ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2013, т. 282, с. 288–314

УДК 519.218.23

Об асимптотике хвоста распределения надкритического процесса Гальтона–Ватсона в случае тяжелых хвостов[1]

В. И. Вахтель[2], Д. Э. Денисов[3], Д. А. Коршунов[4]

Поступило в ноябре 2012 г.

Хорошо известно, что для надкритического процесса Гальтона–Ватсона Z_n, распределение числа потомков которого имеет среднее значение $m > 1$, отношение $W_n := Z_n/m^n$ имеет предел с вероятностью 1, скажем W. Мы изучаем асимптотическое поведение хвостов распределений W_n и W в случае, когда распределение Z_1 имеет тяжелый хвост, т.е. $\mathbb{E}\, e^{\lambda Z_1} = \infty$ для любого $\lambda > 0$. Показывается, как различные типы распределений Z_1 приводят к различному асимптотическому поведению хвоста W_n и W. Описаны наиболее вероятные траектории, приводящие к большим значениям процесса.

DOI: 10.1134/S0371968513030205

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Z_n — надкритический процесс Гальтона–Ватсона, $Z_0 = 1$, $m := \mathbb{E}\, Z_1 > 1$. По определению

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)},$$

где $\xi_i^{(n)}$, $i, n = 0, 1, \ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением F на $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$; через $\overline{F}(x)$ обозначаем хвост распределения F, $\overline{F}(x) := \mathbb{P}\{\xi > x\}$.

Положим $W_n := Z_n/m^n$. Хорошо известно (см., например, [2, Theorem 1.6.1]), что $W_n \to W$ п.н. при $n \to \infty$. Если $\mathbb{E}\, \xi \log \xi < \infty$, то $\mathbb{E}\, W = 1$, так что $\mathbb{P}\{W > 0\} > 0$ (см. [2, Theorem 1.10.1]).

Основная цель работы — изучить асимптотику вероятностей больших уклонений для мартингала $\{W_n\}$ и для его предела W. Более точно, речь пойдет об асимптотике для $\mathbb{P}\{W_n > x\}$ при $x \to \infty$ во всем спектре значений $n \geq 1$.

Поведение хвоста распределения мартингального предела — одна из классических задач теории надкритических процессов Гальтона–Ватсона. Изучение вероятности $\mathbb{P}\{W > x\}$ было инициировано Харрисом в [14], который показал, что если ξ ограничена, то

$$\log \mathbb{E}\, e^{uW} = u^\gamma H(u) + O(1) \qquad \text{при} \quad u \to \infty,$$

где H — положительная периодическая по умножению функция, а γ определяется из равенства $m^\gamma = \max\{k \colon \mathbb{P}\{\xi = k\} > 0\}$. Эта информация о производящей функции может быть

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке DFG и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00285).

[2]Университет Мюнхена, Мюнхен, Германия.

[3]Университет Манчестера, Манчестер, Великобритания.

[4]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

использована для поиска асимптотики вероятностей хвостов, что было проделано Биггинсом и Бингхэмом в [4]:

$$\log \mathbb{P}\{W > x\} \sim -x^{\gamma/(\gamma-1)} M(x), \tag{1.1}$$

где M — также положительная периодическая по умножению функция; здесь и далее мы пишем $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$, если $f(x)/g(x) \to 1$. Бингхэм и Дони [5, 6] нашли асимптотику вероятности $\mathbb{P}\{W > x\}$ в случае, когда ξ правильно меняется на бесконечности с нецелочисленным показателем $\alpha < -1$ (случай целочисленного α был рассмотрен Де Мейером в [8]). В [4] можно найти результаты, аналогичные (1.1), о левом хвосте распределения W в случае, когда минимальное число потомков у одной особи не меньше двух. Фляйшман и Вахтель в [11, 12] нашли точные асимптотики (не логарифмические) для вероятностей $\mathbb{P}\{W_n \in (0,x)\}$ и $\mathbb{P}\{W \in (0,x)\}$ при $x \to 0$. Эти две статьи дают полное описание асимптотического поведения левого хвоста W. Метод работы [12] можно адаптировать к решению задачи о вероятностях уклонений справа в случае, когда производящая функция числа потомков является полиномом. В результате получаются точные асимптотики для вероятности $\mathbb{P}\{W > x\}$ при $x \to \infty$ (см. [12, Remark 3]).

Во всех упомянутых выше статьях доказательства основаны на том наблюдении, что функция $\varphi(u) := \mathbb{E}\, e^{-uW}$ удовлетворяет функциональному уравнению Пуанкаре $\varphi(mu) = f(\varphi(u))$, где f — производящая функция числа потомков. В настоящей статье это уравнение не используется. Вместо этого применяется вероятностная техника для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин и для процессов Гальтона–Ватсона с тяжелыми хвостами, развитая в последние годы.

Нам потребуются следующие классы распределений.

Говорят, что случайная величина ξ имеет распределение *с тяжелым хвостом*, если $\mathbb{E}\, e^{\lambda\xi} = \infty$ для любого $\lambda > 0$.

Распределение F в $\mathbb{R}$ называется *доминируемо меняющимся* (пишут $F \in \mathcal{D}$), если

$$\sup_x \frac{\overline{F}(x/2)}{\overline{F}(x)} < \infty. \tag{1.2}$$

Распределение F в $\mathbb{R}$ называется *почти правильно меняющимся*, если

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x(1+\varepsilon))}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Заметим, что любое правильно меняющееся распределение является почти правильно меняющимся. Любое почти правильно меняющееся распределение является доминируемо меняющимся.

Для любой положительной функции $h(x) \to \infty$ будем говорить, что F является *h-нечувствительным*, если $\overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)$ при $x \to \infty$. Распределение F является почти правильно меняющимся в том и только том случае, если F является h-нечувствительным для любой положительной функции h такой, что $h(x) = o(x)$ при $x \to \infty$; иначе говоря, если F является $o(x)$-нечувствительным (см. [13, Theorem 2.47]).

Будем говорить, что распределение F в $\mathbb{R}^+$ со средним m *сильно субэкспоненциально*, и писать $F \in \mathcal{S}^*$, если

$$\int_0^x \overline{F}(x-y)\overline{F}(y)\, dy \sim 2m\overline{F}(x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Примерами сильно субэкспоненциальных распределений являются почти правильно меняющиеся распределения, логнормальное и распределения Вейбулла с параметром $\beta < 1$. Любое доминируемо меняющееся распределение принадлежит $\mathcal{S}^*$, если оно имеет длинный хвост, т.е. если оно является нечувствительным относительно констант.

Распределение F называется *быстро меняющимся*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{F}(x(1+\varepsilon)) = o(\overline{F}(x)) \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Ясно, что этот класс включает в себя распределения Вейбулла $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta}$ с параметром $\beta > 0$. Логнормальное распределение также является быстро меняющимся. В этот класс не входят почти правильно меняющиеся распределения.

Теорема 1. *Пусть F является доминируемо меняющимся распределением таким, что для некоторых $\delta > 0$ и $c < \infty$*

$$\overline{F}(xy) \le \frac{c\overline{F}(x)}{y^{1+\delta}} \qquad \text{для всех} \quad x,\ y > 1. \tag{1.3}$$

Тогда существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 < \infty$ такие, что

$$c_1\overline{F}(x) \le \mathbb{P}\{W_n > x\} \le c_2\overline{F}(x) \qquad \text{для всех} \quad x,\ n. \tag{1.4}$$

Если, кроме того, F является почти правильно меняющимся распределением, то равномерно по n

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \sum_{i=0}^{n-1} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{1.5}$$

В частности,

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \sum_{i=0}^{\infty} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x, n \to \infty \tag{1.6}$$

и

$$\mathbb{P}\{W > x\} \sim \sum_{i=0}^{\infty} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{1.7}$$

Как вытекает из доказательства леммы 9 (см. разд. 3 ниже),

$$\mathbb{P}\Big\{\max_{i\le Z_k}\xi_i^{(k)} \ge m^{k+1}x\Big\} \sim m^k\overline{F}(m^{k+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty$$

и слагаемое $m^k\overline{F}(m^{k+1}x)$ в (1.5)–(1.7) соответствует вероятности существования частицы в k-м поколении с большим числом потомков. Утверждения (1.5)–(1.7) могут быть неформально переписаны следующим образом:

$$\{W_n > x\} \approx \bigcup_{k=0}^{n-1}\Big\{\max_{i\le Z_k}\xi_i^{(k)} \ge m^{k+1}x\Big\} \qquad \text{и} \qquad \{W > x\} \approx \bigcup_{k=0}^{\infty}\Big\{\max_{i\le Z_k}\xi_i^{(k)} \ge m^{k+1}x\Big\}.$$

Более того, если $\overline{F}(x)$ правильно меняется с показателем $\alpha < -1$, то равномерно по n

$$\mathbb{P}\Big\{\max_{i\le Z_k}\xi_i^{(k)} \ge m^{k+1}x \,\Big|\, W_n > x\Big\} \to \frac{m^{-(\alpha-1)k}}{\sum_{j=0}^{n-1} m^{-(\alpha-1)j}} \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем геометрическое распределение с параметром $m^{-(\alpha-1)}$. Следовательно, нетипично большие значения предела W формируются частицей с большим числом потомков, которая живет в одном из начальных поколений, а случайный номер этого поколения имеет упомянутое геометрическое распределение.

Если предположить, что второй момент ξ конечен, то можно ослабить условия регулярности на F: скажем, необязательно рассматривать только почти правильно меняющиеся распределения, как в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть F — доминируемо меняющееся распределение и выполнено условие* (1.3). *Если $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$ и F является x^γ-нечувствительным распределением для некоторого $\gamma > 1/2$, то имеют место асимптотики* (1.5)–(1.7).

Обратимся теперь к случаю, когда число потомков имеет распределение типа Вейбулла.

Теорема 3. *Пусть $\overline{F}(x) = e^{-R(x)}$, где $R(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\beta \in (0,1)$. Кроме того, пусть $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$(1+o(1))\overline{F}((m+\varepsilon)x) \le \mathbb{P}\{W_n > x\} \le (1+o(1))\overline{F}((m-\varepsilon)x)$$

при $x \to \infty$ равномерно по n.

Если $\beta < (3-\sqrt{5})/2 \approx 0.382$, то $\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \overline{F}(mx)$ при $x \to \infty$ равномерно по n и $\mathbb{P}\{W > x\} \sim \overline{F}(mx)$ при $x \to \infty$.

Если $\beta < 1/2$ и дополнительно для некоторого $c_1 < \infty$

$$R(k) - R(k-1) \le c_1 \frac{R(k)}{k}, \qquad k \ge 1, \tag{1.8}$$

то $\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \mathbb{P}\{W > x\} \sim \overline{F}(mx)$ при $x \to \infty$ равномерно по n.

Сделаем одно замечание относительно распределения числа потомков типа Вейбулла в случае, когда оно не является $\sqrt{x}$-нечувствительным. Если $\mathbb{P}\{\xi > x\} \sim e^{-x^\beta}$ при некотором $\beta \in (1/2, 1)$, то

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge \exp\biggl\{-(mx)^\beta + \frac{\beta^2\sigma_n^2}{2}(mx)^{2\beta-1}(1+o(1))\biggr\}, \qquad n \ge 2, \tag{1.9}$$

и

$$\mathbb{P}\{W > x\} \ge \exp\biggl\{-(mx)^\beta + \frac{\beta^2\sigma^2}{2}(mx)^{2\beta-1}(1+o(1))\biggr\}. \tag{1.10}$$

Здесь $\sigma_n^2 := \mathbb{E}(W_n - 1)^2$ и $\sigma^2 := \mathbb{E}(W-1)^2$. Из этих оценок вытекает, что, в отличие от случая $\beta < 1/2$, $\mathbb{P}\{W_n > x\} \gg \overline{F}(mx)$ для всех $n \ge 2$. Неравенство (1.10) обосновывается в конце разд. 3.

Теорема 3 говорит о том, что равномерно по n

$$\{W_n > x\} \approx \{\xi_1^{(0)} > mx\}.$$

Таким образом, большие значения произвольного W_n возникают в результате соответствующего большого числа потомков в первом поколении.

Особо важная роль начальных поколений в образовании больших уклонений может быть объяснена мультипликативной природой надкритических процессов Гальтона–Ватсона. Ввиду этого обстоятельства более весомо особое поведение в самом начале процесса. В теоремах 1 и 3 наблюдается весьма сильная локализация во времени: важны лишь несколько первых поколений частиц. В литературе имеется несколько примеров, в которых имеет место более слабая версия локализации во времени. В случае малых уклонений, рассмотренном в [11, 12], оптимальная стратегия выглядит следующим образом: для того чтобы $\{Z_n = k_n\}$ при некотором $k_n = o(m^n)$, необходимо, чтобы каждая частица в первых a_n поколениях имела ровно

$\mu := \min\{k\colon \mathbb{P}\{\xi = k\} > 0\}$ потомков (здесь предполагается для простоты, что $\xi \ge 1$). Во всех остальных поколениях мы позволяем, чтобы Z_k росло без каких-либо ограничений, т.е. геометрически быстро со скоростью m. Чтобы в n-м поколении было k_n частиц, a_n должно удовлетворять соотношению $\mu_n^a m^{n-a_n} \approx k_n$. Поскольку $k_n = o(m^n)$, число поколений с нетипичным поведением неограниченно растет. Похожая стратегия приводит к асимптотикам для $\mathbb{P}\{W < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$ и к асимптотикам для больших уклонений процессов с полиномиальными производящими функциями. Такого рода эффект локализации для процессов Гальтона–Ватсона при условии малости предела, т.е. для условного распределения Z_n на множестве $\{W < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$, был недавно установлен Берестики, Гантерт, Мёртерсом и Сидоровой в [3]. Они показали, что генеалогическое дерево совпадает до некоторого поколения со стандартным деревом степени μ.

Оказывается, что оптимальные стратегии этого типа не являются универсальными для надкритических процессов Гальтона–Ватсона. Из следующего результата видно, что в случае, когда лишь первый момент распределения числа потомков конечен, большие значения W_n и W могут быть порождены средней частью генеалогического дерева.

Теорема 4. *Предположим, что $\mathbb{E}\,\xi\log\xi < \infty$ и $\overline{F}(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем -1. Тогда равномерно по $n \ge 1$*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \sum_{i=0}^{n-1} m^i \overline{F}(m^{i+1}x) \sim \frac{1}{m\log m} x^{-1} \int_x^{m^n x} \overline{F}(u)\,du \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{1.11}$$

Для предела W имеет место асимптотика

$$\mathbb{P}\{W > x\} \sim \sum_{i=0}^{\infty} m^i \overline{F}(m^{i+1}x) \sim \frac{1}{m\log m} x^{-1} \int_x^{\infty} \overline{F}(u)\,du \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{1.12}$$

Асимптотика (1.12) уточняет утверждение теоремы 1.4 из [5], в которой было доказано, что если $\mathbb{E}\{Z_1;\ Z_1 > x\} \sim L(x)$ для некоторой медленно меняющейся функции L, удовлетворяющей условию $\int_1^\infty (L(x)/x)\,dx < \infty$, то

$$\mathbb{E}\{W;\ W > x\} \sim \frac{1}{m\log m} \int_x^\infty \frac{L(y)}{y}\,dy.$$

Заметив, что $\overline{F}(x) = o\bigl(x^{-1}\int_x^\infty \overline{F}(u)\,du\bigr)$, выводим из теоремы 4, что для любого $N \ge 1$

$$\sum_{i=0}^{N} m^i \overline{F}(m^{i+1}x) = o\bigl(\mathbb{P}(W > x)\bigr) \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Это означает, что "большие скачки" внутри любого фиксированного числа поколений не влияют на образование больших значений W. Более того, основной вклад в сумму $\sum_{i=0}^\infty m^i \overline{F}(m^{i+1}x)$ (и, следовательно, в $\mathbb{P}\{W > x\}$) вносят слагаемые с номерами i такими, что отношение $\int_{m^i x}^\infty \overline{F}(u)\,du / \int_x^\infty \overline{F}(u)\,du$ отделено от 0 и 1. Для конечных n имеется три различных режима в зависимости от соотношения между n и x. Проиллюстрируем их на следующем примере.

Пример. Пусть $\overline{F}(x) \sim x^{-1}\log^{-p-1} x$ для некоторого $p > 1$. Тогда

$$L(x) := \int_x^\infty \overline{F}(y)\,dy \sim \frac{1}{p}\log^{-p} x \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\{W > x\} \sim \frac{1}{m\log m} x^{-1} L(x) \sim \frac{1}{pm\log m} x^{-1}\log^{-p} x. \tag{1.13}$$

Рассмотрим теперь конечные n. Во-первых, если n и x таковы, что $n/\log x \to \infty$, то в соответствии с (1.11)

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \frac{1}{m\log m} x^{-1}\big(L(x) - L(m^n x)\big) \sim \frac{1}{m\log m} x^{-1} L(x) \sim \frac{1}{pm\log m} x^{-1}\log^{-p} x.$$

Сравнив с (1.13), мы видим, что в этом случае асимптотики для $\mathbb{P}\{W_n > x\}$ и $\mathbb{P}\{W > x\}$ одинаковы.

Во-вторых, если n и x таковы, что $n/\log x \to t \in (0,\infty)$, то

$$L(m^n x) \sim \frac{1}{p}(\log x + n\log m)^{-p} \sim \frac{1}{p}\log^{-p} x(1 + t\log m)^{-p}.$$

Поэтому

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \frac{1}{pm\log m} x^{-1}\log^{-p} x\big(1 - (1 + t\log m)^{-p}\big).$$

В этом случае мы видим, что $\mathbb{P}\{W_n > x\}$ и $\mathbb{P}\{W > x\}$ одного порядка, но с разными постоянными множителями.

В-третьих, если $n/\log x \to 0$, то в силу того, что $\log y \sim \log x$ равномерно по $y \in [x, m^n x]$, имеем

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \frac{1}{m\log m} x^{-1} \int\limits_x^{m^n x} \frac{dy}{y\log^{p+1} y} \sim \frac{1}{m\log m}\frac{1}{x\log^{p+1} x} \int\limits_x^{m^n x} \frac{dy}{y} \sim n\overline{F}(mx).$$

Следовательно, $\mathbb{P}\{W_n > x\}$ для таких значений n существенно меньше, чем $\mathbb{P}\{W > x\}$.

Задача описания асимптотического поведения хвоста распределения для надкритических процессов Гальтона–Ватсона тесно связана с задачей асимптотики хвоста распределения суммы S_τ, остановленной в случайный момент времени, где случайное число слагаемых τ имеет то же распределение, что и сами слагаемые ξ. Для случайных сумм единственный хорошо изученный случай — это когда распределение τ существенно легче распределения ξ (см. [10]); в этом случае стандартный ответ выглядит как $\mathbb{P}\{S_\tau > x\} \sim \mathbb{E}\,\tau\mathbb{P}\{\xi > x\}$ при $x \to \infty$. Настоящее исследование можно рассматривать в качестве первого шага в направлении общей задачи для случайных сумм, когда хвосты момента остановки τ и одного слагаемого ξ сравнимы по толщине.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 посвящен оценкам сверху для хвостов распределений сумм с нулевым средним в области больших уклонений. В разд. 4 они служат основой для оценок сверху для $\mathbb{P}\{W_n > x\}$; более точно, мы сводим задачу нахождения асимптотического поведения $\mathbb{P}\{W_n > x\}$ к аналогичной задаче для $\mathbb{P}\{W_N > x\}$ при некотором фиксированном N. Также оценки сверху из разд. 2 помогают вычислению асимптотики $\mathbb{P}\{W_N > x\}$ для фиксированного N. Оценки снизу для хвоста распределения числа потомков в n-м поколении выводятся в разд. 3. В разд. 6 мы завершаем доказательства теорем 1, 2 и 3. Наш подход, основанный на описании и вычислении вероятностей наиболее вероятных событий, приводящих к большим уклонениям W_n, не работает в теореме 4, где конечен лишь первый момент. В этом случае мы предлагаем аналитический метод доказательства, заимствованный из [17] (см. разд. 7).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СУММ

Мы будем несколько раз использовать следующую версию теоремы 2(i) из [10], доказательство которой ровно такое же, как и оригинального результата. Всюду ниже $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые случайные величины с общим распределением G и $T_n := \eta_1 + \ldots + \eta_n$.

Предложение 5. *Пусть распределение G имеет отрицательное среднее $a := \mathbb{E}\,\eta_1 < 0$. Если $G \in \mathcal{S}^*$, то*

$$\mathbb{P}\{T_n > x\} \le (1 + o(1))n\overline{G}(x)$$

при $x \to \infty$ равномерно по n.

Это предложение помогает найти точную асимптотику $\mathbb{P}\{T_n > x\}$ в случае нулевого среднего для $x/n > c > 0$. Если же $x = o(n)$, то предложение 5 не помогает оценить вероятность $\mathbb{P}\{T_n > x\}$ в случае нулевого среднего. Поэтому в следующих двух предложениях мы выводим грубые верхние оценки вероятностей больших уклонений для сумм с нулевым средним; этих грубых оценок будет вполне достаточно для наших целей. Первое предложение посвящено распределениям типа правильно меняющихся, в то время как второе нацелено на распределения типа Вейбулла. Выводя достаточно грубые оценки, мы ослабляем условия на распределения скачков по сравнению с асимптотиками в работах [9, Theorems 8.1, 8.3] и [7, Theorems 3.1.1, 4.1.2, 5.2.1].

Предложение 6. *Пусть $\mathbb{E}\,\eta_1 = 0$, $\mathbb{E}\{\eta_1^2;\ \eta_1 \le 0\} < \infty$ и G является доминируемо меняющимся распределением.*

Если для некоторого $\delta \in (0,1)$

$$\mathbb{E}\bigl\{\eta^{1+\delta};\ \eta > 0\bigr\} < \infty, \tag{2.1}$$

то для любого $\delta' \in (0,\delta)$ существует $c < \infty$ такое, что $\mathbb{P}\{T_n > x\} \le cn\overline{G}(x)$ для всех $x > 0$ и $n \le x^{1+\delta'}$.

Если для некоторого $\delta > 0$

$$\mathbb{E}\bigl\{\eta^{2+\delta};\ \eta > 0\bigr\} < \infty, \tag{2.2}$$

то найдется $c < \infty$ такое, что $\mathbb{P}\{T_n > x\} \le cn\overline{G}(x)$ для всех $x > 0$ и $n \le x^2/(c\log x)$ (эквивалентно, $x \ge c\sqrt{n\log n}$).

Доказательство. Пусть $R(x)$ — функция риска для G, т.е. $\overline{G}(x) = e^{-R(x)}$. Сначала докажем, что доминируемое изменение влечет за собой оценку сверху

$$R(x) \le C + C\log x, \qquad x \ge 1, \tag{2.3}$$

для некоторого $C < \infty$. Действительно, найдется $c < \infty$ такое, что $\overline{G}(x/2) \le e^c\overline{G}(x)$ для всех x. Эквивалентно, $R(x/2) \ge R(x) - c$, что влечет за собой $R(x2^{-n}) \ge R(x) - cn$. Для $n(x) := [\log_2 x] + 1$ получаем

$$R(1) \ge R\bigl(x2^{-n(x)}\bigr) \ge R(x) - cn(x) = R(x) - c\log_2 x - c,$$

откуда и вытекает оценка сверху (2.3).

Для любых $y < x$ хвост распределения суммы можно оценить следующим образом:

$$\mathbb{P}\{T_n > x\} \le \mathbb{P}\bigl\{T_n > x,\ \eta_k > y \text{ для некоторого } k \le n\bigr\} + \mathbb{P}\bigl\{T_n > x,\ \eta_k \le y \text{ для всех } k \le n\bigr\} \le$$
$$\le n\overline{G}(y) + e^{-\lambda x}\bigl(\mathbb{E}\bigl\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le y\bigr\}\bigr)^n \tag{2.4}$$

для любого $\lambda > 0$ в силу экспоненциального неравенства Чебышева. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Возьмем $y := \varepsilon x$ и $\lambda := 2R(x)/x$. Тогда $e^{-\lambda x} = \overline{G}(x)e^{-R(x)}$ и

$$\mathbb{P}\{T_n > x\} \le n\overline{G}(y) + \overline{G}(x)e^{-R(x)}\bigl(\mathbb{E}\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le y\}\bigr)^n.$$

Оценим урезанный экспоненциальный момент:

$$\mathbb{E}\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le y\} = \mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} + \mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1};\ \frac{1}{\lambda} \le \eta_1 \le y\biggr\}. \tag{2.5}$$

Так как $e^u \le 1 + u + 2u^2$ для всех $u \le 1$, то

$$\mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1}; \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} \le 1 + \lambda\,\mathbb{E}\biggl\{\eta_1; \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} + 2\lambda^2\,\mathbb{E}\biggl\{\eta_1^2; \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} \le 1 + 2\lambda^2\,\mathbb{E}\biggl\{\eta_1^2; \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} \tag{2.6}$$

ввиду того, что η_1 имеет нулевое среднее.

Рассмотрим случай конечного второго момента, в котором получаем

$$\mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} \le 1 + c_1\lambda^2. \tag{2.7}$$

Далее,

$$\mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1};\ \frac{1}{\lambda} < \eta_1 \le y\biggr\} \le e^{\lambda y}\overline{G}\biggl(\frac{1}{\lambda}\biggr) \le e^{\lambda y}\,\mathbb{E}\{\eta^{2+\delta};\ \eta > 0\}\lambda^{2+\delta}$$

в силу условия (2.2) и неравенства Чебышева. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $\varepsilon C < \delta/4$. Тогда ввиду оценки сверху (2.3)

$$e^{\lambda y} = e^{\varepsilon x 2R(x)/x} \le c_2 x^{\delta/2}$$

для некоторого $c_2 < \infty$ и поэтому

$$\mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1};\ \frac{1}{\lambda} < \eta_1 \le y\biggr\} \le c_3\lambda^2. \tag{2.8}$$

Вместе с (2.7) это влечет за собой, что

$$\mathbb{E}\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le y\} \le 1 + \frac{c_4R^2(x)}{x^2} \le e^{c_4R^2(x)/x^2}$$

для некоторого $c_4 < \infty$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\{T_n > x\} \le n\overline{G}(y) + \overline{G}(x)e^{-R(x)}e^{c_4nR^2(x)/x^2} \le n\overline{G}(y) + \overline{G}(x)e^{-R(x)+R(x)(c_5 n\log x/x^2)}$$

для некоторого $c_5 < \infty$ ввиду (2.3). Отсюда в случае конечности момента порядка $2+\delta$ вытекает утверждение предложения для $n \le x^2/(c_5\log x)$, если принять во внимание (1.2).

В случае, когда имеет место лишь условие (2.1), справедливо неравенство

$$\mathbb{E}\biggl\{\eta_1^2;\ \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} \le \mathbb{E}\{\eta_1^2;\ \eta_1 \le 0\} + \frac{\mathbb{E}\{\eta_1^{1+\delta}; \eta_1 > 0\}}{\lambda^{1-\delta}}$$

и мы выводим из оценки (2.6), что

$$\mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1 \le \frac{1}{\lambda}\biggr\} \le 1 + c_6\lambda^{1+\delta}.$$

Аналогично (2.8)

$$\mathbb{E}\left\{e^{\lambda\eta_1};\ \frac{1}{\lambda}\le\eta_1\le y\right\}\le\frac{c_7}{x^{1+\delta'}}$$

в силу условия (2.1). Тогда

$$\mathbb{E}\big\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1\le y\big\}\le 1+\frac{c_8}{x^{1+\delta'}}\le e^{c_8/x^{1+\delta'}},$$

поскольку $R(x)\le c_9\log x$ ввиду (2.3). Следовательно,

$$\mathbb{P}\{T_n>x\}\le n\overline{G}(y)+\overline{G}(x)e^{-R(x)}e^{c_8n/x^{1+\delta'}},$$

и случай конечного первого момента доказан. □

Предложение 7. *Пусть распределение G имеет нулевое среднее, $\mathbb{E}\,\eta_1=0$ и все моменты конечны, $\mathbb{E}\,|\eta_1|^k<\infty$, $k=1,2,\dots$. Пусть $R(x)$ — функция риска G, т.е. $\overline{G}(x)=e^{-R(x)}$. Предположим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется x_0 такое, что*

$$\frac{R(x)}{x}\le\frac{(1+\varepsilon)R(z)}{z}\qquad\text{для всех}\quad x\ge z\ge x_0. \tag{2.9}$$

Тогда для любого $0<\varepsilon<1$ существует $c=c(\varepsilon)<\infty$ такое, что

$$\mathbb{P}\{T_n>x\}\le(n+1)\overline{G}(y)$$

для всех $x>0$, $y\le(1-\varepsilon)x$ и n таких, что $nR(y)/x^2\le 1/c$.

Доказательство. Возьмем $\lambda:=(1+\varepsilon)R(y)/x$. Тогда $e^{-\lambda x}=e^{-(1+\varepsilon)R(y)}$.

Благодаря условию (2.9)

$$\lambda z=(1+\varepsilon)\frac{R(y)}{y}\frac{y}{x}z\le(1-\varepsilon^2)\frac{R(y)}{y}z\le\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)R(z)$$

для всех достаточно больших $z\le y$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\left\{e^{\lambda\eta_1};\ \frac{1}{\lambda}<\eta_1\le y\right\}\le\mathbb{E}\left\{e^{(1-\varepsilon^2/2)R(\eta_1)};\ \frac{1}{\lambda}<\eta_1\right\}\le-\int\limits_{1/\lambda}^{\infty}e^{(1-\varepsilon^2/2)R(z)}\,de^{-R(z)}=$$

$$=\int\limits_{1/\lambda}^{\infty}e^{-\varepsilon^2R(z)/2}\,dR(z)=\frac{2e^{-\varepsilon^2R(1/\lambda)/2}}{\varepsilon^2}.$$

Принимая во внимание, что для любого $\alpha>0$ справедливо $e^{-R(x)}=o(1/x^{\alpha})$ при $x\to\infty$, получаем

$$\mathbb{E}\left\{e^{\lambda\eta_1};\ \frac{1}{\lambda}<\eta_1\le y\right\}=o(\lambda^2)\qquad\text{при}\quad y\to\infty. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.7) и (2.10) в (2.5), получаем неравенство

$$\mathbb{E}\big\{e^{\lambda\eta_1};\ \eta_1\le y\big\}\le 1+\frac{cR^2(y)}{x^2}\le e^{cR^2(y)/x^2}$$

для некоторого $c<\infty$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\{T_n>x\}\le n\overline{G}(y)+e^{-(1+\varepsilon)R(y)}e^{c_1nR^2(y)/x^2}\le n\overline{G}(y)+e^{-R(y)}=(n+1)\overline{G}(y)$$

в той зоне значений параметров, где $c_1 nR(y)/x^2 \le \varepsilon$, так что доказательство требуемой оценки сверху завершено. $\square$

В приведенном доказательстве распределение G на множестве $(-\infty, 1/\lambda]$ влияет на оценку сверху только через второй момент. Хвост G влияет на оценку сверху через значения в точках правее $1/\lambda$. Имея это в виду, сформулируем следующую равномерную версию предыдущего предложения для семейства распределений, хвосты которых доминируются хвостом G начиная с некоторой точки.

Следствие 8. *Пусть выполнены все условия предложения 7. Пусть $G^{(v)}$ — семейство распределений, зависящих от параметра $v \in V$, таких, что найдется x_1 такое, что $\overline{G^{(v)}}(x) \le \overline{G}(x)$ для всех $x > x_1$ и $v \in V$. Пусть каждое $G^{(v)}$ имеет нулевое среднее значение, а вторые моменты ограничены. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $c = c(\varepsilon) < \infty$ такое, что*

$$\overline{(G^{(v)})^{*n}}(x) \le (n+1)\overline{G^{(v)}}(y)$$

для всех $v \in V$, $x > 0$, $y \le (1-\varepsilon)x$ и n таких, что $nR(y)/x^2 \le 1/c$.

3. ОЦЕНКИ СНИЗУ

Лемма 9. *Пусть $\mathbb{E}\,\xi \log \xi < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge (1+o(1)) \sum_{i=0}^{n-1} m^i \overline{F}\big(m^{i+1}(1+\varepsilon)x\big)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \ge 1$.

Доказательство. Рассмотрим следующую убывающую последовательность событий:

$$B_k(x) := \big\{Z_j \le m^j x \ \text{ для всех } \ j \le k\big\}.$$

Так как $Z_j/m^j \to W$ п.н. при $j \to \infty$, то

$$\inf_{k\ge 1} \mathbb{P}\{B_k(x)\} \to 1 \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{3.1}$$

События

$$A_k(x) := \big\{B_k(x),\ \xi_i^{(k)} > m^{k+1}(1+\varepsilon)x \ \text{ для некоторого } \ i \le Z_k\big\}$$

не пересекаются, что влечет за собой оценку снизу

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big\{Z_n > m^n x \mid A_k(x)\big\}\, \mathbb{P}\{A_k(x)\}. \tag{3.2}$$

Начнем с оценки вероятности

$$\mathbb{P}\{A_k(x)\} = \sum_{j=0}^{m^k x} \mathbb{P}\{B_k(x),\, Z_k = j\}\, \mathbb{P}\big\{\xi_i^{(k)} > m^{k+1}(1+\varepsilon)x \ \text{ для некоторого } \ i \le j\big\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m^k x} \mathbb{P}\{B_k(x),\, Z_k = j\}\big(1 - \big(1 - \overline{F}(m^{k+1}(1+\varepsilon)x)\big)^j\,\big).$$

Поскольку $\mathbb{E}\,\xi\log\xi<\infty$, ввиду неравенства Чебышева имеем

$$\mathbb{P}\big\{\xi>m^{k+1}(1+\varepsilon)x\big\}\le\frac{\mathbb{E}\,\xi\log\xi}{m^{k+1}x\log x}=o\biggl(\frac{1}{m^kx}\biggr)\qquad\text{при}\quad x\to\infty\quad\text{равномерно по}\ k.$$

Поэтому

$$\big(1-\overline{F}(m^{k+1}(1+\varepsilon)x)\big)^j=1-j\overline{F}(m^{k+1}(1+\varepsilon)x)(1+o(1))$$

при $x\to\infty$ равномерно по $k\ge0$ и $j\le m^kx$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\{A_k(x)\}=(1+o(1))\overline{F}(m^{k+1}(1+\varepsilon)x)\sum_{j=0}^{m^kx}j\mathbb{P}\big\{B_k(x),\,Z_k=j\big\}$$

при $x\to\infty$ равномерно по $k\ge0$. Теорема Кестена–Стигума (см., например, [1, Theorem 2.1]) утверждает, в частности, что $\mathbb{E}\,\xi\log\xi<\infty$ тогда и только тогда, когда семейство случайных величин $\{W_n,\,n\ge0\}$ равномерно интегрируемо. Следовательно, из (3.1) вытекает, что

$$\mathbb{E}\big\{W_k;\,B_k(x),\,W_k\le x\big\}\to1\qquad\text{при}\quad x\to\infty\quad\text{равномерно по}\ k.$$

По этой причине

$$\sum_{j=0}^{m^kx}j\mathbb{P}\big\{B_k(x),\,Z_k=j\big\}=\mathbb{E}\big\{Z_k;\,B_k(x),\,Z_k\le m^kx\big\}=m^k\,\mathbb{E}\big\{W_k;\,B_k(x),\,W_k\le x\big\}\sim m^k$$

при $x\to\infty$ равномерно по $k\ge0$. Поэтому равномерно по $k\ge0$

$$\mathbb{P}\{A_k(x)\}=(1+o(1))m^k\overline{F}(m^{k+1}(1+\varepsilon)x)\qquad\text{при}\quad x\to\infty.\tag{3.3}$$

Далее докажем, что

$$\inf_{n\ge1,\,k\le n-1}\mathbb{P}\big\{Z_n>m^n(1+\varepsilon)x\mid A_k(x)\big\}\to1\qquad\text{при}\quad x\to\infty.\tag{3.4}$$

Действительно, в силу марковского свойства

$$\mathbb{P}\big\{Z_n>m^nx\mid A_k(x)\big\}\ge\mathbb{P}\Biggl\{\sum_{j=1}^{m^{k+1}(1+\varepsilon)x}Z_{n-k-1,j}>m^nx\Biggr\}=\mathbb{P}\Biggl\{\sum_{j=1}^{m^{k+1}(1+\varepsilon)x}W_{n-k-1,j}>m^{k+1}x\Biggr\},$$

где $Z_{n-k-1,j}$ — независимые копии Z_{n-k-1}, а $W_{n-k-1,j}$ — независимые копии W_{n-k-1}. Поскольку семейство $\{W_n\}$ равномерно интегрируемо и $\mathbb{E}\,W_n=1$ для любого n, можно применить закон больших чисел, в силу которого

$$\frac{1}{m^{k+1}x}\sum_{j=1}^{m^{k+1}(1+\varepsilon)x}W_{n-k-1,j}\xrightarrow{\mathrm{p}}(1+\varepsilon)\,\mathbb{E}\,W_{n-k-1}=1+\varepsilon$$

при $x\to\infty$ равномерно по $n\ge1$ и $k\le n-1$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\Biggl\{\sum_{j=1}^{m^{k+1}(1+\varepsilon)x}W_{n-k-1,j}>m^{k+1}x\Biggr\}\to1,$$

что обосновывает сходимость (3.4). Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), выводим требуемую равномерную по n оценку снизу. $\square$

Лемма 10. *Пусть второй момент распределения F конечен, $\sigma^2 := \operatorname{Var}\xi_1 < \infty$. Тогда для любого $A > 0$*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \geq \left(1 - \frac{\sigma^2}{(m^2-m)A^2} + o(1)\right) \sum_{i=0}^{n-1} m^i \overline{F}\big(m^{i+1}x + A\sqrt{m^{i+1}x}\big) \tag{3.5}$$

при $x \to \infty$ равномерно по n.

В частности, если дополнительно распределение F является $\sqrt{x}$-нечувствительным, то

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \geq (1 + o(1)) \sum_{i=0}^{n-1} m^i \overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty \quad \text{равномерно по } n. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть события $B_k(x)$ определены как ранее, а

$$A_k(x) := \big\{B_k(x),\ \xi_i^{(k)} > m^{k+1}x + A\sqrt{m^{k+1}x} \text{ для некоторого } i \leq Z_k\big\}.$$

Эти события снова не пересекаются, что влечет за собой оценку снизу (3.2). Такие же вычисления, как и в предыдущем доказательстве, приводят к равномерному по $k \geq 0$ соотношению

$$\mathbb{P}\{A_k(x)\} = (1 + o(1)) m^k \overline{F}\big(m^{k+1}x + A\sqrt{m^{k+1}x}\big) \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{3.7}$$

Остается показать, что

$$\liminf_{x\to\infty} \inf_{n\geq 1,\, k\leq n-1} \mathbb{P}\big\{Z_n > m^n x \mid A_k(x)\big\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(m^2-m)A^2}. \tag{3.8}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{Z_n > m^n x \mid A_k(x)\big\} &\geq \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{m^{k+1}x + A\sqrt{m^{k+1}x}} Z_{n-k-1,j} > m^n x\right\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{m^{k+1}x + A\sqrt{m^{k+1}x}} W_{n-k-1,j} > m^{k+1} x\right\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{m^{k+1}x + A\sqrt{m^{k+1}x}} (W_{n-k-1,j} - 1) > -A\sqrt{m^{k+1}x}\right\},
\end{aligned}$$

поскольку $\mathbb{E}\, W_n = 1$. Применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbb{P}\big\{Z_n > m^n x \mid A_k(x)\big\} \geq 1 - \frac{\operatorname{Var} W_{n-k-1}}{A^2} \frac{m^{k+1}x + A\sqrt{m^{k+1}x}}{m^{k+1}x} = 1 - \frac{\operatorname{Var} W_{n-k-1}}{A^2}(1 + o(1))$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \geq 1$ и $k \leq n-1$. Как вычислено в [15, Theorem 1.5.1],

$$\operatorname{Var} W_n = \frac{\sigma^2(1 - m^{-n})}{m^2 - m} \uparrow \frac{\sigma^2}{m^2 - m} = \operatorname{Var} W \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что завершает доказательство (3.8). Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.2), выводим оценку снизу (3.5).

Если F является $\sqrt{x}$-нечувствительным распределением, то, устремляя A к ∞, приходим ко второй оценке снизу, сформулированной в лемме. $\square$

Как ясно видно из доказательства леммы 10, в случае распределений Вейбулла с параметром $\beta \in (1/2, 1)$ хвост распределения W_n гарантированно тяжелее, чем $\overline{F}(mx)$. Поясним, почему справедлива более точная оценка снизу (1.10), упомянутая во введении. Учитывая, что

$$W = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\xi} W^{(i)},$$

где $W^{(i)}$ — независимые копии W, не зависящие от ξ, выводим

$$\mathbb{P}\{W > x\} \geq \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{\xi} W^{(i)} > mx;\ \xi \geq N_x\right\} \geq \mathbb{P}\{\xi > N_x\}\,\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{N_x} W^{(i)} > mx\right\}, \tag{3.9}$$

где выбрано $N_x := [mx - z(mx)^\beta]$, $z > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{P}\{\xi > N_x\} \sim e^{-(mx - z(mx)^\beta)^\beta} = e^{-(mx)^\beta + \beta z (mx)^{2\beta-1} + O(x^{3\beta-2})}. \tag{3.10}$$

Ввиду логарифмической асимптотики для $\mathbb{P}\{W > x\}$ (см. первое утверждение теоремы 3) имеем $\mathbb{E}\, e^{(1-\varepsilon)m^\beta W^\beta} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Кроме того, $x^{2\beta} \ll N_x (x^\beta)^\beta$. Поэтому можно применить теорему Нагаева [16, теорема 3]:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{N_x} W^{(i)} > mx\right\} \geq \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{N_x} \bigl(W^{(i)} - 1\bigr) > z(mx)^\beta\right\} = \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}(mx)^{2\beta-1}(1 + o(1))\right\}. \tag{3.11}$$

Объединяя (3.9)–(3.11), получаем

$$\mathbb{P}\{W > x\} \geq \exp\left\{-(mx)^\beta + \left(\beta z - \frac{z^2}{2\sigma^2}\right)(mx)^{2\beta-1}(1 + o(1))\right\}.$$

Максимизируя $\beta z - z^2/2\sigma^2$, приходим к (1.10).

4. ОЦЕНКИ СВЕРХУ: СВЕДЕНИЕ К СЛУЧАЮ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ

Лемма 11. *Пусть F — доминируемо меняющееся распределение, удовлетворяющее условию* (1.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для всех $n > N$ и всех достаточно больших x*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \leq (1 + \varepsilon)\,\mathbb{P}\bigl\{W_N > (1 - \varepsilon)x\bigr\}.$$

Доказательство. Чтобы вывести эту оценку сверху, запишем для $z < y$

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i > my\right\} \leq \mathbb{P}\{Z_{n-1} > z\} + \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i > my;\ Z_{n-1} \leq z\right\}, \tag{4.1}$$

где величины ξ_i не зависят от Z_{n-1}. Как вытекает из предложения 6 (при условии (2.1)) для сумм с нулевым средним, $\eta_i = \xi_i - m$, для некоторого $c < \infty$

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} \xi_i > my\right\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - m) > m(y - k)\right\} \leq ck\overline{F}(m(y - k)) \qquad \text{для всех} \quad k \leq z$$

при условии $z \le (y-z)^{1+\delta/2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i > my;\ Z_{n-1} \le z\biggr\} &= \sum_{k=1}^{z} \mathbb{P}\{Z_{n-1}=k\}\,\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k} \xi_i > my\biggr\} \le \\ &\le c\sum_{k=1}^{z} \mathbb{P}\{Z_{n-1}=k\} k\overline{F}(m(y-k)) \le \\ &\le c\,\mathbb{E}\,Z_{n-1}\overline{F}(m(y-z)) = cm^{n-1}\overline{F}(m(y-z)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Подставляя это в (4.1) при $y = m^{n-1}x$ и $z = m^{n-1}(x-x_n)$, получаем

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\{W_{n-1} > x - x_n\} + cm^{n-1}\overline{F}(m^n x_n),$$

если $x - x_n \le m^{(n-1)\delta/2} x_n^{1+\delta/2}$. Итерируя эту оценку сверху $n-N$ раз, приходим к следующему неравенству:

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\bigl\{W_N > x - x_n - \ldots - x_{N+1}\bigr\} + c\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}(m^k x_k), \tag{4.3}$$

если $x \le m^{(k-1)\delta/2} x_k^{1+\delta/2}$ для всех k. Рассмотрим убывающую последовательность $x_k = x/k^2$. Выберем N настолько большим, чтобы $m^{(k-1)\delta/2} \ge k^{2+\delta}$ при всех $k \ge N+1$. Тогда (4.3) имеет место для всех $n \ge N+1$ и

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\biggl\{W_N > \biggl(1 - \frac{1}{(N+1)^2} - \ldots - \frac{1}{n^2}\biggr)x\biggr\} + c\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\biggl(\frac{m^k x}{k^2}\biggr).$$

Выберем N настолько большим, чтобы дополнительно выполнялось $\sum_{k=N}^{\infty} 1/k^2 \le \varepsilon$. Тогда

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\bigl\{W_N > (1-\varepsilon)x\bigr\} + c\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\biggl(\frac{m^k x}{k^2}\biggr).$$

Ввиду условия (1.3)

$$\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\biggl(\frac{m^k x}{k^2}\biggr) \le c_1\overline{F}(mx)\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(m^{k-1}/k^2)^{1+\delta}}.$$

Увеличим теперь N настолько, чтобы выполнялось

$$c\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\biggl(\frac{m^k x}{k^2}\biggr) \le \frac{\varepsilon\overline{F}(mx)}{3},$$

что влечет за собой

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\bigl\{W_N > (1-\varepsilon)x\bigr\} + \frac{\varepsilon\overline{F}(mx)}{2}.$$

Применяя лемму 9, выводим $\overline{F}(mx) \le (1+o(1))\,\mathbb{P}\{W_N > (1-\varepsilon)x\}$ при $x \to \infty$, так что

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le (1+\varepsilon)\,\mathbb{P}\bigl\{W_N > (1-\varepsilon)x\bigr\}$$

для всех достаточно больших x, и доказательство завершено. $\square$

Из приведенных выше вычислений вытекает

Следствие 12. *Пусть F — доминируемо меняющееся распределение, удовлетворяющее условию* (1.3). *Тогда найдется константа $c < \infty$ такая, что $\mathbb{P}\{W_n > x\} \le c\overline{F}(x)$ для всех n и x.*

Для доминируемо меняющихся распределений можно получить более точную оценку, которая будет полезна для класса распределений, более широкого нежели почти правильно меняющиеся распределения. Мы делаем это в следующей лемме, при этом оценка, полученная в предыдущем следствии, служит предварительной оценкой первого шага.

Лемма 13. *Пусть $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$, F — доминируемо меняющееся распределение, удовлетворяющее условию* (1.3). *Тогда для любых $\gamma > 1/2$ и $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для всех $n > N$ и всех достаточно больших x*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le (1+\varepsilon)\,\mathbb{P}\{W_N > x - x^\gamma\}.$$

Доказательство. Здесь нам понадобятся более точные основанные на (4.2) оценки сверху. Выберем $\delta \in (1/\gamma - 1, 1)$. Заметим сначала, что, как вытекает из предложения 6 при условии (2.1) (которое выполнено в силу $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$), оценка (4.2) теперь имеет место в более широком временно́м интервале, а именно $z \le (y-z)^{1+\delta}$. Для таких z

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i > my;\ Z_{n-1} \le z\right\} \le c\left(\sum_{k=1}^{z/2} + \sum_{k=z/2}^{z}\right)\mathbb{P}\{Z_{n-1} = k\}k\overline{F}(m(y-k)) =: c(\Sigma_1 + \Sigma_2).$$

Имеем

$$\Sigma_1 \le \overline{F}\Big(m\Big(y - \frac{z}{2}\Big)\Big)\sum_{k=1}^{y/2}\mathbb{P}\{Z_{n-1} = k\}k \le \mathbb{E}\,Z_{n-1}\overline{F}\Big(\frac{my}{2}\Big) \le c_1 m^{n-1}\overline{F}(my)$$

для некоторого $c_1 < \infty$ в силу доминируемого изменения F. Далее,

$$\Sigma_2 \le \mathbb{P}\Big\{Z_{n-1} > \frac{z}{2}\Big\}z\overline{F}(m(y-z)) \le c_2\overline{F}\Big(\frac{z}{2m^{n-1}}\Big)z\overline{F}(m(y-z)) \le c_2c_1\overline{F}\Big(\frac{z}{m^{n-1}}\Big)z\overline{F}(m(y-z))$$

ввиду следствия 12 и доминируемого изменения F. Собирая оценки для Σ_1 и Σ_2 при $y = m^{n-1}x$ и $z = m^{n-1}(x - x_n)$, получаем из (4.1)

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\{W_{n-1} > x - x_n\} + c_1 m^{n-1}\overline{F}(m^n x) + c_3\overline{F}(x - x_n)m^{n-1}x\overline{F}(m^n x_n),$$

если выполнено $x - x_n \le m^{(n-1)\delta}x_n^{1+\delta}$. Итерируя эту верхнюю оценку $n - N$ раз, приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\big\{W_N > x - x_n - \ldots - x_{N+1}\big\} + c_1\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\big(m^k(x - x_n - \ldots - x_{k+1})\big) + \\ + c_3\sum_{k=N+1}^{n}\overline{F}(x - x_n - \ldots - x_k)m^{k-1}x\overline{F}(m^k x_k),\end{aligned} \tag{4.4}$$

если $x \le m^{(k-1)\delta}x_k^{1+\delta}$ для всех $k = n, \ldots, N+1$.

Возьмем теперь убывающую последовательность $x_k = x^\gamma m^{-k\delta/2}$. Поскольку $\gamma > 1/2$ и $\delta \in (1/\gamma - 1, 1)$, выполнено неравенство $x^{\gamma(1+\delta)} > x$. Тогда (4.4) имеет место для любого

$n \geq N+1$ и мы получаем

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \leq \mathbb{P}\biggl\{W_N > x - \biggl(\frac{1}{(N+1)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\biggr)x^\gamma\biggr\} + \\ + c_1 \sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\biggl(m^k\biggl(x - \biggl(\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2}\biggr)x^\gamma\biggr)\biggr) + \\ + c_3 \sum_{k=N+1}^{n} \overline{F}\biggl(x - \biggl(\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}\biggr)x^\gamma\biggr) m^{k-1} x \overline{F}\biggl(\frac{m^k x^\gamma}{k^2}\biggr).$$

Выберем N настолько большим, чтобы $\sum_{k=N+1}^{\infty} 1/k^2 \leq 1$. Тогда

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \leq \mathbb{P}\bigl\{W_N > x - x^\gamma\bigr\} + c_1\overline{F}(x - x^\gamma) \sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\frac{\overline{F}(m^k(x - x^\gamma))}{\overline{F}(x - x^\gamma)} + \\ + c_3\overline{F}(x - x^\gamma) \sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1} x \overline{F}\biggl(\frac{m^k x^\gamma}{k^2}\biggr).$$

Ввиду условия (1.3)

$$\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\frac{\overline{F}(m^k(x - x^\gamma))}{\overline{F}(x - x^\gamma)} \leq c_4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{m^{k(1+\delta)}} \to 0$$

и

$$\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1} x \overline{F}\biggl(\frac{m^k x^\gamma}{k^2}\biggr) \leq c_4 x \overline{F}(x^\gamma) \sum_{k=N+1}^{n} \frac{m^{k-1}}{(m^k/k^2)^{1+\delta}} \leq c_4\,\mathbb{E}\,\xi^2 x^{1-2\gamma} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(m^k/k^2)^{1+\delta}} \to 0$$

при $N \to \infty$. Принимая во внимание, что $\overline{F}(x - x^\gamma) \leq c_5\overline{F}(mx)$, и увеличивая в меру необходимости N, выводим следующую оценку:

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \leq \mathbb{P}\bigl\{W_N > x - x^\gamma\bigr\} + \frac{\varepsilon\overline{F}(mx)}{2}.$$

Применяя теперь лемму 9, получаем $\overline{F}(mx) \leq (1 + o(1))\,\mathbb{P}\{W_N > x\}$ при $x \to \infty$, так что

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \leq (1 + \varepsilon)\,\mathbb{P}\bigl\{W_N > x - x^\gamma\bigr\}$$

для всех достаточно больших x, что завершает доказательство. $\square$

Отметим, что утверждение леммы 11 справедливо не только для почти правильно меняющихся распределений, но также и для распределений Вейбулла; более точно, имеет место

Лемма 14. *Пусть* $\overline{F}(x) = e^{-R(x)}$, *где* $R(x)$ *удовлетворяет условию* (2.9) *и* $R(x)/x \to 0$. *Пусть выполнено условие* (1.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* N *такое, что*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \leq (1 + \varepsilon)\,\mathbb{P}\bigl\{W_N > (1 - \varepsilon)x\bigr\}$$

для всех $n > N$ *и всех достаточно больших* x.

Доказательство похоже на доказательство леммы 11. Исходным опять является неравенство (4.1). Как вытекает из предложения 7 для сумм с нулевым средним, $\eta_i = \xi_i - m$, для некоторого $c < \infty$ справедливо

$$\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k} \xi_i > my\biggr\} = \mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - m) > m(y - k)\biggr\} \leq ck\overline{F}\Bigl(\Bigl(m - \frac{\varepsilon}{2}\Bigr)(y - k)\Bigr) \qquad \text{для всех} \quad k \leq z,$$

если $z \le (y-z)^2/(cR(y-z))$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i > my;\ Z_{n-1} \le z\right\} \le c\,\mathbb{E}\,Z_{n-1}\overline{F}\Big(\Big(m-\frac{\varepsilon}{2}\Big)(y-z)\Big) = cm^{n-1}\overline{F}\Big(\Big(m-\frac{\varepsilon}{2}\Big)(y-z)\Big).$$

Подставляя это в (4.1) при $y = m^{n-1}x$ и $z = m^{n-1}(x-x_n)$, получаем

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\big\{W_{n-1} > x - x_n\big\} + cm^{n-1}\overline{F}\Big(\Big(m-\frac{\varepsilon}{2}\Big)^n x_n\Big),$$

если $x - x_n \le m^{n-1}x_n^2/(cR(m^{n-1}x_n))$. Итерируя эту оценку сверху $n-N$ раз, приходим к следующему неравенству:

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\big\{W_N > x - x_n - \ldots - x_{N+1}\big\} + c\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\Big(\Big(m-\frac{\varepsilon}{2}\Big)^k x_k\Big), \qquad (4.5)$$

если $x - x_k \le m^{k-1}x_k^2/(cR(m^{k-1}x_k))$ для всех $k = n,\ldots,N+1$. Рассмотрим убывающую последовательность $x_k = x/k^2$. Выберем N настолько большим, чтобы $m^{k-1}x/k^2 \ge R(m^{k-1}x/k^2)$ для всех $k \ge N+1$; это возможно в силу $R(z)/z \to 0$ при $z \to \infty$. Тогда (4.5) имеет место для любого $n \ge N+1$ и мы получаем

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\left\{W_N > \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2} - \ldots - \frac{1}{n^2}\right)x\right\} + c\sum_{k=N+1}^{n} m^{k-1}\overline{F}\Big(\Big(m-\frac{\varepsilon}{2}\Big)^k \frac{x}{k^2}\Big).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $m < (m-\varepsilon/2)^{1+\delta}$, где $\delta > 0$ взято из условия (1.3). Тогда окончание доказательства повторяет доказательство леммы 11. □

5. АСИМПТОТИКИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К КОНЕЧНОМУ ВРЕМЕНИ

Как вытекает из [10, Sect. 6], для почти правильно меняющегося распределения F для любого фиксированного n справедливо

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \sum_{i=0}^{n-1} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \qquad (5.1)$$

В случае конечности второго момента ξ можно распространить этот результат на более широкий класс распределений следующим образом.

Лемма 15. *Пусть* $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$ *и* F *— доминируемо меняющееся распределение. Если* F *является* x^γ*-нечувствительным для некоторого* $\gamma > 1/2$, *то эквивалентность* (5.1) *имеет место для любого фиксированного* n.

Доказательство. Во-первых, лемма 10 обеспечивает правильную оценку снизу. Оценка сверху будет доказана по индукции. Она верна при $n = 1$. Предположим, что для некоторого n

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le (1+o(1))\sum_{i=0}^{n-1} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \qquad (5.2)$$

Докажем, что тогда (5.2) верно и при $n+1$. Начнем с неравенства

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W_{n+1} > x\} = \mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_i > m^{n+1}x\Biggr\} \le \\ \le \mathbb{P}\bigl\{Z_n > m^n(x - x^\gamma)\bigr\} + \mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_i > m^{n+1}x;\ \frac{m^n x}{2} < Z_n \le m^n(x-x^\gamma)\Biggr\} + \\ + \mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_i > m^{n+1}x;\ m^n x^\gamma < Z_n \le \frac{m^n x}{2}\Biggr\} + \mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_i > m^{n+1}x;\ Z_n \le m^n x^\gamma\Biggr\} =: \\ =: P_1 + P_2 + P_3 + P_4,\end{aligned}$$

где ξ_i не зависят от Z_n. В силу индукционного предположения и того, что F является x^γ-нечувствительным,

$$P_1 = \mathbb{P}\bigl\{W_n > x - x^\gamma\bigr\} \le (1+o(1))\sum_{i=0}^{n-1} m^i\overline{F}(m^{i+1}(x-x^\gamma)) \sim \sum_{i=0}^{n-1} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \qquad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Возьмем $\delta \in (1/\gamma - 1, 1)$. Все значения k, не превосходящие $m^n x$, пренебрежимо малы по сравнению с $y^{1+\delta}$, где $y = m^{n+1}x^\gamma$, $\gamma > 1/2$. Следовательно, по предложению 6 найдется $c<\infty$ такое, что

$$\mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - m) > m^{k+1}x - km\Biggr\} \le ck\overline{F}(m^{n+1}x - km)$$

для достаточно больших x и всех $k \le m^n(x - x^\gamma)$.

Таким образом, для достаточно больших x

$$\begin{aligned}P_2 = \sum_{k=m^n x/2}^{m^n(x-x^\gamma)} \mathbb{P}\{Z_n = k\}\,\mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - m) > m^{n+1}x - km\Biggr\} \le \\ \le c\sum_{k=m^n x/2}^{m^n(x-x^\gamma)} \mathbb{P}\{Z_n = k\}k\overline{F}(m^{n+1}x - km) \le \\ \le cm^n x\mathbb{P}\biggl\{Z_n \ge \frac{m^n x}{2}\biggr\}\overline{F}(m^{n+1}x^\gamma).\end{aligned}$$

Так как $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$ и $\gamma > 1/2$, то $x\overline{F}(m^{n+1}x^\gamma) \to 0$ при $x\to\infty$. Следовательно, при $x\to\infty$

$$P_2 = o\Bigl(\mathbb{P}\Bigl\{W_n \ge \frac{x}{2}\Bigr\}\Bigr) = o\Bigl(\overline{F}\Bigl(\frac{mx}{2}\Bigr)\Bigr) = o(\overline{F}(mx))$$

ввиду индукционного предположения (5.2) и доминируемого изменения F.

Далее, для достаточно больших x

$$\begin{aligned}P_3 \le c\sum_{k=m^n x^\gamma}^{m^n x/2} \mathbb{P}\{Z_n = k\}k\overline{F}(m^{n+1}x - km) \le c\,\mathbb{E}\bigl\{Z_n;\, Z_n > m^n x^\gamma\bigr\}\overline{F}\biggl(\frac{m^{n+1}x}{2}\biggr) = \\ = o(\overline{F}(mx)) \qquad \text{при} \quad x\to\infty\end{aligned}$$

опять ввиду доминируемого изменения F.

Наконец,

$$P_4 = \sum_{k=1}^{m^n x^\gamma} \mathbb{P}\{Z_n = k\}\,\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - 2m) > m^{n+1}x - 2km\biggr\}.$$

Распределение F является доминируемо меняющимся и имеет длинный хвост (нечувствительно относительно констант); поэтому оно принадлежит классу $\mathcal{S}^*$ (см., например, [13, Theorem 3.29]). Кроме того, аргумент $m^{n+1}x - 2km$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$ равномерно по $k \le mx^\gamma$. Это позволяет применить предложение 5 к случайным величинам $\eta_i := \xi_i - 2m$ с отрицательным средним значением; поэтому равномерно по $k \le mx^\gamma$

$$\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - 2m) > m^{n+1}x - 2km\biggr\} \le (1+o(1))k\overline{F}(m^{n+1}x - 2km) \sim k\overline{F}(m^{n+1}x) \qquad \text{при} \quad x \to \infty,$$

потому что F является x^γ-нечувствительным. Следовательно,

$$P_4 \sim \overline{F}(m^{n+1}x) \sum_{k=1}^{m^n x^\gamma} \mathbb{P}\{Z_n = k\}k \sim \overline{F}(m^{n+1}x)\,\mathbb{E}\,Z_n = m^n\overline{F}(m^{n+1}x).$$

Объединяя оценки $P_1, \dots, P_4$, выводим, что

$$\mathbb{P}\{W_{n+1} > x\} \le \mathbb{P}\{W_n > mx\} + m^n\overline{F}(m^{n+1}x) + o(\overline{F}(mx)) \qquad \text{при} \quad x \to \infty,$$

и индукционное предположение (5.2) завершает доказательство. □

Если распределение F является быстро меняющимся, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \sim \overline{F}(mx) \qquad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{5.3}$$

Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $x(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $\overline{F}(mx) \le \varepsilon\overline{F}(x)$ для всех $x > x(\varepsilon)$. Тогда для $x > x(\varepsilon)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^i\overline{F}(m^{i+1}x) \le \sum_{i=1}^{\infty}(m\varepsilon)^i\overline{F}(mx) = \frac{m\varepsilon}{1 - m\varepsilon}\overline{F}(mx).$$

Постоянный множитель в правой части можно сделать сколь угодно малым выбором подходящего ε, так что эквивалентность (5.3) доказана.

Лемма 16. *Пусть $\overline{F}(x) = e^{-R(x)}$, где $R(x)$ правильно меняется с показателем $\beta \in (0, 1/2)$. В случае $\beta \in [(3 - \sqrt{5})/2, 1/2)$ предположим также, что выполнено условие* (1.8). *Кроме того, пусть $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда для любого фиксированного n*

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \overline{F}(mx) \qquad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Поскольку $\beta < 1/2$, распределение F является $\sqrt{x}$-нечувствительным, что по лемме 10 влечет за собой оценку снизу $\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge (1 + o(1))\overline{F}(mx)$ при $x \to \infty$.

Чтобы доказать оценку сверху, применим рассуждения по индукции. Для $n = 1$ имеем равенство $\mathbb{P}\{W_1 > x\} = \overline{F}(mx)$. Предположим теперь, что $\mathbb{P}\{W_n > x\} \sim \overline{F}(mx)$ для некоторого $n \ge 1$. Докажем, что тогда это верно и для $n + 1$.

Если $\beta < (3 - \sqrt{5})/2$, то интервал $(1/(2 - \beta), 1 - \beta)$ непуст; в этом случае возьмем $\gamma_1 = \gamma_2 \in (1/(2 - \beta), 1 - \beta)$. Если $\beta \in [(3 - \sqrt{5})/2, 1/2)$, то $1/(2 - \beta) \ge 1 - \beta$ и выберем $\gamma_1 \in (1/2, 1 - \beta)$

и $\gamma_2 > 1/(2-\beta)$, так что $\gamma_2 \ge \gamma_1$. Поскольку $\gamma_1 < 1-\beta$, распределение F является x^{γ_1}-нечувствительным. Начнем с неравенства

$$\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_i > m^{n+1}x\biggr\} \le \mathbb{P}\bigl\{Z_n > m^n(x-x^{\gamma_1})\bigr\} + \mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_i > m^{n+1}x;\ Z_n \le m^n(x-x^{\gamma_1})\biggr\} =: \\ =: P_1 + P_2,$$

где ξ_i не зависят от Z_n. В силу индукционного предположения и того, что F является x^{γ_1}-нечувствительным,

$$P_1 \sim \overline{F}(m(x-x^{\gamma_1})) \sim \overline{F}(mx) \qquad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Остается показать, что $P_2 = o(\overline{F}(mx))$ при $x\to\infty$. Исходным является разложение

$$P_2 = \Biggl(\sum_{k=0}^{m^n(x-x^{\gamma_2})-1} + \sum_{k=m^n(x-x^{\gamma_2})}^{m^n(x-x^{\gamma_1})}\Biggr)\mathbb{P}\{Z_n=k\}\,\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-m) > m^{n+1}x-km\biggr\} =: P_{21}+P_{22}.$$

В первой сумме P_{21} имеем $m^{n+1}x - mk \ge m^{n+1}x^{\gamma_2} \gg x^{1/(2-\beta)}$ ввиду выбора $\gamma_2 > 1/(2-\beta)$. Функция $R(x)/x^2$ правильно меняется с показателем $\beta-2$. Следовательно, при $x\to\infty$ получаем $kR(m^{n+1}x-km)/(m^{n+1}x-km)^2 \to 0$ равномерно по $k \le m^n(x-x^{\gamma_2})$. Это наблюдение вместе с правильным изменением $R(x)$ позволяет применить предложение 7 с $y=(1-\varepsilon)x$, которое гарантирует, что

$$\mathbb{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-m) > m^{n+1}x-mk\biggr\} \le k\overline{F}\bigl((m^{n+1}x-mk)(1-\varepsilon)\bigr)$$

для достаточно больших x и всех $k\le m^n(x-x^{\gamma_2})$. Следовательно, для достаточно больших x

$$P_{21} \le \sum_{k=0}^{m^n(x-x^{\gamma_2})} \mathbb{P}\{Z_n=k\}k\overline{F}\bigl((m^nx-k)m(1-\varepsilon)\bigr).$$

Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы $m(1-\varepsilon)>1$. Тогда, в силу быстрого изменения F, при $x\to\infty$

$$\overline{F}\bigl((m^nx-k)m(1-\varepsilon)\bigr) = o(\overline{F}(m^nx-k)) \qquad \text{равномерно по } \ k\le m^n(x-x^{\gamma_2}).$$

Кроме того, в силу индукционного предположения

$$\mathbb{P}\{Z_n=k\} \le \mathbb{P}\biggl\{W_n \ge \frac{k}{m^n}\biggr\} \le c\overline{F}\biggl(\frac{k}{m^{n-1}}\biggr)$$

для некоторого $c<\infty$. Следовательно, при $x\to\infty$

$$P_{21} \le o(1)\int_0^{m^n(x-x^{\gamma_2})} y\overline{F}\Bigl(\frac{y}{m^{n-1}}\Bigr)\overline{F}(m^nx-y)\,dy = o(1)\int_0^{m(x-x^{\gamma_2})} y\overline{F}(y)\overline{F}(m^{n-1}(mx-y))\,dy.$$

Поскольку $m^{n-1}\ge 1$ и $\beta>0$, имеем

$$y\overline{F}(m^{n-1}(mx-y)) = o(\overline{F}(mx-y))$$

при $x\to\infty$ равномерно по $y \le m(x-x^{\gamma_2})$. Следовательно,

$$P_{21} \le o(1)\int\limits_0^{mx} \overline{F}(y)\overline{F}(mx-y)\,dy.$$

Включение $F\in\mathcal{S}^*$ означает, что

$$\int\limits_0^{mx} \overline{F}(y)\overline{F}(mx-y)\,dy \sim 2\overline{F}(mx)\int\limits_0^{\infty}\overline{F}(y)\,dy \qquad \text{при}\quad x\to\infty,$$

что, наконец, влечет за собой $P_{21}=o(\overline{F}(mx))$. В случае $\beta<(3-\sqrt{5})/2$ это завершает доказательство, поскольку тогда $\gamma_1=\gamma_2$ и $P_{22}=0$.

Если $\beta<1/2$, то остается доказать, что также и $P_{22}=o(\overline{F}(mx))$. Имеем

$$P_{22}=\sum_{k=m^nx^{\gamma_1}}^{m^nx^{\gamma_2}} \mathbb{P}\bigl\{Z_n=m^nx-k\bigr\}\,\mathbb{P}\Biggl\{\sum_{i=1}^{m^nx-k}(\xi_i-m)>mk\Biggr\}.$$

В силу индукционного предположения

$$\mathbb{P}\bigl\{Z_n=m^nx-k\bigr\}\le \mathbb{P}\biggl\{W_n\ge x-\frac{k}{m^n}\biggr\}\sim \overline{F}\biggl(mx-\frac{k}{m^{n-1}}\biggr),$$

так что

$$P_{22}\le c_1\sum_{k=m^nx^{\gamma_1}}^{m^nx^{\gamma_2}} \overline{F}\biggl(mx-\frac{k}{m^{n-1}}\biggr)(m^nx-k+1)\overline{F}(y_k)$$

для любого y_k, удовлетворяющего неравенствам $y_k\le mk/2$ и $m^nx-k\le (mk)^2/cR(y_k)$, где $c=c(1/2)$ определено в предложении 7. Выберем $\gamma\in(2\beta,1)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\gamma_1}-1<\gamma<\frac{1}{\gamma_2}-1+\beta, \tag{5.4}$$

что возможно, если мы выберем $\gamma_2>1/(2-\beta)$ достаточно близким к $1/(2-\beta)$. Тогда возьмем y_k как решение уравнения $R(y_k)=m^{2-n}k^{1+\gamma}/cx=c_2k^{1+\gamma}/x$. При таком выборе $y_k\le mk/2$ для $k\le m^nx^{\gamma_2}$ при достаточно больших x (ввиду правого неравенства в (5.4)) и $m^nx-k\le (mk)^2/(cR(y_k))$.

Далее, поскольку $\overline{F}(y_k)=e^{-R(y_k)}$,

$$P_{22}\le c_3x\sum_{k=m^nx^{\gamma_1}}^{m^nx^{\gamma_2}} \overline{F}\biggl(mx-\frac{k}{m^{n-1}}\biggr)\overline{F}(y_k)\le c_3x\overline{F}(mx)\sum_{k=m^nx^{\gamma_1}}^{m^nx^{\gamma_2}} e^{R(mx)-R(mx-k/m^{n-1})-R(y_k)}.$$

Виду условия (1.8) на приращения R и правильного изменения R имеем

$$\frac{R(x)-R(y)}{x-y}\le c_4\frac{R(x)}{x},\qquad x\ge y\ge 1,$$

что влечет за собой

$$R(mx)-R\biggl(mx-\frac{k}{m^{n-1}}\biggr)-R(y_k)\le \frac{c_5kR(mx)}{x}-\frac{c_2k^{1+\gamma}}{x}=\frac{(c_5R(mx)-c_2k^{\gamma})k}{x}.$$

Так как $R(mx)$ правильно меняется с показателем $\beta < 1/2$ и $k \ge m^n x^{\gamma_1}$, выбор $\gamma_1 \in (1/2, 1-\beta)$ и $\gamma \in (2\beta, 1)$ обеспечивает $R(mx) = o(k)$. Следовательно,

$$R(mx) - R\left(mx - \frac{k}{m^{n-1}}\right) - R(y_k) \le -\frac{c_6 k^{1+\gamma}}{x},$$

откуда вытекает

$$P_{22} \le c_4 x \overline{F}(mx) \sum_{k=m^n x^{\gamma_1}}^{\infty} e^{-c_6 k^{1+\gamma}/x} = o(\overline{F}(mx)) \qquad \text{при} \quad x \to \infty$$

в силу $\gamma_1(1+\gamma) > 1$ и левого неравенства в (5.4). Объединяя вместе все оценки, выводим соотношение $P_2 = o(\overline{F}(mx))$, и поэтому $\mathbb{P}\{W_{n+1} > x\} \sim P_1 \sim \overline{F}(mx)$ при $x \to \infty$, что завершает доказательство. $\square$

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2 И 3

Доказательство теоремы 1. Оценки (1.4) вытекают из леммы 9 и следствия 12. Остальные утверждения вытекают из эквивалентности (5.1) и из лемм 9 и 11. $\square$

Доказательство теоремы 2 вытекает из лемм 15, 10 и 13. $\square$

Доказательство теоремы 3. Оценка снизу в случае общего $\beta < 1$ вытекает из леммы 9. Оценка сверху вытекает из леммы 14, которая сводит задачу к конечному времени N и последующим индукционным аргументам типа

$$\mathbb{P}\{W_N > x\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{\xi} W_{N-1}^{(i)} > mx\right\} \le \mathbb{P}\bigl\{\xi > mx(1-\varepsilon)\bigr\} + \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{\xi} W_{N-1}^{(i)} > mx;\ \xi \le mx(1-\varepsilon)\right\},$$

где $W_{N-1}^{(1)}, W_{N-1}^{(2)}, \ldots$ — независимые копии W_{N-1}. Предполагая, что хвост распределения W_{N-1} не тяжелее, чем $c\overline{F}((1-\varepsilon)x)$, мы можем оценить вторую вероятность следующим образом:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{\xi} W_{N-1}^{(i)} > mx;\ \xi \le mx(1-\varepsilon)\right\} = \sum_{k=1}^{mx(1-\varepsilon)} \mathbb{P}\{\xi = k\}\, \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} \bigl(W_{N-1}^{(i)} - k\bigr) > mx - k\right\}.$$

По предложению 7

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} \bigl(W_{N-1}^{(i)} - k\bigr) > mx - k\right\} \le (k+1)\overline{F}\bigl((1-\varepsilon)(mx-k)\bigr)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $k \le mx(1-\varepsilon)$; заметим, что условие $k \le mx(1-\varepsilon)$ влечет за собой $mx - k \ge mx\varepsilon$ и поэтому выполнены оба условия предложения 7. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{mx(1-\varepsilon)} \mathbb{P}\{\xi = k\}\, \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} \bigl(W_{N-1}^{(i)} - k\bigr) > mx - k\right\} \le 2 \sum_{k=1}^{mx(1-\varepsilon)} \mathbb{P}\{\xi = k\} k \overline{F}\bigl((1-\varepsilon)(mx-k)\bigr) = \\ = o\bigl(\overline{F}(m(1-2\varepsilon)x)\bigr)$$

при $x \to \infty$ ввиду стандартных свойств распределений типа Вейбулла. Это завершает доказательство оценки в случае $\beta < 1$.

В случае $\beta < 1/2$ распределение F является $\sqrt{x}$-нечувствительным, что по лемме 10 влечет за собой оценку снизу $\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge (1+o(1))\overline{F}(mx)$ при $x \to \infty$.

Докажем теперь оценку сверху для случая $\beta < 1/2$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 14 найдем N такое, что для всех $n > N$ и всех достаточно больших x

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le (1+\varepsilon)\,\mathbb{P}\big\{W_N > (1-\varepsilon)x\big\}.$$

Как и в доказательстве леммы 16, возьмем $\gamma \in (1/(2-\beta), 1-\beta)$, так что F является x^γ-нечувствительным. Используем разложение для $n > N+1$

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le \mathbb{P}\big\{\xi > m(x - x^\gamma)\big\} + \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{\xi} W_{n-1}^{(i)} > mx;\ \xi \le m(x-x^\gamma)\right\} =: P_1 + P_2.$$

Поскольку F является x^γ-нечувствительным,

$$P_1 = \mathbb{P}\big\{\xi > m(x-x^\gamma)\big\} \sim \overline{F}(mx) \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Далее используем лемму 14, которая применима, поскольку $n-1 > N$: для всех достаточно больших y

$$\mathbb{P}\{W_{n-1} > y\} \le (1+\varepsilon)\,\mathbb{P}\big\{W_N > (1-\varepsilon)y\big\} \le (1+2\varepsilon)\overline{F}((1-\varepsilon)my)$$

ввиду леммы 16. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $m_* := (1-\varepsilon)m > 1$, что возможно ввиду $m > 1$. Семейство $\{W_{n-1} - 1,\ n > N+1\}$ удовлетворяет условиям следствия 8, которое, в свою очередь, позволяет доказать, что $P_2 = o(\overline{F}(mx))$ при $x \to \infty$ равномерно по $n > N+1$; для этого достаточно повторить доказательство леммы 16. □

7. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩЕГОСЯ ХВОСТА С ПОКАЗАТЕЛЕМ –1; ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Как доказано в лемме 9, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge (1+o(1))\sum_{k=0}^{n-1} m^k \overline{F}\big(m^{k+1}(1+\varepsilon)x\big)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \ge 1$. Поскольку F правильно меняется, отсюда можно вывести, что

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \ge (1+o(1))\sum_{k=0}^{n-1} m^k \overline{F}(m^{k+1}x)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \ge 1$. Поэтому остается доказать следующую оценку сверху: для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} \le (1+o(1))\sum_{k=0}^{n-1} m^k \overline{F}\big(m^{k+1}x(1-\varepsilon)\big). \tag{7.1}$$

Здесь не работает метод доказательства оценок сверху, основанный на лемме 11, поскольку он существенно опирается на условие (1.3). По этой причине мы используем другой подход. Определим события

$$A_k(x) := \big\{\xi_i^{(k)} > m^{k+1}x(1-\varepsilon)\ \text{ для некоторого }\ i \le Z_k\big\}.$$

Ясно, что

$$\mathbb{P}\big\{A_k(x)\,|\,Z_k=j\big\}\le j\overline{F}\big(m^{k+1}x(1-\varepsilon)\big),\qquad j\ge 1.$$

Следовательно, $\mathbb{P}\{A_k(x)\}\le m^k\overline{F}(m^{k+1}x(1-\varepsilon))$ и

$$\mathbb{P}\Bigg\{\bigcup_{k=0}^{n-1}A_k(x)\Bigg\}\le\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\{A_k(x)\}\le\sum_{k=0}^{n-1}m^k\overline{F}\big(m^{k+1}x(1-\varepsilon)\big).$$

Ввиду этой эквивалентности и оценки сверху

$$\mathbb{P}\{W_n>x\}\le\mathbb{P}\Bigg\{W_n>x,\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\Bigg\}+\mathbb{P}\Bigg\{\bigcup_{k=0}^{n-1}A_k(x)\Bigg\}$$

заключаем, что (7.1) будет обосновано, если для любого фиксированного $\varepsilon>0$ докажем соотношения

$$\mathbb{P}\Bigg\{W_n>x,\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\Bigg\}=o\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}m^k\overline{F}(m^{k+1}x)\Bigg)\tag{7.2}$$

при $x\to\infty$ равномерно по $n\ge 1$. По неравенству Чебышева для любого $\lambda>0$

$$\mathbb{P}\Bigg\{W_n>x,\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\Bigg\}\le\frac{\mathbb{E}\big\{e^{\lambda Z_n}-1;\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\big\}}{e^{\lambda m^n x}-1}=$$

$$=\frac{\mathbb{E}\big\{e^{\lambda Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\big\}-1}{e^{\lambda m^n x}-1}+\frac{\mathbb{P}\big\{\bigcup_{k=0}^{n-1}A_k(x)\big\}}{e^{\lambda m^n x}-1},$$

так что соотношение (7.2) будет вытекать из существования $\lambda=\lambda_n(x)$ такого, что

$$\lambda m^n x\to\infty\tag{7.3}$$

и

$$\frac{\mathbb{E}\big\{e^{\lambda Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\big\}-1}{e^{\lambda m^n x}-1}=o\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}m^k\overline{F}(m^{k+1}x)\Bigg).\tag{7.4}$$

Чтобы найти $\lambda=\lambda_n(x)$, удовлетворяющее (7.3) и (7.4), построим подходящие экспоненциальные оценки для ограниченных случайных величин. Возьмем $\lambda_{nn}>0$ и рассмотрим следующий экспоненциальный момент:

$$\mathbb{E}\Bigg\{e^{\lambda_{nn}Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\Bigg\}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg\{e^{\lambda_{nn}Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)},\ Z_{n-1}=i\Bigg\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\Bigg\{e^{\lambda_{nn}(\xi_1^{(n-1)}+\ldots+\xi_i^{(n-1)})};\ \overline{A_{n-1}(x)},\ \bigcap_{k=0}^{n-2}\overline{A_k(x)},\ Z_{n-1}=i\Bigg\}.$$

Заметим, что события $\bigcap_{k=0}^{n-2}\overline{A_k(x)}$ и $Z_{n-1}=i$ не зависят от $\xi^{(n-1)}$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\Bigg\{e^{\lambda_{nn}Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\Bigg\}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big\{e^{\lambda_{nn}(\xi_1^{(n-1)}+\ldots+\xi_i^{(n-1)})};\ \overline{A_{n-1}(x)}\Big\}\,\mathbb{P}\Bigg\{\bigcap_{k=0}^{n-2}\overline{A_k(x)},Z_{n-1}=i\Bigg\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\big(\mathbb{E}\big\{e^{\lambda_{nn}\xi};\ \xi\le m^n x(1-\varepsilon)\big\}\big)^i\,\mathbb{P}\Bigg\{\bigcap_{k=0}^{n-2}\overline{A_k(x)},\ Z_{n-1}=i\Bigg\}.$$

Если положить

$$\lambda_{n,n-1} := \log \mathbb{E}\big\{e^{\lambda_{nn}\xi};\ \xi \le m^n x(1-\varepsilon)\big\},$$

то получим рекурсивное равенство

$$\mathbb{E}\Bigg\{e^{\lambda_{nn}Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\Bigg\} = \mathbb{E}\Bigg\{e^{\lambda_{n,n-1}Z_{n-1}};\ \bigcap_{k=0}^{n-2}\overline{A_k(x)}\Bigg\}.$$

Далее итерируем эту рекурсию n раз. Оценим $\lambda_{n,n-1}$ через λ_{nn}.

Для любых $z>0$ и $y\le z$ справедливо $e^y \le 1+y+y^2e^z/2$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\big\{e^{\lambda_{nn}\xi};\ \xi \le m^n x(1-\varepsilon)\big\} \le 1+\lambda_{nn}m + \frac{1}{2}\lambda_{nn}^2\,\mathbb{E}\big\{\xi^2;\ \xi\le m^n x\big\}e^{\lambda_{nn}m^n x(1-\varepsilon)}.$$

Поскольку F правильно меняется с показателем -1, для достаточно больших x имеем

$$\mathbb{E}\big\{\xi^2;\ \xi\le m^n x\big\} \le \frac{3}{2}(m^n x)^2\overline{F}(m^n x).$$

Поэтому

$$\mathbb{E}\big\{e^{\lambda_{nn}\xi};\ \xi \le m^n x(1-\varepsilon)\big\} \le 1+\lambda_{nn}\bigg(m+\frac{3}{4}(\lambda_{nn}m^n x)m^n x\overline{F}(m^n x)e^{\lambda_{nn}m^n x(1-\varepsilon)}\bigg). \tag{7.5}$$

Введем обозначение

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} m^k\overline{F}(m^{k+1}x)$$

и выберем λ_n специальным образом:

$$\lambda_{nn} = \lambda_n(x) := (1+\varepsilon)\frac{\log\frac{1}{p_n(x)x} - 2\log\log\frac{1}{p_n(x)x}}{x\prod_{k=0}^{n-1}\Big(m+\frac{m^{k+1}x\overline{F}(m^{k+1}x)}{(p_n(x)x)^{1-\varepsilon^2}}\Big)}.$$

Для произведения справедливы следующие неравенства:

$$m^n \le \prod_{k=0}^{n-1}\bigg(m+\frac{m^{k+1}x\overline{F}(m^{k+1}x)}{(p_n(x)x)^{1-\varepsilon^2}}\bigg) = m^n\prod_{k=0}^{n-1}\bigg(1+\frac{m^k\overline{F}(m^{k+1}x)}{p_n(x)}(p_n(x)x)^{\varepsilon^2}\bigg) \le$$

$$\le m^n\exp\Bigg\{(p_n(x)x)^{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{m^k\overline{F}(m^{k+1}x)}{p_n(x)}\Bigg\} = m^n e^{(p_n(x)x)^{\varepsilon^2}}.$$

Заметим, что тогда произведение асимптотически эквивалентно m^n, потому что $p_n(x)x\to 0$. Заметим также, что

$$\frac{1}{e^{\lambda_{nn}m^n x}-1} \le \frac{1}{\big(\frac{1}{p_n(x)x}\big)^{1+\varepsilon+o(1)}\log^{-2(1+\varepsilon+o(1))}\frac{1}{p_n(x)x}-1} \sim$$

$$\sim (p_n(x)x)^{1+\varepsilon+o(1)}\log^{2(1+\varepsilon+o(1))}\frac{1}{p_n(x)x} \le c_1(p_n(x)x)^{1+\varepsilon/2} \tag{7.6}$$

при всех достаточно больших x равномерно по n. В частности, это выражение стремится к нулю, откуда вытекает соотношение (7.3).

Теперь оценим все λ_{nk}, $k\le n-1$. Ввиду нашего выбора λ_{nn} из (7.5) вытекает

$$\mathbb{E}\bigl\{e^{\lambda_{nn}\xi};\ \xi\le m^n x(1-\varepsilon)\bigr\}\le$$

$$\le 1+\lambda_{nn}\biggl(m+\frac{3(1+\varepsilon)}{4}\log\frac{1}{p_n(x)x}m^n x\overline{F}(m^n x)\exp\biggl\{(1-\varepsilon^2)\biggl(\log\frac{1}{p_n(x)x}-2\log\log\frac{1}{p_n(x)x}\biggr)\biggr\}\biggr)\le$$

$$\le 1+\lambda_{nn}\biggl(m+m^n x\overline{F}(m^n x)\exp\biggl\{(1-\varepsilon^2)\log\frac{1}{p_n(x)x}\biggr\}\biggr),$$

если $1+\varepsilon<4/3$ и $2(1-\varepsilon^2)>1$. Поэтому

$$\mathbb{E}\bigl\{e^{\lambda_{nn}\xi};\ \xi\le m^n x(1-\varepsilon)\bigr\}\le 1+\lambda_{nn}\biggl(m+\frac{m^n x\overline{F}(m^n x)}{(p_n(x)x)^{1-\varepsilon^2}}\biggr)\le\exp\biggl\{\lambda_{nn}\biggl(m+\frac{m^n x\overline{F}(m^n x)}{(p_n(x)x)^{1-\varepsilon^2}}\biggr)\biggr\},$$

что влечет за собой

$$\lambda_{n,n-1}\le\lambda_{nn}\biggl(m+\frac{m^n x\overline{F}(m^n x)}{(p_n(x)x)^{1-\varepsilon^2}}\biggr)=(1+\varepsilon)\frac{\log\frac{1}{p_n(x)x}-2\log\log\frac{1}{p_n(x)x}}{x\prod_{k=0}^{n-2}\Bigl(m+\frac{m^{k+1}x\overline{F}(m^{k+1}x)}{(p_n(x)x)^{1-\varepsilon^2}}\Bigr)}.$$

Итерируя эту оценку n раз, окончательно выводим

$$\mathbb{E}\biggl\{e^{\lambda_{nn}Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\biggr\}\le\mathbb{E}\,e^{\lambda_{n0}}=e^{\lambda_{n0}}=\exp\biggl\{\frac{1+\varepsilon}{x}\log\frac{1}{p_n(x)x}\biggr\}.$$

Отсюда и из (7.6)

$$\frac{\mathbb{E}\bigl\{e^{\lambda_{nn}Z_n};\ \bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k(x)}\bigr\}-1}{e^{\lambda_{nn}m^n x}-1}\le c_2x^{-1}(p_n(x)x)^{1+\varepsilon/2}\log\frac{1}{p_n(x)x}\le c_3x^{-1}(p_n(x)x)^{1+\varepsilon/4}=$$

$$=c_3p_n(x)(p_n(x)x)^{\varepsilon/4}=o(p_n(x)),$$

так что (7.4) тоже доказано. Это завершает доказательство теоремы 4.

Благодарности. Мы глубоко признательны обоим рецензентам за указание некоторых некорректностей в первоначальной версии статьи, а также за их очень конструктивные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asmussen S., Hering H.* Branching processes. Boston: Birkhäuser, 1983.
2. *Athreya K.B., Ney P.E.* Branching processes. Berlin: Springer, 1972.
3. *Berestycki N., Gantert N., Mörters P., Sidorova N.* Galton–Watson trees with vanishing martingale limit: E-print, 2012. arXiv: 1204.3080 [math.PR].
4. *Biggins J.D., Bingham N.H.* Large deviations in the supercritical branching process // Adv. Appl. Probab. 1993. V. 25. P. 757–772.
5. *Bingham N.H., Doney R.A.* Asymptotic properties of supercritical branching processes. I: The Galton–Watson process // Adv. Appl. Probab. 1974. V. 6. P. 711–731.
6. *Bingham N.H., Doney R.A.* Asymptotic properties of supercritical branching processes. II: Crump–Mode and Jirina processes // Adv. Appl. Probab. 1975. V. 7. P. 66–82.
7. *Borovkov A.A., Borovkov K.A.* Asymptotic analysis of random walks: Heavy-tailed distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
8. *De Meyer A.* On a theorem of Bingham and Doney // J. Appl. Probab. 1982. V. 19. P. 217–220.
9. *Denisov D., Dieker A.V., Shneer V.* Large deviations for random walks under subexponentiality: The big-jump domain // Ann. Probab. 2008. V. 36. P. 1946–1991.

10. *Denisov D., Foss S., Korshunov D.* Asymptotics of randomly stopped sums in the presence of heavy tails // Bernoulli. 2010. V. 16. P. 971–994.
11. *Fleischmann K., Wachtel V.* Lower deviation probabilities for supercritical Galton–Watson processes // Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Stat. 2007. V. 43. P. 233–255.
12. *Fleischmann K., Wachtel V.* On the left tail asymptotics for the limit law of supercritical Galton–Watson processes in the Böttcher case // Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Stat. 2009. V. 45. P. 201–225.
13. *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. New York: Springer, 2011.
14. *Harris T.E.* Branching processes // Ann. Math. Stat. 1948. V. 19. P. 474–494.
15. *Harris T.E.* The theory of branching processes. Berlin: Springer, 1963.
16. *Нагаев С.В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10, №2. С. 231–254.
17. *Нагаев С.В., Вахтель В.И.* Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона // Теория вероятн. и ее примен. 2005. Т. 50, №2. С. 266–291.