0$, то верно ли подобное утверждение при $\gamma = 2/b$, т. е. можно ли доказать конечность среднего $\mathbb{E}\frac{1}{X_0^2}e^{\frac{2}{b}H(X_0)}$ или что-нибудь подобное? Основная цель настоящего параграфа состоит в демонстрации того, что это возможно лишь в случае $h(x) = o(1/\sqrt{x})$. В случае же $h(x) \geq c/\sqrt{x}$ будет другой ответ. Аналогичная ситуация возникала в [12, § 7], где также появлялись области значений параметра распределения Вейбулла $[0, 1/2)$, $[1/2, 2/3)$, $[2/3, 3/4), \ldots$.

Чтобы понять, что можно ожидать, обратимся опять к специальному случаю непрерывной цепи Маркова, введенной в § 2. Как вытекает из (11), если $h(x) = 1/x^\alpha$, $\alpha > 1/3$, то

$$\pi(x) = \pi(0)e^{-2\sum\limits_{k=1}^{x} h(k) + O(1)} = e^{-2x^{1-\alpha}/(1-\alpha)+O(1)},$$

так что асимптотика $\pi(x)$ определяется только $H(x)$. Если $\alpha \in (1/5, 1/3]$, то, как снова вытекает из (11),

$$\pi(x) = \pi(0)e^{-2\sum\limits_{k=1}^{x} h(k) - \frac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{x} h^3(k) + O(1)} = e^{-2x^{1-\alpha}/(1-\alpha) - 2x^{1-3\alpha}/2(1-3\alpha)+O(1)}$$

и асимптотика $\pi(x)$ определяется $H(x) + \int\limits_0^x h^3(y)\,dy$, и т. д.

Заметим, что в случае непрерывной цепи все нечетные моменты $\xi(x)$ асимптотически равны нулю. Это приводит к тому, что в разложении присутствуют только четные степени $h(x)$. В общем случае это не так и, следовательно, члены $h^{2j+1}(x)$ с нечетными степенями не исключаются.

Поскольку сейчас интересуемся влиянием скорости убывания $h(x)$ на существование моментов, для простоты вычислений ограничиваем свои рассуждения ситуацией ограниченных скачков. Рассмотрим только случай $h(x) = o(1/\sqrt{x})$.

Теорема 4. *Предположим, что $h(x) = o(1/\sqrt{x})$ при $x \to \infty$, h дифференцируема, $h'(x) = o(1/x)$,*

$$m(x) \leq -h(x) + o(1/x) \quad \text{и} \quad b(x) \leq b + o(1/xh(x)). \tag{32}$$

Предположим, что $|\xi(x)| \leq A$ для некоторого $A < \infty$ и $\liminf\limits_{x\to\infty} b(x) > 0$. Тогда для каждого $\delta > 0$

$$\mathbb{E}\frac{1}{X_0^{1+\delta}}e^{\frac{2}{b}H(X_0)} < \infty,$$

если X находится в стационарном режиме.

Доказательство. Рассмотрим пробную функцию

$$V(x) := \int_1^x y^{-\delta} e^{\frac{2}{b}H(y)}\,dy,$$

так что $V''(x) = (-\delta x^{-1-\delta} + 2x^{-\delta}h(x)/b)e^{\frac{2}{b}H(x)}$ и

$$V'''(x) = o((x^{-1-\delta} + x^{-\delta}h^2(x))e^{\frac{2}{b}H(x)}) = o(x^{-1-\delta}e^{\frac{2}{b}H(x)}).$$

Так как скачки цепи ограничены A, средний снос пробной функции $V(x)$ допускает следующее разложение Тейлора:

$$\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) = V'(x)m(x) + V''(x)b(x)/2 + O(V'''(x)) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Ввиду условий на первые два момента

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) &= (x^{-\delta}m(x) + (-\delta x^{-1-\delta} + 2x^{-\delta}h(x)/b)b(x)/2 + o(x^{-1-\delta}))e^{\frac{2}{b}H(x)} \\ &\le (-\delta x^{-1-\delta}b(x)/2 + o(x^{-1-\delta}))e^{\frac{2}{b}H(x)}.\end{aligned}$$

Вторые моменты отделены от нуля, поэтому найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbb{E}V(x+\xi(x)) - V(x) \le -\varepsilon x^{-1-\delta}e^{\frac{2}{b}H(x)}$$

для всех достаточно больших x. Как и ранее в доказательстве теоремы 2, это завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kiefer J., Wolfowitz J.* On the characteristics of the general queueing process with applications to random walk // Ann. Math. Stat. 1956. V. 27. P. 147–161.
2. *Lamperti J.* Criteria for the recurrence or transience of stochastic processes. 1 // J. Math. Anal. Appl. 1960. V. 1, N 3–4. P. 314–330.
3. *Mein S., Tweedie R. L.* Markov chains и stochastic stability. New York: Springer-Verl., 1993.
4. *Menshikov M. V., Popov S. Yu.* Exact power estimates for countable Markov chains // Markov Proc. Relat. Fields. 1995. V. 1, N 1. P. 57–78.
5. *Korshunov D.* Transition phenomena for real-valued Markov chains // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 4. P. 53–100.
6. *Baccelli F., Brémaud P.* Elements of queueing theory. Palm-Martingale calculus и stochastic recurrences. Berlin: Springer-Verl., 1994.
7. *Фосс С. Г., Чернова Н. И.* Теоремы сравнения и эргодические свойства систем поллинга // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, № 4. С. 46–71.
8. *Назаров Л. В., Смирнов С. Н.* Оценивание моментов стационарного распределения цепи Маркова методом пробных функций // Вестн. Моск. ун-та. 1985. № 4. С. 43–48.
9. *Tweedie R. L.* The existence of moments for stationary Markov chains // J. Appl. Probab. 1983. V. 20, N 1. P. 191–196.
10. *Меньшиков М. В., Эйсымонт И. М., Ясногородский Р.* Марковские процессы с асимптотически нулевым сносом // Проблемы передачи информации. 1995. Т. 31, № 3. С. 60–75.
11. *Коршунов Д. А.* Плотность и непрерывность семейства инвариантных мер цепей Маркова, зависящих от параметра // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 832–850.
12. *Foss S., Korshunov D.* Sampling at a random time with a heavy-tailed distribution // Markov Process. Relat. Fields. 2000. V. 6. P. 543–568.

Статья поступила 23 января 2011 г.

Коршунов Дмитрий Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korshunov@math.nsc.ru