СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helmers R.* Edgeworth expansions for linear combinations of order statistics. Amsterdam: Math. Centre Tracts, 1982, 137 p.
2. *Bjerve S.* Error bounds for linear combinations of order statistics. — Ann. Statist., 1977, v. 5, № 2, p. 357–369.
3. *Грибкова Н. В.* Об оценке скорости сходимости к нормальному закону усеченных линейных комбинаций порядковых статистик. — Матем. заметки, 1987, т. 42, в. 5, с. 739–746.
4. *Van Zwet W. R.* A Berry–Esseen bound for symmetric statistics. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, B. 66, H. 3, S. 425–440.
5. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
6. *Stigler S. M.* Linear functions of order statistics with smooth weight functions. — Ann. Statist., 1974, v. 2, № 4, p. 676–693.
7. *Shorack G. R.* Functions of order statistics. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 412–427.
8. *Грибкова Н. В.* Оценки в центральной предельной теореме для линейных функций порядковых статистик. Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1989.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 738 с.

Поступила в редакцию
10.V.1990

© 1993 г.

КОРШУНОВ Д. А.

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В заметке изучаются явления, названные переходными, возникающие при изучении стационарных вещественнозначных эргодических цепей Маркова, близких в известном смысле к неэргодическим и имеющим траектории, уходящие на бесконечность. При таком подходе удается построить приближения для стационарного распределения цепей.

Пусть $\{X_n^{(\varepsilon)}\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность (по ε) однородных вещественнозначных цепей Маркова (по n) с переходной функцией $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, B)$, $x \in \mathbf{R}$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, где $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathbf{R}$. Основным объектом изучения в заметке является инвариантная мера $\pi^{(\varepsilon)}$, соответствующая цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, т.е. мера, удовлетворяющая уравнению

$$\pi^{(\varepsilon)}(B) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x,\ B)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx), \qquad \pi^{(\varepsilon)}(\mathbf{R}) = 1. \tag{1}$$

Если цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon > 0$ являются эргодическими, то речь будет идти, стало быть, об асимптотическом поведении стационарного распределения цепей $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Везде ниже предполагается, что уравнение (1) при $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение. Это имеет место, если выполнены условия эргодичности цепей $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, включающие в себя наличие "среднего сноса" цепи в сторону некоторого компакта (см. теорему А) и условие "перемешивания" типа Дуба–Дёблина (см. (2)). В этом случае имеют место сходимость по вариации распределения $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x,\ n,\ \cdot)$ к $\pi^{(\varepsilon)}(\cdot)$ и единственность меры $\pi^{(\varepsilon)}(\cdot)$.

Введем в рассмотрение семейство случайных величин (с.в.) $\xi^{(\varepsilon)}(x)$, распределение которых совпадает с распределением скачка цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ из состояния x: $\mathbf{P}\{x+\xi^{(\varepsilon)}(x) \in B\} = \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, B)$. Ниже мы будем использовать несколько условий регулярности. Первое из них связано с предположением о "нагруженности" цепей Маркова $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, означающим, что "средний снос" стремится к нулю: $\mathbf{E}\,\xi^{(\varepsilon)}(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$. При этом мы предполагаем, что имеет место "слабая непрерывность" переходного ядра (мы опускаем индекс (0) у характеристик предельной цепи $X_n \equiv X_n^{(0)}$: $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, \cdot) \Longrightarrow \mathbf{P}(y, \cdot)$ при $x \to y$, $\varepsilon \downarrow 0$ для любого $y \in \mathbf{R}$, а предельное ядро $\mathbf{P}(x, \cdot)$ удовлетворяет условию: для всяких компакта $K \subset \mathbf{R}$ и $x \in \mathbf{R}$ существует такое натуральное n_0, что $\mathbf{P}\{X_{n_0} \notin K \,|\, X_0 = x\} > 0$.

Мы изучаем задачу об асимптотическом поведении распределения $\pi^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и при некоторых моментных предположениях относительно с.в. $\xi^{(\varepsilon)}(x)$, которые приводятся ниже. Если предельная цепь $\{X_n\}$ имеет единственное инвариантное распределение, то это есть задача об устойчивости или непрерывной зависимости $\pi^{(\varepsilon)} \Longrightarrow \pi$ от параметра $\varepsilon \downarrow 0$. Если цепь $\{X_n\}$ не имеет собственного распределения ($|X_n| \to \infty$ по вероятности при $n \to \infty$), то названная задача и будет задачей о переходных явлениях, которые описывают асимптотическое поведение инвариантного распределения цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon \downarrow 0$. В настоящей заметке мы ограничились изложением теорем о переходных явлениях для цепей Маркова, принимающих значения на положительной полуоси. Изучение поведения инвариантного распределения цепей, заданных на всей действительной прямой, во многом сводится к изучению цепей, заданных на полуосях.

Итак, пусть $X_n^{(\varepsilon)} \geqslant 0$. Обозначим $m^{(\varepsilon)}(x) = \mathbf{E}\,\xi^{(\varepsilon)}(x)$, $b^{(\varepsilon)}(x) = \mathbf{E}\,(\xi^{(\varepsilon)}(x))^2$. Основное условие регулярности относится к поведению $m^{(\varepsilon)}(x)$, $b^{(\varepsilon)}(x)$ при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$ и в полном виде сформулировано в (3). Из этого условия вытекает, в частности, что для «предельной цепи» существуют $\lim_{x\to\infty} xm(x) = \mu$, $-\infty \leqslant \mu \leqslant \infty$, $\lim_{x\to\infty} b(x) = b$, $0 < b < \infty$, $\sup_x b(x) < \infty$. Параметры μ и b, характеризующие асимптотическое поведение первых двух моментов скачков процесса, играют определяющую роль при классификации асимптотического поведения распределения $\pi^{(\varepsilon)}$. Они также существенны для выполнения условий эргодичности цепи $\{X_n\}$ (см., например, [4]). Справедливо следующее утверждение. Обозначим $\tau(x) = \min\{n \geqslant 1\colon X_n \leqslant A \,|\, X_0 = x\}$.

Теорема А [4]. *Если* $2xm(x)+b(x) \leqslant -\delta < 0$ *при* $x \geqslant A$ *и* $2xm(x)+b(x) \leqslant c < \infty$ *при* $x < A$, *то* $\sup_{x\leqslant A} \mathbf{E}\,\tau(x) < \infty$ *(равномерная положительная возвратность множества* $[0, A]$*)*.

Как известно, равномерная положительная возвратность $[0, A]$ при широких предположениях влечет за собой эргодичность цепи $\{X_n\}$. Например, достаточно существования вероятностной меры φ на $\mathbf{R}$, числа $p > 0$ и натурального $n_0 \geqslant 1$ таких, что

$$\mathbf{P}\{X_{n_0} \in B \,|\, X_0 = x\} \geqslant p\varphi(B) \tag{2}$$

для всяких $x \in [0, A]$, $B \in \mathfrak{B}$ и апериодичности цепи $\{X_n\}$ (см., например, [5, 8]). В нашем случае выполнение или невыполнение условия теоремы А определяется отношением $2\mu/b$. Из приведенного выше утверждения следует, что при $2\mu/b \leqslant -1$ и при выполнении (2) цепь $\{X_n\}$ будет эргодической.

Сформулируем теперь условия регулярности на $m^{(\varepsilon)}(x)$ и $b^{(\varepsilon)}(x)$. Мы будем рассматривать такой тип зависимости $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, \cdot)$ от параметра ε, что $\lim_{x\to\infty} m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon$, и цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ эргодичны при $\varepsilon > 0$ и при выполнении (2). Более точно, мы предполагаем, что

$$\begin{gathered} m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + \mu/x + o(\varepsilon + 1/x), \quad x \to \infty, \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad -\infty < \mu < \infty, \\ \sup_{x,\varepsilon} b^{(\varepsilon)}(x) < \infty, \qquad \lim_{x\to\infty,\,\varepsilon\downarrow 0} b^{(\varepsilon)}(x) = b, \quad 0 < b < \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Частным случаем такой схемы серий является последовательность $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, которая задается равенством $X^{\varepsilon}_{n+1} = (X^{(\varepsilon)}_n + \xi^{(\varepsilon)}_n)^+$, где $x^+ = \max(0, x)$, $\xi^{(\varepsilon)}_n$ — н.о.р.с.в., $\mathbf{E}\,\xi^{\varepsilon}_n = -\varepsilon$, $\mathbf{E}\,(\xi^{(\varepsilon)}_n)^2 \to b$. Предельные теоремы для случайного блуждания этого вида рассмотрены в [1–3] (в этом случае $\mu = 0$).

Итак, в формулировках теорем предполагаем выполненными следующие условия:

цепи $\{X^{(\varepsilon)}_n\}$ однородны,

цепи $\{X^{(\varepsilon)}_n\}$ имеют при $\varepsilon > 0$ единственное инвариантное распределение,

переходное ядро удовлетворяет условию непрерывности.

Теорема 1 (устойчивость, $2\mu < -b$). *Пусть имеют место асимптотические представления* (3) *и, кроме того,*

$$\sup_{x,\varepsilon} \mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2;\ \xi^{(\varepsilon)}(x) > N\right\} \longrightarrow 0, \qquad N \to \infty.$$

Тогда, если $2\mu < -b$, и цепь $\{X_n\}$ имеет единственное инвариантное распределение π, то имеет место слабая сходимость $\pi^{(\varepsilon)} \Longrightarrow \pi$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

В дальнейшем нам будет удобнее изучать асимптотическое поведение $\pi^{(\varepsilon)}$ не в терминах самого этого распределения, а в терминах с.в. $X^{(\varepsilon)}$, имеющей распределение $\pi^{(\varepsilon)}$. Закон распределения с.в. X мы будем обозначать $\mathfrak{L}(X)$.

Теорема 2 (сходимость к Г-распределению, $2\mu > -b$). *Пусть имеют место асимптотические представления* (3) *и, кроме того,*

$$\sup_{x,\varepsilon} \mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2;\ \left|\xi^{(\varepsilon)}(x)\right| > N\right\} \longrightarrow 0, \qquad N \to \infty. \tag{4}$$

Тогда, если $\infty > 2\mu > -b$, то при $\varepsilon \downarrow 0$ имеет место слабая сходимость

$$\mathfrak{L}(2\varepsilon X^{(\varepsilon)}) \Longrightarrow \Gamma_{1/b,\,1+2\mu/b},$$

где $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ — гамма-распределение с параметрами α и λ.

Оказывается, что если не уточнять остаточные члены в асимптотическом представлении (3), то в случае $2\mu = -b$, вообще говоря, не существует собирательной предельной теоремы для с.в. $X^{(\varepsilon)}$. Введем обозначения для повторных логарифмов и их произведений

$$l_0(x) \equiv x, \qquad l_{k+1}(x) = \ln\left(l_k(x)\right), \qquad L_k(x) = \prod_{m=1}^{k} l_m(x).$$

Теорема 3 (критический случай, $2\mu = -b$). *Пусть $1 \leqslant k < \infty$,*

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + \mu/x + \sum_{s=1}^{k} \alpha_s/x\,L_s(x) + o\left(\varepsilon + 1/x\,L_k(x)\right),$$

$$b^{(\varepsilon)}(x) = b + \sum_{s=1}^{k} \beta_s/L_s(x) + o\left(\varepsilon + 1/L_k(x)\right),$$

при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$, и $\sup_{x,\varepsilon} \mathbf{E}\,|\xi^{(\varepsilon)}(x)|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $2\mu = -b$, $2\alpha_1 + \beta_1 = -b, \ldots, 2\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} = -b$. Тогда

а) *если $2\alpha_k + \beta_k < -b$, и цепь $\{X_n\}$ имеет единственное инвариантное распределение, то имеет место слабая сходимость $\pi^{(\varepsilon)} \Longrightarrow \pi$ при $\varepsilon \downarrow 0$;*

б) *если $2\alpha_k + \beta_k > -b$, то при $\varepsilon \downarrow 0$ имеет место сходимость*

$$\mathfrak{L}\left(\left(l_k(X^{(\varepsilon)})\big/l_k(1/\varepsilon)\right)^{1+(2\alpha_k+\beta_k)/b}\right) \Longrightarrow U[0,\ 1],$$

где $U[0, 1]$ — *равномерное на* $[0, 1]$ *распределение.*

Теорема 4 (сходимость к нормальному распределению, $\mu = \infty$). *Пусть*

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + \alpha/x^{\lambda} + o\Big(\varepsilon^{(1+\lambda)/2\lambda} + 1/x^{(1+\lambda)/2}\Big), \qquad b^{\varepsilon}(x) = b + o(1)$$

при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$, *и выполнено условие* (4). *Тогда, если* $\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1$, *то* $\mathrm{E}X_n^{(\varepsilon)} \sim (\alpha/\varepsilon)^{1/\lambda}$ *при* $\varepsilon \downarrow 0$ *и имеет место слабая сходимость*

$$\mathfrak{L}\Big(\Big(X^{(\varepsilon)} - \mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)}\Big)\,\varepsilon^{(1+\lambda)/2\lambda}\Big) \Longrightarrow N(0,\, b\,\alpha^{1/\lambda}/2\lambda),$$

где $N(\beta, \sigma^2)$ — *нормальное распределение с параметрами* β *и* σ^2.

Если $m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + l(x)/x^{\lambda} + o(\cdot)$, где $0 < \lambda < 1$, $l(x) > 0$ — медленно меняющаяся функция, то сходимость к нормальному закону по-прежнему имеет место при некоторых весьма широких условиях на функцию $l(x)$.

Автор благодарит А. А. Боровкова за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
2. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания. — Лит. матем. сб., 1963, т. 3, в. 1, с. 199–206.
3. *Kingman J. F. C.* On queus in heavy traffic. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 1962, v. 24, p. 383–392.
4. *Tweedie R. L.* Criteria for classifying general Markov chains. — Adv. Appl. Probab., 1970, v. 8, p. 736–771.
5. *Athreya K. B.*, *Ney P.* The limit theory of recurrent Markov chains. — Trans. Amer. Math. Soc., 1978, v. 245, p. 493–501.
6. *Borovkov A. A.*, *Fayolle G.*, *Korshunov D. A.* Transient phenomena for Markov chains and their applications. — Rapports de Recherche, INRIA, France, 1990, 25 p.
7. *Korshunov D. A.* Transient phenomena for Markov chains. — В сб.: V Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Т. 3. Вильнюс: ИМК АНЛит ССР, 1989, с. 272–273.
8. *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость многомерных цепей Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. XXXV, в. 3, с. 543–547.

Поступила в редакцию
20.XI.1990

© 1993 г.

ЛЕПСКИЙ О. В.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ МАКСИМУМА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА С ТОЧНОСТЬЮ ДО ПОСТОЯННОЙ

1. Введение. Пусть наблюдается случайный процесс $X_\varepsilon(t)$, имеющий на отрезке $[0, 1]$ стохастический дифференциал

$$dX_\varepsilon(t) = S(t)\,dt + \varepsilon\,db(t), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $b(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс. По наблюдениям за траекторией процесса $X_\varepsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, требуется оценить функционал

$$F(\cdot) = F\Big(S(\cdot)\Big) = \sup_{t\in[0,1]} S(t)$$