УДК 519.21

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2003, том 6, № 2, 102–143

ОДНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА: ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРАМЕРА И ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Д. А. Коршунов

Рассматривается однородная во времени эргодическая цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой, имеющая асимптотически однородные на бесконечности скачки. Предполагается, что распределение «предельного» скачка ξ цепи $\{X_n\}$ имеет отрицательное среднее значение и удовлетворяет условию Крамера, т. е. уравнение $\mathbb{E}\, e^{\beta\xi} = 1$ имеет положительное решение β. Изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbb{P}\{X_n > x\}$ при $n \to \infty$, $x \to \infty$. В частности, выделяются зоны значений времени n, в которых эта вероятность асимптотически эквивалентна хвосту стационарного распределения.

Ключевые слова и фразы: веществennозначная цепь Маркова, вероятности больших уклонений, переходные явления, преобразование Крамера, инвариантное распределение.

§ 1. Введение

Пусть $P(x, B)$, $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, — некоторая однородная во времени переходная вероятность в $\mathbb{R}$; здесь и далее $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathbb{R}$. В настоящей работе параметр-время n принимает значения $0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и переходной вероятностью $P(\bullet\,, \bullet)$, т. е.

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} \in B \mid X_n = x\} = P(x, B).$$

Пусть π_n — распределение X_n: $\pi_n(B) = \mathbb{P}\{X_n \in B\}$. Обозначим через $\xi(x)$ случайную величину с тем же распределением, что и у скачка цепи $\{X_n\}$ из состояния x, а именно

$$\mathbb{P}\big\{x + \xi(x) \in B\big\} = P(x, B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00902 и 02–01–00358), фондов EPSRC (код проекта R58765/01) и INTAS (код проекта 00–265).

© Д. А. Коршунов; 2003

В данной статье рассматривается *асимптотически однородная (в пространстве) цепь Маркова* X_n, т. е. такая цепь, распределение скачка $\xi(x)$ которой имеет слабый предел при $x \to \infty$. Пусть распределение $\xi(x)$ слабо сходится к распределению F, и пусть ξ — случайная величина с распределением F. Предполагаем, что $\mathbb{E}\xi < 0$ и $\mathbb{P}\{\xi > 0\} > 0$.

Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda) \equiv \mathbb{E}e^{\lambda\xi}$ случайной величины ξ является выпуклой функцией, причем $\varphi(0) = 1$ и $\varphi'(0) = \mathbb{E}\xi < 0$. Поэтому множество $\{\lambda : \varphi(\lambda) \le 1\}$ представляет собой отрезок вида $[0, \beta]$, где $\beta = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) \le 1\}$. Поскольку $\mathbb{P}\{\xi > 0\} > 0$, число β конечно. В работе рассматривается *крамеровский случай*, когда $\beta > 0$ и $\varphi(\beta) = 1$.

Предполагаем, что X_n — эргодическая Харрисова цепь, имеющая единственное инвариантное распределение π. Тогда распределение X_n сходится при $n \to \infty$ к π в метрике полной вариации, т. е.

$$|\pi_n - \pi|(\mathbb{R}) \equiv 2 \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \bigl|\pi_n(B) - \pi(B)\bigr| \to 0 \tag{1}$$

(здесь и далее для любой знакопеременной меры μ и множества B через $|\mu|(B)$ обозначаем полную вариацию меры μ на множестве B). Для цепи X_n со счетным множеством состояний это имеет место автоматически, если цепь неразложимая, непериодическая и положительно возвратная; для вещественнозначных цепей соответствующие условия можно найти, например, в [2, 10].

Ввиду сходимости (1) семейство распределений X_n относительно компактно, т. е. $\sup_{n \ge 0} \mathbb{P}\{X_n > x\} \to 0$ при $x \to \infty$. В настоящей работе изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbb{P}\{X_n > x\}$ при $n \to \infty$, $x \to \infty$.

Простейшим и одновременно с тем очень важным примером цепи Маркова описанного типа является случайное блуждание W_n с задержкой в нуле (называемое в [3, 4] однородной в пространстве цепью Маркова), задаваемое рекуррентным равенством

$$W_{n+1} = (W_n + \xi_n)^+,$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots$ суть независимые копии случайной величины ξ. Положим $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ и $M_n = \max_{0 \le k \le n} S_k$. Известно (см. например, [7, гл. VI, § 9]), что распределение цепи W_n с нулевым начальным условием $W_0 = 0$ совпадает с распределением M_n, т. е.

$$\mathbb{P}\{W_n > x\} = \mathbb{P}\{M_n > x\}. \tag{2}$$

В частности, если $W_0 = 0$, то последовательность W_n является стохастически возрастающей и, следовательно, имеет слабый предел; обозначим

через W_∞ случайную величину с этим предельным распределением. Хорошо известна оценка, восходящая к Крамеру:

$$\mathbb{P}\{W_\infty > x\} \le e^{-\beta x}, \quad x \ge 0.$$

Если, кроме того, $\alpha \equiv \varphi'(\beta) = \mathbb{E}\,\xi e^{\beta\xi}$ конечно, то (см. [7, гл. XII, § 5; 8])

$$\mathbb{P}\{W_\infty > x\} \sim \frac{1-p}{\beta\widetilde{a}} e^{-\beta x} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{3}$$

где $p = \mathbb{P}\{M_\infty > 0\}$, $\widetilde{a} = \mathbb{E}\{S_\tau e^{\beta S_\tau}; \tau < \infty\}$, $\tau = \min\{n \ge 1 : S_n > 0\}$. Поскольку $\mathbb{E}\,\xi < 0$, то $p < 1$, а τ и S_τ — несобственные случайные величины.

Достационарные распределения W_n в случае существования абсолютно непрерывной компоненты у распределения ξ хорошо изучены А. А. Боровковым в [1]. Теоремы 7–11 этой работы дают асимптотические разложения для вероятности $\mathbb{P}\{\max_{0\le k\le n} S_k \ge x,\ S_n < x - y\}$ в широких зонах изменения значений n, x и y.

В [4] А. А. Боровковым и Д. А. Коршуновым обобщены результаты об асимптотическом поведении вероятности $\mathbb{P}\{W_n > x\}$ при $n \to \infty$, $x \to \infty$ на цепи Маркова со значениями на действительной оси, а именно изучен случай так называемой *U-частично однородной (в пространстве) цепи Маркова*, т. е. такой цепи, что для любого борелевского множества $B \subseteq (U, \infty)$ переходная вероятность $P(y, B)$ совпадает с вероятностью $\mathbb{P}\{y+\xi \in B\}$, когда y пробегает множество (U, ∞). Другими словами, в области (U, ∞) стохастическое поведение цепи X совпадает с процессом суммирования независимых случайных величин, имеющих общее распределение F.

Ранее автором были найдены условия, при которых хвост стационарного распределения π асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова убывает экспоненциальным образом подобно оценке (3) для хвоста распределения супремума частичных сумм (см. [2, § 27, теоремы 3–5]). Приведем соответствующие утверждения ввиду их особой важности для дальнейшего изложения. Начнем с принципа больших уклонений (грубой асимптотики), который справедлив в исключительно широких условиях. Следуя традициям, здесь и далее значения произвольной меры μ на множествах (x, y) и $(x, y]$ обозначаются через $\mu(x, y)$ и $\mu(x, y]$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть скачки асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова X_n удовлетворяют условию* $\sup_y \mathbb{E}\,e^{\beta\xi(y)} < \infty$, *и пусть* $\pi(y, \infty) > 0$ *при любом* y. *Тогда* $\ln \pi(x, \infty) \sim -\beta x$ *при* $x \to \infty$.

В [4, теорема 1] этот результат обобщен на достационарные распределения, доказан принцип больших уклонений для асимптотически однородной цепи Маркова.

Чтобы найти точную асимптотику вероятности $\pi(x,\infty)$, недостаточно знать, что цепь асимптотически однородна. Необходима дополнительная информация о скорости сближения распределения скачка $\xi(x)$ с предельным распределением F.

Теорема 2. *Пусть распределение F нерешетчато и скачки цепи X_n удовлетворяют условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t}\big|\mathbb{P}\big\{\xi(y)<t\big\}-\mathbb{P}\{\xi<t\}\big|\,dt\le\delta(y), \tag{4}$$

где $\delta(y)$ — правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$, т. е. $\delta(uy)\sim u^{-\alpha}\delta(y)$ при $y\to\infty$ и любом фиксированном $u>0$. Если

$$\int_0^{\infty}\delta(y)\,dy<\infty \tag{5}$$

(так что $\alpha\ge 1$), то хвост инвариантного распределения π имеет асимптотику

$$\pi(x,\infty)=ce^{-\beta x}+o\big(e^{-\beta x}\big)\quad\textit{при}\quad x\to\infty, \tag{6}$$

где

$$c=\frac{1}{\beta\mathbb{E}\,\xi e^{\beta\xi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(y)}-1\Big)e^{\beta y}\,\pi(dy)\in[0,\infty). \tag{7}$$

Если распределение F решетчато с шагом $\Delta>0$ и цепь X_n принимает значения на решетке $\{n\Delta,\ n\in\mathbb{Z}\}$, то

$$\pi(n\Delta)=c_\Delta e^{-\beta n\Delta}+o\big(e^{-\beta n\Delta}\big)\quad\textit{при}\quad n\to\infty, \tag{8}$$

где

$$c_\Delta=\frac{\Delta}{\mathbb{E}\,\xi e^{\beta\xi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(k\Delta)}-1\Big)e^{\beta k\Delta}\pi(k\Delta)\in[0,\infty). \tag{9}$$

В [2] приведены условия, достаточные для положительности константы c. Именно, если $\pi(y,\infty)>0$ и $\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(y)}\ge 1-\gamma(y)$ при всех y, где $\gamma(y)\ge 0$ и $\int_1^{\infty}\gamma(y)y(\ln y)\,dy<\infty$, то $c>0$.

Условие (5) означает, что, грубо говоря, скорость сближения распределений $\xi(x)$ и ξ должна быть интегрируемой функцией. В § 10 приведен пример, показывающий, что условия (4) и (5) в известном смысле необходимы для асимптотики (6).

В данной работе получена точная асимптотика вероятности $\mathbb{P}\{X_n>x\}$ при $n\to\infty$, $x\to\infty$ для асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова X_n при выполнении условий типа (4) и (5). Найдена зона значений времени n, в которой вероятность $\mathbb{P}\{X_n>x\}$ асимптотически эквивалентна хвосту $\pi(x,\infty)$ инвариантного распределения.

Несколько слов о технике доказательств. В [4] изучение U-частично однородной цепи основано на формуле полной вероятности по последнему попаданию в множество $(-\infty, U]$, а именно, на формуле

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big\{X_k \le U,\, X_j > U \ \text{ для любого } \ j \in [k+1, n],\, X_n > x\big\}.$$

Согласно марковскому свойству общее слагаемое в последней сумме равно

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big\{X_k \le U,\, X_j > U \text{ для любого } j \in [k+1, n],\, X_n > x\Big\} \\
&\quad = \int_{-\infty}^{U} \mathbb{P}\{X_k \in du\} \int_{U}^{\infty} P(u, dv) \\
&\qquad \times \mathbb{P}\Big\{X_j > U \text{ для любого } j \in [k+2, n],\, X_n > x \mid X_{k+1} = v\Big\}.
\end{aligned}$$

Поскольку цепь является U-частично однородной, стохастическое поведение цепи выше уровня U совпадает с процессом суммирования с общим распределением отдельного слагаемого F. Это обстоятельство позволяет использовать для вычисления последней вероятности теорему о вероятностях больших уклонений с запретами для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Для асимптотически однородной цепи данный подход неприемлем, поскольку в общем случае для *любого сколь угодно высокого* уровня U стохастическое поведение цепи выше этого выбранного уровня не может быть описано процессом суммирования независимых слагаемых. Поэтому предлагается использовать новую технику доказательства.

Очень кратко схема доказательства состоит в следующем. Сначала к исходной цепи применяется преобразование Крамера с соответствующим параметром. В результате получается некоторый объект, который мы называем марковской эволюцией масс. Основным отличием марковской эволюции масс от обычной цепи Маркова является то, что скачки первой могут иметь общую массу («вероятность»), отличную от единицы, в том числе и больше единицы. Далее развивается теория предельных теорем для марковской эволюции масс и для цепей Маркова, в том числе доказываются аналоги центральной предельной теоремы. После этого к марковской эволюции масс применяется обратное преобразование Крамера, что и позволяет вычислить асимптотику вероятности события $\{X_n > x\}$.

Работа организована следующим образом. Основными являются теоремы 6 и 7 (в § 6 и 8 соответственно) об асимптотике вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В § 2–5 развивается необходимая теория. В частности, в § 2 обсуждаются понятие и некоторые свойства марковской эволюции масс. В § 3 доказываются локальная предельная теорема и локальная теорема восстановления для асимптотически однородной цепи Маркова. Более тонким асимптотическим свойствам

распределения марковской эволюции масс посвящены § 4 и 5. Завершает работу § 10, в котором построен простой пример асимптотически однородной в пространстве цепи Маркова, демонстрирующий неулучшаемость основных условий теоремы 6, относящихся к интегрируемости скорости сходимости распределения $\xi(x)$ к ξ.

§ 2. Марковская эволюция масс

Цепь Маркова X_n с распределением π_n может рассматриваться как *марковская эволюция единичной массы* в пространстве $\mathbb{R}$. Именно, в момент времени $n = 0$ единичная масса распределена по пространству $\mathbb{R}$ в соответствии с законом π_0. В следующий момент времени $n = 1$ масса перераспределяется с соответствии с функцией перехода $P(\cdot, \cdot)$, т. е. из точки $u \in \mathbb{R}$ элемент массы распределяется по $\mathbb{R}$ в соответствии с законом $P(u, \cdot)$. Поэтому в момент времени $n = 1$ распределением совокупной единичной массы является π_1, т. е. масса любого измеримого множества $B \subseteq \mathbb{R}$ равна $\pi_1(B)$. И так далее, для любого момента времени n.

Введем понятие *обобщенного переходного ядра* $Q(u, B)$, $u \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, обладающего всеми свойствами обычного марковского переходного ядра за тем исключением, что функция $Q(u, \mathbb{R})$ аргумента u является лишь неотрицательной, не обязательно тождественно равной единице. Таким образом, допускаются значения $Q(u, \mathbb{R})$ как меньше, так и больше единицы. Ясно, что классическим марковским переходным ядром является функция

$$Q^*(u, B) = \frac{Q(u, B)}{Q(u, \mathbb{R})}.$$

Пусть в $\mathbb{R}$ задана некоторая неотрицательная мера Q_0. Тогда обобщенное переходное ядро $Q(u, B)$ порождает семейство неотрицательных мер $\{Q_n\}$, определяемых рекуррентным равенством

$$Q_{n+1}(B) = (Q_n Q)(B) \equiv \int_{\mathbb{R}} Q(u, B) Q_n(du), \quad n \geq 0.$$

Определим *марковскую эволюцию масс* (или просто *марковскую массу*) Y_n, соответствующую обобщенному переходному ядру $Q(\cdot, \cdot)$, следующим образом: в момент времени $n = 0$ масса $Q_0(\mathbb{R})$ распределена по $\mathbb{R}$ в соответствии с законом Q_0. Во временно́й переход $n \to n + 1$ элемент массы Y_n из состояния $u \in \mathbb{R}$ изменяется в $Q(u, \mathbb{R})$ раз и новый элемент массы Y_{n+1} распределяется по пространству в соответствии с мерой $Q(u, B)/Q(u, \mathbb{R})$. Следовательно, в любой момент времени n масса распределена в соответствии с законом $Q_n(\cdot)$, т. е. масса любого измеримого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ равна $Q_n(B)$. Если для классической цепи Маркова используется понятие значения цепи Маркова X_n в момент времени n, то

в случае марковской эволюции масс будем использовать понятие элемента массы Y_n в момент времени n и обозначение $\mathrm{Mes}\{Y_n \in B\}$ для массы множества B в момент времени n.

Отметим, что, вообще говоря, семейство конечномерных распределений масс $(Y_0, \dots, Y_n)$ не является согласованным, поскольку если, например, $Q(u, \mathbb{R}) \equiv 2$, то масса множества $B_0 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}$ ровно в два раза превосходит массу множества $B_0 \times \cdots \times B_n$. Поэтому, вообще говоря, не имеет места аналог формулы полной вероятности. Тем не менее при вычислении массы измеримого множества B в момент времени n можно «перебрать» все траектории элемента массы, приводящие в множество B, и «просуммировать» массы, переносимые вдоль этих траекторий в соответствии с обобщенным переходным ядром. Например, пусть даны два борелевских непересекающихся непустых множества B и B_1. Тогда для вычисления меры множества B в момент времени n справедлива следующая формула по последнему пребыванию элемента массы в множестве B_1:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mes}\{Y_n \in B\} &= \mathrm{Mes}\big\{Y_0 \notin B_1, \dots, Y_{n-1} \notin B_1,\, Y_n \in B\big\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{Mes}\big\{Y_k \in B_1,\, Y_{k+1} \notin B_1, \dots, Y_{n-1} \notin B_1,\, Y_n \in B\big\} \\ &\quad + \mathrm{Mes}\{Y_{n-1} \in B_1,\, Y_n \in B\}. \qquad (10)\end{aligned}$$

Отметим дополнительно, что здесь

$$\begin{aligned}&\mathrm{Mes}\Big\{Y_k \in B_1,\, Y_{k+1} \notin B_1,\, \dots,\, Y_{n-1} \notin B_1,\, Y_n \in B\Big\} \\ &\quad = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus B_1} Q(u_{n-1}, B) \int\limits_{\mathbb{R}\setminus B_1} Q(u_{n-2}, du_{n-1}) \cdots \int\limits_{\mathbb{R}\setminus B_1} Q(u_k, du_{k+1}) \int\limits_{B_1} Q_k(du_k).\end{aligned}$$

Обозначим через $\eta(u)$ скачок марковской эволюции масс Y_n из состояния u. По определению $\eta(u)$ — функция, заданная на некотором измеримом пространстве общей меры $Q(u, \mathbb{R})$, с обобщенным распределением $Q(u, u + \cdot)$. Таким образом, $\mathrm{Mes}\big\{u + \eta(u) \in B\big\} = Q(u, B)$.

2.1. *Числовые характеристики. Средним значением* функции Y, заданной на некотором измеримом пространстве конечной меры, назовем интеграл $\mathcal{E}Y = \int_{\mathbb{R}} yQ(dy)$, где Q — обобщенное распределение Y. Таким образом,

$$\mathcal{E}Y_n = \int_{\mathbb{R}} yQ_n(dy), \quad \mathcal{E}\eta(u) = \int_{\mathbb{R}} yQ(u, u + dy).$$

Заметим, что среднее значение является линейным функционалом, если рассматривается пространство функций, заданных на фиксированном про-

странстве с фиксированной мерой. Однако равенство

$$\mathcal{E}Y_{n+1} = \mathcal{E}Y_n + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}\,\eta(u) Q_n(dy),$$

вообще говоря, неверно. Например, если распределение скачка $\eta(u)$ не зависит от u и есть μ, то $\mathcal{E}Y_1 = \mathcal{E}Y_0 \cdot \mu(\mathbb{R}) + Q_0(\mathbb{R}) \cdot \mathcal{E}\,\eta$, а не $\mathcal{E}Y_1 = \mathcal{E}Y_0 + \mathcal{E}\,\eta$.

Тем не менее поведение во времени экспоненциальных моментов марковской эволюции масс, а именно преобразования Лапласа и характеристической функции, вполне аналогично поведению экспоненциальных моментов обычной цепи Маркова. Поскольку

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}e^{\lambda Y_{n+1}} &= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda y} Q_{n+1}(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda y} \int_{\mathbb{R}} Q(u, dy) Q_n(du) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda(u+z)} \int_{\mathbb{R}} Q(u, u+dz) Q_n(du),
\end{aligned}$$

справедливо равенство

$$\mathcal{E}e^{\lambda Y_{n+1}} = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda u} \mathcal{E}e^{\lambda \eta(u)} Q_n(du). \tag{11}$$

2.2. *Аналог неравенства Чебышева.* Для любой положительной возрастающей функции $f(u)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Mes}\{Y \geq y\} \leq \frac{\mathcal{E}\, f(Y)}{f(y)}.$$

В частности, для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\mathrm{Mes}\{Y \leq y\} = \mathrm{Mes}\{-Y \geq -y\} \leq e^{\lambda y} \mathcal{E}e^{-\lambda Y}. \tag{12}$$

2.3. *Преобразование Крамера над цепью Маркова: формула обращения.* Пусть X_n — вещественнозначная цепь Маркова с переходным ядром $P(u, B)$ и распределением π_n. Для любого $\lambda > 0$ определим обобщенное переходное ядро $P^{(\lambda)}(\bullet, \bullet)$ равенством

$$P^{(\lambda)}(u, dv) = e^{\lambda(v-u)} P(u, dv);$$

мера $P^{(\lambda)}(u, u+\bullet)$ является преобразованием Крамера над распределением $P(u, u+\bullet)$ с параметром λ. Кроме того, для любого n определим меру $\pi_n^{(\lambda)}$:

$$\pi_n^{(\lambda)}(du) = e^{\lambda u} \mathbb{P}\{X_n \in du\}.$$

Справедливо следующее рекуррентное равенство:

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}^{(\lambda)}(B) &= \int_B e^{\lambda v}\mathbb{P}\{X_{n+1}\in dv\}\\ &= \int_B e^{\lambda v}\int_{\mathbb{R}} P(u,dv)\mathbb{P}\{X_n\in du\}\\ &= \int_B\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda(v-u)}P(u,dv)e^{\lambda u}\mathbb{P}\{X_n\in du\}\\ &= \int_B\int_{\mathbb{R}} P^{(\lambda)}(u,dv)\pi_n^{(\lambda)}(du)\\ &= \int_{\mathbb{R}} P^{(\lambda)}(u,B)\pi_n^{(\lambda)}(du).\end{aligned}$$

Таким образом, марковская эволюция масс $X_n^{(\lambda)}$ с обобщенным переходным ядром $P^{(\lambda)}(\cdot,\cdot)$ имеет распределение $\pi_n^{(\lambda)}$, т. е.

$$\pi_n^{(\lambda)}(B) = \mathrm{Mes}\big\{X_n^{(\lambda)}\in B\big\}$$

для любых $n\ge 0$ и $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ввиду построения меры $\pi_n^{(\lambda)}$ справедлива следующая формула обращения:

$$\pi_n(B) = \int_B e^{-\lambda u}\pi_n^{(\lambda)}(du). \tag{13}$$

В более общем случае имеет место

Лемма 1. *Для любых* $n\in\mathbb{Z}^+$, $u_0,\dots,u_n\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\{X_0\in du_0,\dots,X_n\in du_n\} = e^{-\lambda u_n}\mathrm{Mes}\big\{X_0^{(\lambda)}\in du_0,\dots,X_n^{(\lambda)}\in du_n\big\}.$$

Доказательство вытекает из равенств

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{X_0\in du_0,\dots,X_n\in du_n\}\\ &\quad= \mathbb{P}\{X_0\in du_0\}P(u_0,du_1)\cdots P(u_{n-1},du_n)\\ &\quad= e^{-\lambda u_0}\mathrm{Mes}\big\{X_0^{(\lambda)}\in du_0\big\}e^{-\lambda(u_1-u_0)}P^{(\lambda)}(u_0,du_1)\\ &\qquad\cdots e^{-\lambda(u_n-u_{n-1})}P^{(\lambda)}(u_{n-1},du_n)\\ &\quad= e^{-\lambda u_n}\mathrm{Mes}\big\{X_0^{(\lambda)}\in du_0,\dots,X_n^{(\lambda)}\in du_n\big\}.\end{aligned}$$

§ 3. Локальная теорема восстановления для невозвратной цепи Маркова

Сначала сформулируем необходимые для дальнейшего изложения модификации локальных предельных теорем 7 (решетчатый случай) и 8 (нерешетчатый) из работы [6].

Пусть X_n^* является вещественнозначной цепью Маркова. Обозначим через $\xi^*(x)$ скачок этой цепи из состояния x.

Теорема 3. *Пусть скачки цепи X^* имеют общую миноранту $\underline{\zeta}$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется стохастическое неравенство*

$$\xi^*(x) \geq_{\mathrm{st}} \underline{\zeta}, \tag{14}$$

причем $\mathbb{E}\underline{\zeta} > 0$ и $\mathbb{D}\underline{\zeta} < \infty$. Пусть $\xi^*(x) \Rightarrow \xi^*$ при $x \to \infty$, имеют место соотношения

$$\mathbb{E}\,\xi^*(x) = \alpha + o\big(1/\sqrt{x}\,\big),$$
$$\mathbb{D}\xi^*(x) \to \sigma^2 > 0$$

и семейство $\big\{\big(\xi^*(x)\big)^2,\ x \in \mathbb{R}\big\}$ равномерно интегрируемо. Кроме того, допустим, что начальное распределение цепи удовлетворяет условию $\mathbb{P}\big\{X_0^* \leq -x\big\} = o\big(1/\sqrt{x}\,\big)$ при $x \to \infty$.

Если случайная величина ξ^* нерешетчатая и для любого $A > 0$ имеем

$$\sup_{|\lambda| \leq A} \left|\mathbb{E}\, e^{i\lambda\xi^*(x)} - \mathbb{E}\, e^{i\lambda\xi^*}\right| = o(1/x) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{15}$$

то для любого фиксированного $\Delta > 0$ при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\big\{X_n^* \in (x, x+\Delta]\big\} - \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(x-n\alpha)^2/2n\sigma^2}\right| = o\big(1/\sqrt{n}\,\big).$$

Если же цепь X_n^* принимает значения на решетке $\{\Delta k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\Delta > 0$, причем эта решетка минимальная и

$$\sup_{|\lambda| \leq \pi/\Delta} \left|\mathbb{E}\, e^{i\lambda\xi^*(k\Delta)} - \mathbb{E}\, e^{i\lambda\xi^*}\right| = o(1/k) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^+} \left|\mathbb{P}\{X_n^* = k\Delta\} - \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(k\Delta-n\alpha)^2/2n\sigma^2}\right| = o\big(1/\sqrt{n}\,\big).$$

Доказательство. Как отмечается в [6, § 4.2], условие (14) существования миноранты $\underline{\zeta}$ с положительным средним значением и конечной дисперсией вместе с условием на левый хвост начального распределения обеспечивают выполнение оценки

$$\mathbb{P}\{X_k^* \le k\mathbb{E}\underline{\zeta}/2 \ \text{ для некоторого } k \ge n\} = o\big(1/\sqrt{n}\,\big) \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теорем 7 и 8 из [6], что и завершает доказательство.

Определим меру восстановления, порожденную цепью Маркова X_n^*,

$$H(B) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_n^* \in B\}$$

и процесс восстановления

$$\widetilde{H}(B) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{X_n^* \in B\}.$$

Справедливо равенство $H(B) = \mathbb{E}\widetilde{H}(B)$.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие минорирования* (14), *причем* $\mathbb{E}\underline{\zeta} > 0$ *и* $\mathbb{E}\underline{\zeta}^2 < \infty$. *Тогда существует случайная величина* θ *с конечным средним значением такая, что* $\widetilde{H}(x, x+1] \le_{\mathrm{st}} \theta$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим суммы $\underline{Z}_n = \underline{\zeta}_1 + \cdots + \underline{\zeta}_n$, $\underline{Z}_0 = 0$, где $\underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \ldots$ суть независимые копии $\underline{\zeta}$. Поскольку среднее $\underline{\zeta}$ положительно, а второй момент конечен, имеем (см., например, [11, следствие 2.5])

$$\theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\big\{\underline{Z}_n \le 1\big\} < \infty, \ \ \mathbb{E}\,\theta < \infty. \tag{16}$$

Пусть $\tau(x) = \min\{n \ge 0 : X_n^* > x\}$ — марковский момент первого перескока цепью X_n^* через уровень x. Поскольку $\underline{\zeta}$ является минорантой для скачков, цепь Маркова X_n^* и последовательность $\underline{Z}_n$ можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что $X^*_{\tau(x)+n} \ge x + \underline{Z}_n$ для любого $n \ge 0$ с вероятностью 1. Поэтому

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(x, x+1] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\big\{X^*_{\tau(x)+n} \in (x, x+1]\big\} \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\big\{X^*_{\tau(x)+n} \le x+1\big\} \\
&\le_{\mathrm{st}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\big\{x + \underline{Z}_n \le x+1\big\},
\end{aligned}$$

что в сочетании с (16) влечет утверждение леммы.

Далее предполагаем также, что цепь X_n^* асимптотически однородна. Пусть F^* — предельное распределение величины $\xi^*(x)$, и пусть ξ^* — случайная величина с распределением F^*.

Теорема 4. *Пусть распределение F^* нерешетчато, $\alpha = \mathbb{E}\,\xi^*$ и скачки цепи X^* допускают миноранту $\underline{\zeta}$ и мажоранту $\overline{\zeta}$, т. е. для любого x выполняются стохастические неравенства*

$$\underline{\zeta} \le_{\mathrm{st}} \xi^*(x) \le_{\mathrm{st}} \overline{\zeta},$$

причем $\mathbb{E}\,\underline{\zeta} > 0$, $\mathbb{D}\underline{\zeta} < \infty$ и $\mathbb{E}\,\overline{\zeta} < \infty$. Тогда для любого $\Delta > 0$ имеем

$$\lim_{x\to\infty} H(x, x+\Delta] = \Delta/\alpha.$$

Если дополнительно $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi^* < \infty$ и имеет место локальная предельная теорема, т. е. при $n \to \infty$ справедливо равномерное по x соотношение

$$\mathbb{P}\big\{X_n^* \in (x, x+\Delta]\big\} = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(x-n\alpha)^2/2n\sigma^2} + o\big(1/\sqrt{n}\,\big),$$

то при $n \to \infty$, $x \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big\{X_k^* \in (x, x+\Delta]\big\} = \frac{\Delta}{\alpha}\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\right) + o(1).$$

Доказательство. Обозначим через $\tau(x)$ и $\chi(x)$ момент первого перескока и сам перескок цепью X_n^* через уровень x:

$$\tau(x) = \min\big\{n \ge 0 : X_n^* > x\big\}, \quad \chi(x) = X^*_{\tau(x)} - x.$$

Пусть $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ суть независимые копии случайной величины ξ^*. Положим $S_n^* = \xi_1^* + \cdots + \xi_n^*$. Обозначим через $\tau^*(x)$ и $\chi^*(x)$ момент первого перескока и сам перескок суммами S_n^* через уровень x:

$$\tau^*(x) = \min\big\{n \ge 0 : S_n^* > x\big\}, \quad \chi^*(x) = S^*_{\tau(x)} - x;$$

а также процесс восстановления — через

$$\widetilde{H}^*(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}\{S_n^* \in B\}.$$

Как известно (см., например, [11, теорема 2.3]), распределение перескока $\chi^*(x)$ слабо сходится при $x \to \infty$ к распределению перескока $\chi^*(\infty)$ через так называемый бесконечно удаленный уровень, причем распределение $\chi^*(\infty)$ является абсолютно непрерывным. Ввиду абсолютной непрерывности слабого предела перескока распределение $\widetilde{H}^*(x, x+\Delta]$ слабо сходится при $x \to \infty$ к некоторому распределению, скажем, G. В силу локальной теоремы восстановления для сумм независимых одинаково

распределенных величин (см., например, [7, гл. XI; 11, Appendix]) среднее значение распределения G равно Δ/α.

Условия теоремы 4 позволяют применить теорему 2.2 из [5], согласно которой распределение перескока $\chi(x)$ слабо сходится к распределению $\chi^*(\infty)$. Следовательно, распределение $\widetilde{H}(x, x+\Delta]$ слабо сходится к распределению G. Учитывая, что по лемме 3 семейство $\{\widetilde{H}(x, x+\Delta], x \in \mathbb{R}\}$ допускает интегрируемую мажоранту, получаем, что среднее значение $\widetilde{H}(x, x+\Delta]$ сходится при $x \to \infty$ к среднему значению G, т. е.

$$H(x, x+\Delta] \to \Delta/\alpha,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Если выполнена локальная предельная теорема, то для любых фиксированных чисел s и t, $s < t$, имеет место сходимость

$$\sum_{k=x/\alpha+s\sqrt{x}}^{x/\alpha+t\sqrt{x}} \mathbb{P}\{X_k^* \in (x, x+\Delta]\} - \sum_{k=x/\alpha+s\sqrt{x}}^{x/\alpha+t\sqrt{x}} \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} e^{-(x-k\alpha)^2/2k\sigma^2} \to 0$$

при $x \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{k=x/\alpha+s\sqrt{x}}^{x/\alpha+t\sqrt{x}} \mathbb{P}\{X_k^* \in (x, x+\Delta]\} \to \frac{\Delta}{\alpha}\Big(\Phi_{\sigma^2}\big(t\alpha^{3/2}\big) - \Phi_{\sigma^2}\big(s\alpha^{3/2}\big)\Big).$$

Последняя сходимость в совокупности с первым утверждением теоремы влечет второе. Теорема доказана.

В решетчатом случае утверждения теоремы 4 формулируются следующим образом: *если распределение F решетчатое с шагом $\Delta > 0$, то*

$$\lim_{k\to\infty} H(k\Delta) = \Delta/\alpha,$$

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}\{X_j^* = k\Delta\} = \frac{\Delta}{\alpha}\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - k\Delta}{\sqrt{k\Delta/\alpha}}\right) + o(1)$$

при $n \to \infty$ равномерно по k.

§ 4. Некоторые предварительные оценки распределения марковской эволюции масс

Рассматривается марковская эволюция масс $\{Y_n\}$ со скачками $\{\eta(x)\}$. Обозначим $Q_n(B) = \mathrm{Mes}\{Y_n \in B\}$ и $Q(x, B) = \mathrm{Mes}\{x + \eta(x) \in B\}$. Положим

$$\widehat{Q}(x) \equiv \sup_{y>x} Q(y, \mathbb{R}), \quad \widehat{Q} \equiv \sup_{y\in\mathbb{R}} Q(y, \mathbb{R}).$$

Прежде всего выясним условия на марковскую эволюцию масс, обеспечивающие ограниченность последовательности общих масс всего пространства.

Лемма 3. *Пусть* $Q_0(\mathbb{R}) < \infty$ *и* $\widehat{Q} < \infty$. *Если для некоторой последовательности уровней* x_n, $n \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(-\infty, x_n] < \infty, \tag{17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{q}(x_n) < \infty, \tag{18}$$

где

$$\widehat{q}(x) \equiv \sup_{y>x} \bigl|Q(y, \mathbb{R}) - 1\bigr|,$$

то последовательность общих мер ограничена:

$$\sup_{n\geq 0} Q_n(\mathbb{R}) < \infty;$$

и, более того, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\mathbb{R}) = Q \in [0, \infty).$$

Доказательство. Проверим индукцией по n неравенство

$$Q_{n+1}(\mathbb{R}) \leq Q_0(\mathbb{R}) \prod_{k=0}^{n} \widehat{Q}(x_k) + \widehat{Q} \sum_{k=0}^{n} Q_k(-\infty, x_k] \prod_{j=k+1}^{n} \widehat{Q}(x_j). \tag{19}$$

Имеем оценку

$$Q_{n+1}(\mathbb{R}) = \left(\int_{-\infty}^{x_n} + \int_{x_n}^{\infty}\right) Q(x, \mathbb{R}) Q_n(dx) \leq \widehat{Q} Q_n(-\infty, x_n] + \widehat{Q}(x_n) Q_n(\mathbb{R}).$$

Отсюда при $n = 0$ получаем неравенство

$$Q_1(\mathbb{R}) \leq \widehat{Q} Q_0(-\infty, x_0] + \widehat{Q}(x_0) Q_0(\mathbb{R}),$$

что обосновывает базу индукции. По индукционному предположению

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(\mathbb{R}) &\leq \widehat{Q} Q_n(-\infty, x_n] + \widehat{Q}(x_n) Q_n(\mathbb{R}) \\ &\leq \widehat{Q} Q_n(-\infty, x_n] \\ &\quad + \widehat{Q}(x_n) \left[Q_0(\mathbb{R}) \prod_{k=0}^{n-1} \widehat{Q}(x_k) + \widehat{Q} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(-\infty, x_k] \prod_{j=k+1}^{n-1} \widehat{Q}(x_j) \right] \\ &= Q_0(\mathbb{R}) \prod_{k=0}^{n} \widehat{Q}(x_k) + \widehat{Q} \sum_{k=0}^{n} Q_k(-\infty, x_k] \prod_{j=k+1}^{n} \widehat{Q}(x_j), \end{aligned}$$

что влечет индукционный переход.

Поскольку ряд (18) сходится, получаем

$$Q_{\sup} \equiv \sup_{n\ge 0} \prod_{k=0}^{n} \widehat{Q}(x_k) \le \sup_{n\ge 0} \prod_{k=0}^{n} \bigl(1 + \widehat{q}(x_k)\bigr) < \infty.$$

Отсюда и из (19) вытекает оценка

$$Q_{n+1}(\mathbb{R}) \le Q_0(\mathbb{R}) Q_{\sup} + \widehat{Q} Q_{\sup} \sum_{k=0}^{n} Q_k(-\infty, x_k], \tag{20}$$

влекущая первое утверждение леммы. Далее, для любого $n \ge 0$ имеем

$$\begin{aligned} \bigl|Q_{n+1}(\mathbb{R}) - Q_n(\mathbb{R})\bigr| &= \left| \left(\int_{-\infty}^{x_n} + \int_{x_n}^{\infty} \right) \bigl(Q(x, \mathbb{R}) - 1\bigr) Q_n(dx) \right| \\ &\le (\widehat{Q} + 1) Q_n(-\infty, x_n] + Q_n(\mathbb{R})\, \widehat{q}(x_n). \end{aligned}$$

Так как последовательность $Q_n(\mathbb{R})$ ограничена, из условий (17) и (18) следует фундаментальность последовательности $Q_n(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Допустим, что марковская эволюция масс принимает положительные значения. Пусть $\widehat{Q} < \infty$, и пусть при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ условие (18) выполнено для последовательности $x_k = k\varepsilon$. Если для некоторого $\lambda > 0$*

$$E_{\sup} \equiv \sup_{u>0} \mathcal{E} e^{-\lambda \eta(u)} < 1, \tag{21}$$

то найдется $\widehat{c} < \infty$ такое, что для любых $n \ge 0$ и начального распределения Q_0 имеет место оценка

$$Q_n(\mathbb{R}) \le \widehat{c}\bigl(Q_0(\mathbb{R}) + 1\bigr).$$

Доказательство. Ввиду равенства (11) имеем оценку

$$\begin{aligned} \mathcal{E} e^{-\lambda Y_n} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \mathcal{E} e^{-\lambda \eta(u)} \mathrm{Mes}\{Y_{n-1} \in dy\} \\ &\le E_{\sup} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \mathrm{Mes}\{Y_{n-1} \in dy\} \\ &= E_{\sup} \mathcal{E} e^{-\lambda Y_{n-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E} e^{-\lambda Y_n} \le \mathcal{E} e^{-\lambda Y_0} (E_{\sup})^n \le Q_0[0, \infty) (E_{\sup})^n.$$

Используя аналог экспоненциального неравенства Чебышева (12) при $y = n\varepsilon$, приходим к неравенству

$$\mathrm{Mes}\{Y_n \le n\varepsilon\} \le e^{\lambda n\varepsilon}\mathcal{E}e^{-\lambda Y_n} \le Q_0[0,\infty)\big(e^{\lambda\varepsilon}E_{\sup}\big)^n.$$

Поскольку $E_{\sup} < 1$, найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\delta \equiv e^{\lambda\varepsilon}E_{\sup} < 1. \tag{22}$$

При таком выборе ε выполнено условие (17) леммы 3. Утверждение леммы вытекает теперь из оценки (20).

В следующей лемме рассматривается марковская эволюция масс, не обладающая, вообще говоря, свойством (17). Невыполнение этого условия приводит к тому, что последовательность общих масс всего пространства может неограничено возрастать. Для обычной цепи Маркова это невозможно, поскольку если масса уходит вверх, то около начала координат масса исчезает. В случае же марковской эволюции масс скачки могут порождать массу, большую 1 и, соответственно, состояния около начала координат могут служить постоянным источником новой массы.

Лемма 5. *Пусть* $Q_0(\mathbb{R}) < \infty$, $\widehat{Q} < \infty$,

$$\sup_{n\ge 0} Q_n(-\infty, 0] < \infty$$

и при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ *условие* (18) *выполнено для последовательности* $x_k = k\varepsilon$. *Если для некоторого* $\lambda > 0$ *выполнено условие* (21), *то найдется* $\widehat{c} < \infty$ *такое, что для любых* $n \ge 0$ *и* $x > 0$ *имеет место оценка*

$$Q_n(-\infty, x] \le \widehat{c}\,(x+1).$$

Доказательство. Ввиду условия $\sup_n Q_n(-\infty, 0] < \infty$ необходимо и достаточно доказать, что для некоторого c_1

$$Q_n(0, x] \le c_1(x+1). \tag{23}$$

Воспользуемся формулой (10) по последнему попаданию в множество $(-\infty, 0]$:

$$Q_n(0,x] = \mathrm{Mes}\big\{Y_0 > 0, \ldots, Y_{n-1} > 0,\, Y_n \in (0,x]\big\} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Mes}\big\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0,\, \ldots,\, Y_{n-1} > 0,\, Y_n \in (0,x]\big\}.$$

В силу леммы 4 найдется $c_2 < \infty$ такое, что для любых $n \ge 0$ и $k < n$

$$\mathrm{Mes}\big\{Y_0 > 0, \ldots,\, Y_n > 0\big\} \le c_2,$$

$$\mathrm{Mes}\big\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0,\, \ldots,\, Y_n > 0\big\} \le c_2.$$

При этом вторая оценка вытекает из того факта, что значение меры

$$\mathrm{Mes}\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0\} \le Q_k(-\infty, 0]\widehat{Q}$$

ограничено равномерно по $k \ge 0$.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось (22). Если $n \le 2x/\varepsilon$, то утверждение леммы вытекает из неравенств

$$Q_n(0, x] \le nc_2 \le 2xc_2/\varepsilon.$$

Если же $n > 2x/\varepsilon$, то

$$Q_n(0, x] \le \sum_{k=0}^{n-x/\varepsilon} \mathrm{Mes}\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0, \ldots, Y_{n-1} > 0,\, Y_n \in (0, x]\} + xc_2/\varepsilon. \tag{24}$$

Оценим теперь k-е общее слагаемое суммы. Рассмотрим вспомогательную марковскую эволюцию масс Z_n, принимающую значения на положительной полуоси, у которой начальным распределением является мера

$$\mathrm{Mes}\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(0, \infty),$$

$\big($т. е. $\mathrm{Mes}\{Z_0 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Mes}\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0\} \le c_2\big)$, скачки которой из состояний выше начала координат имеют распределение $\mathrm{Mes}\{\eta(u) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}(0, \infty)$. Получаем неравенство

$$\mathrm{Mes}\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0,\, \ldots,\, Y_{n-1} > 0,\, Y_n \in (0, x]\} \le \mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \le x\}.$$

Как вытекает из леммы 4,

$$\mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \le (n-k-1)\varepsilon\} \le c_2\delta^{n-k-1},$$

причем $\delta < 1$. Следовательно, при $n > 2x/\varepsilon$ и $k \le n - x/\varepsilon$ $\big($т. е. $x \le (n-k)\varepsilon\big)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mes}\{Y_k \le 0,\, Y_{k+1} > 0,\, \ldots,\, Y_{n-1} > 0,\, Y_n \in (0, x]\} \\
&\quad \le \mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \le x\} \\
&\quad \le \mathrm{Mes}\{Z_{n-k-1} \le (n-k-1)\varepsilon\} \\
&\quad \le c_2\delta^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Окончательно

$$Q_n(0, x] \le c_2 \sum_{k=0}^{n-x/\varepsilon} \delta^{n-k-1} + xc_2/\varepsilon \le \frac{c_2}{1-\delta} + xc_2/\varepsilon.$$

Оценка (23), а вместе с ней и лемма доказаны.

§ 5. Аналог центральной предельной теоремы для марковской эволюции масс

Характеристическая функция суммы независимых слагаемых равна произведению характеристических функций самих слагаемых. Если рассматриваются не суммы, а цепь Маркова или, тем более, марковская эволюция масс, то характеристическая функция не есть произведение чего-либо ввиду неоднородности скачков. В следующей лемме выясняется, насколько поведение во времени характеристической функции марковской эволюции масс отличается от поведения характеристической функции процесса частичных сумм независимых слагаемых.

Рассмотрим марковскую эволюцию масс $\{Y_n\}$ со скачками $\{\eta_n(x)\}$. Обозначим $Q_n(B) = \mathrm{Mes}\{Y_n \in B\}$ и $Q(x,B) = \mathrm{Mes}\{x+\eta(x) \in B\}$. Пусть

$$\widehat{Q} \equiv \sup_{y\in\mathbb{R}} Q(y,\mathbb{R}) < \infty, \quad Q \equiv \sup_{n\geq 0} Q_n(\mathbb{R}) < \infty.$$

Лемма 6. *Пусть x_j — произвольная последовательность уровней в $\mathbb{R}$. Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $k \leq n$ и комплексного числа $\varphi \in \mathbb{C}$, $|\varphi| \leq 1$, справедливо неравенство*

$$\left|\mathcal{E}e^{i\lambda Y_n} - \varphi^{n-k}\mathcal{E}e^{i\lambda Y_k}\right| \leq (\widehat{Q}+1)\sum_{j=k}^{n-1} Q_j(-\infty, x_j] + Q\sum_{j=k}^{n-1}\varepsilon_j,$$

где

$$\varepsilon_j = \sup_{x>x_j}\left|\mathcal{E}e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\right|. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $j \in [k+1, n]$. В силу (11) имеем

$$\mathcal{E}e^{i\lambda Y_j} = \int_{\mathbb{R}} \big(\mathcal{E}e^{i\lambda\eta(x)}\big)e^{i\lambda x}Q_{j-1}(dx).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{E}e^{i\lambda Y_j} - \varphi\mathcal{E}e^{i\lambda Y_{j-1}}\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \big(\mathcal{E}e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\big)e^{i\lambda x}Q_{j-1}(dx)\right| \\
&\leq \left|\int_{x_{j-1}}^{\infty} \big(\mathcal{E}e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\big)e^{i\lambda x}Q_{j-1}(dx)\right| \\
&\quad + \left|\int_{-\infty}^{x_{j-1}} \big(\mathcal{E}e^{i\lambda\eta(x)} - \varphi\big)e^{i\lambda x}Q_{j-1}(dx)\right| \\
&\leq \varepsilon_{j-1}Q_{j-1}(\mathbb{R}) + \big(\widehat{Q}+1\big)Q_{j-1}(-\infty, x_{j-1}],
\end{aligned}$$

ввиду определения (25). Отсюда и из неравенства

$$\left|\mathcal{E}e^{i\lambda Y_n} - \varphi^{n-k}\mathcal{E}e^{i\lambda Y_k}\right| \le \sum_{j=k+1}^{n}\left|\varphi^{n-j}\mathcal{E}e^{i\lambda Y_j} - \varphi^{n-(j-1)}\mathcal{E}e^{i\lambda Y_{j-1}}\right| = \sum_{j=k+1}^{n}\left|\mathcal{E}e^{i\lambda Y_j} - \varphi\mathcal{E}e^{i\lambda Y_{j-1}}\right|$$

вытекает утверждение леммы.

В формуле (25) величина ε_j определена как максимальное отклонение значения характеристической функции скачка марковской массы от некоторого комплексного числа $\varphi \in \mathbb{C}$, $|\varphi| \le 1$, не по всем начальным состояниям из фазового пространства, а лишь на некотором множестве; мы собираемся применять эту лемму ниже в случае, когда соответствующие множества имеют меру, близкую к мере всей числовой прямой.

В следующей теореме выясняются достаточные условия, при которых марковская эволюция масс со значениями на неотрицательной полуоси $[0,\infty)$ в некотором смысле удовлетворяет центральной предельной теореме.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4 *и* $Q_0[0,\infty) < \infty$. *Предположим, что семейство квадратов скачков* $\{\eta^2(x),\, x \ge 0\}$ *равномерно интегрируемо. Если для некоторых* $\alpha > 0$ *и* $\sigma^2 > 0$ *выполняются соотношения*

$$\mathcal{E}\big(\eta(x) - \alpha\big) = o\big(1/\sqrt{x}\,\big), \tag{26}$$

$$\mathcal{E}\big(\eta(x) - \alpha\big)^2 \to \sigma^2 \tag{27}$$

при $x \to \infty$, *то распределение массы* $(Y_n - n\alpha)/\sqrt{n}$ *слабо сходится при* $n \to \infty$ *к нормальному закону с нулевым средним и дисперсией* σ^2, *т. е. для любого* $y \in \mathbb{R}$ *имеет место сходимость*

$$Q_n\big[0, n\alpha + y\sqrt{n}\,\big] \to Q\Phi_{\sigma^2}(y),$$

где $Q = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n(\mathbb{R})$.

Доказательство проведем с помощью метода характеристических функций, считая далее $\lambda \in \mathbb{R}$. Ввиду условия равномерной интегрируемости семейства квадратов скачков справедливо разложение

$$\mathcal{E}e^{i\lambda\left(\eta(x)-\alpha\right)} = Q(x,\mathbb{R}) + i\lambda\mathcal{E}\big(\eta(x)-\alpha\big) - \frac{\lambda^2}{2}\mathcal{E}\big(\eta(x)-\alpha\big)^2 + o(\lambda^2)$$

при $\lambda \to 0$ равномерно по x. Учитывая здесь условия (26) и (27), получаем неравенство

$$\left|\mathcal{E}e^{i\lambda\left(\eta(x)-\alpha\right)} - (1-\lambda^2\sigma^2/2)\right| \le \varepsilon(x,\lambda)\left(\lambda/\sqrt{x}+\lambda^2\right) + \left|Q(x,\mathbb{R})-1\right|,$$

где $\varepsilon(x,\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ и $x \to \infty$. Фиксируем произвольным образом $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. В силу последнего неравенства имеем

$$\left|\mathcal{E}e^{i\lambda\left(\eta(x)-\alpha\right)/\sqrt{n}} - (1-\lambda^2\sigma^2/2n)\right| \le \widetilde{\varepsilon}(n,x)/\sqrt{nj} + \widehat{q}(j\varepsilon),$$

где $\widetilde{\varepsilon}(n,x) \to 0$ при $n \to \infty$, $j \to \infty$ равномерно в области $x > j\varepsilon$. Применяя теперь к марковской эволюции масс $(Y_n - n\alpha)/\sqrt{n}$ лемму 6 при $\varphi = 1-\lambda^2\sigma^2/2n$ и $x_j = j\varepsilon$, получаем оценку

$$\left|\mathcal{E}e^{i\lambda\frac{Y_n-n\alpha}{\sqrt{n}}} - \left(1-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2n}\right)^{n-k}\mathcal{E}e^{i\lambda\frac{Y_k-k\alpha}{\sqrt{n}}}\right|$$
$$\le \left(\widehat{Q}+1\right)\sum_{j=k}^{n-1} Q_j[0,j\varepsilon] + Q\sum_{j=k}^{n-1}\left(\frac{o(1)}{\sqrt{nj}} + \widehat{q}(j\varepsilon)\right).$$

Поскольку выполнены условия леммы 4, величина Q конечна, а $Q_j[0,j\varepsilon] \le Q_0[0,\infty)\delta^j$, $\delta < 1$. Поэтому для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{R}$ разность

$$\left|\mathcal{E}e^{i\lambda\frac{Y_n-n\alpha}{\sqrt{n}}} - \left(1-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2n}\right)^{n-k}\mathcal{E}e^{i\lambda\frac{Y_k-k\alpha}{\sqrt{n}}}\right|$$

может быть сделана сколь угодно малой равномерно по всем $n > k$ выбором достаточно большого k. Для любого фиксированного k

$$\mathcal{E}e^{i\lambda\frac{Y_k-k\alpha}{\sqrt{n}}} \to Q_k(\mathbb{R})$$

при $n \to \infty$, а $Q_k(\mathbb{R}) \to Q$ при $k \to \infty$ по лемме 3. Поэтому, а также ввиду сходимости для всякого фиксированного k

$$\left(1-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda^2\sigma^2/2} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

имеет место сходимость

$$\mathcal{E}e^{i\lambda\frac{Y_n-n\alpha}{\sqrt{n}}} \to Qe^{-\lambda^2\sigma^2/2} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что завершает доказательство теоремы.

§ 6. Вероятности больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова

В данном параграфе рассматривается асимптотически однородная в пространстве цепь, т. е. $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$. Предполагается нерешетчатость распределения F случайной величины ξ; решетчатый случай обсуждается в § 8.

Как и ранее, число $\beta > 0$ определяется как решение уравнения $\varphi(\beta) = \mathbb{E}\, e^{\beta\xi} = 1$. Мера, определяемая равенством

$$F^{(\beta)}(du) = e^{\beta u} F(du), \tag{28}$$

является вероятностной. Пусть $\xi^{(\beta)}$ — случайная величина с распределением $F^{(\beta)}$. Предположим, что

$$\alpha \equiv \mathbb{E}\, \xi^{(\beta)} = \varphi'(\beta) \in (0, \infty),$$
$$\sigma^2 \equiv \mathbb{D}\, \xi^{(\beta)} = \varphi''(\beta) - \big(\varphi'(\beta)\big)^2 < \infty.$$

Теорема 6. *Пусть $\mathbb{E}\, e^{\beta X_0}$ конечно, и пусть семейство скачков $\big\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\big\}$ имеет стохастическую мажоранту $\bar{\xi}$ такую, что*

$$\mathbb{E}\, \bar{\xi}^2 e^{\beta\bar{\xi}} < \infty. \tag{29}$$

Предположим, что скачки цепи удовлетворяют следующим условиям:

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\, e^{\beta\xi(u)} > 0, \tag{30}$$

$$\mathbb{E}\, \xi(u) e^{\beta\xi(u)} = \alpha + o\big(1/\sqrt{u}\big) \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{31}$$

Кроме того, пусть для любого $A > 0$ найдется ограниченная убывающая интегрируемая на бесконечности функция $\delta(u) = o(1/u)$ такая, что для любого $u \in \mathbb{R}$ имеем

$$\sup_{\lambda \in [-A, A]} \Big| \mathbb{E}\, e^{(\beta + i\lambda)\xi(u)} - \mathbb{E}\, e^{(\beta + i\lambda)\xi} \Big| \le \delta(u). \tag{32}$$

Тогда справедливо соотношение

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} = c e^{-\beta x} \Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\right) + o\big(e^{-\beta x}\big)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \ge 0$, где

$$c = \frac{1}{\beta\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(y)} - 1\Big) e^{\beta y}\, \pi(dy) \in [0, \infty). \tag{33}$$

Условие (30) теоремы эквивалентно тому, что не существует последовательности точек $u_k \in \mathbb{R}$, для которой $\xi(u_k) \Rightarrow -\infty$ при $k \to \infty$.

В условиях теоремы не предполагается, что функция $\delta(u)$ правильно изменяется на бесконечности, как это предполагается в условии (4) теоремы 2; в этом отношении условие (32) слабее условия (4). Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\, e^{(\beta+i\lambda)\xi(u)} - \mathbb{E}\, e^{(\beta+i\lambda)\xi}\Big| \\
&\quad = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta+i\lambda)v} d_v\Big(\mathbb{P}\big\{\xi(u) < v\big\} - \mathbb{P}\{\xi < v\}\Big)\right| \\
&\quad = |\beta + i\lambda|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta+i\lambda)v}\Big(\mathbb{P}\big\{\xi(u) < v\big\} - \mathbb{P}\{\xi < v\}\Big)\, dv\right| \\
&\quad \le |\beta + i\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta v}\Big|\mathbb{P}\big\{\xi(u) < v\big\} - \mathbb{P}\{\xi < v\}\Big|\, dv,
\end{aligned}$$

то в качестве условия, достаточного для выполнения (32), можно предложить следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta v}\Big|\mathbb{P}\big\{\xi(u) < v\big\} - \mathbb{P}\{\xi < v\}\Big|\, dv \le \delta(u).$$

Из теоремы 6 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\widehat{y}(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$ имеет место равномерная по $n \ge x/\alpha_0 + \widehat{y}(x)\sqrt{x}$ асимптотика*

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} = e^{-\beta x}\big(c + o(1)\big).$$

Если $c > 0$, то в указанной зоне значений n справедлива эквивалентность

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} \sim \pi(x, \infty) \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Доказательство теоремы 6. Прежде всего отметим, что условие (32) при $\lambda = 0$ влечет соотношение

$$\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(u)} = 1 + O\big(\delta(u)\big) = 1 + o(1/u) \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{34}$$

Рассмотрим преобразование Крамера с параметром β над цепью X_n, т. е. введем в рассмотрение обобщенное переходное ядро

$$P^{(\beta)}(u, dv) = e^{\beta(v-u)} P(u, dv).$$

Пусть $X_n^{(\beta)}$ — марковская эволюция масс с обобщенным переходным ядром $P^{(\beta)}(\bullet\,, \bullet)$. Справедливо равенство

$$\pi_n^{(\beta)}(du) \equiv \mathrm{Mes}\big\{X_n^{(\beta)} \in du\big\} = e^{\beta u}\pi_n(du) \equiv e^{\beta u}\mathbb{P}\big\{X_n \in du\big\}.$$

Поскольку $\mathbb{E}\, e^{\beta X_0}$ конечно, то $\pi_0^{(\beta)}(\mathbb{R}) < \infty$. А в силу (34) скачки марковской эволюции масс $X_n^{(\beta)}$ имеют равномерно ограниченные общие массы, т. е.

$$\widehat{Q} \equiv \sup_{u\in\mathbb{R}} P^{(\beta)}(u, \mathbb{R}) < \infty.$$

Представим ядро $P^{(\beta)}$ в виде суммы переходной вероятности P^* и знакопеременного ядра P^{**} следующим образом:

$$P^*(x, \bullet) = \frac{P^{(\beta)}(x, \bullet)}{P^{(\beta)}(x, \mathbb{R})},$$

$$P^{**}(x, \bullet) = P^{(\beta)}(x, \bullet) - P^*(x, \bullet) = \frac{P^{(\beta)}(x, \mathbb{R}) - 1}{P^{(\beta)}(x, \mathbb{R})} P^{(\beta)}(x, \bullet).$$

Мера $P^{**}(x, \bullet)$ отрицательна в случае $P^{(\beta)}(x, \mathbb{R}) < 1$, положительна при $P^{(\beta)}(x, \mathbb{R}) > 1$ и тождественно равна 0 при $P^{(\beta)}(x, \mathbb{R}) = 1$. Поэтому полная вариация $|P^{**}|(u, B)$ меры $P^{**}(u, \bullet)$ на множестве B равна $\bigl|P^{**}(u, B)\bigr|$.

Отметим, что ядра $P(x, \bullet)$, $P^*(x, \bullet)$ и $P^{**}(x, \bullet)$ коммутируют.

Поскольку мера $\pi_n^{(\beta)}$ — результат n-кратного применения к мере $\pi_0^{(\beta)}$ ядра $P^{(\beta)}$, имеем $\pi_n^{(\beta)} = \pi_0^{(\beta)}(P^* + P^{**})^n$. Разлагая степень $(P^* + P^{**})^n$ в сумму по последнему применению ядра P^{**}, получаем равенство

$$(P^* + P^{**})^n = (P^*)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (P^* + P^{**})^k P^{**} (P^*)^{n-1-k}.$$

Отсюда выводим основное для дальнейшего анализа представление

$$\pi_n^{(\beta)} = \pi_0^{(\beta)} (P^*)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k^{(\beta)} P^{**} (P^*)^{n-1-k}. \tag{35}$$

Основная идея дальнейших рассуждений состоит в следующем. Так как последовательность мер $\pi_n^{(\beta)}(du)$ слабо сходится к мере $e^{\beta u}\pi(du)$, а хвост меры π имеет как правило экспоненциальную асимптотику с показателем $-\beta$, то слабый предел последовательности мер $\pi_n^{(\beta)}$ вдали от начала координат ведет себя как нормированная мера Лебега. В частности, (34) обеспечивает слабую компактность семейства мер $\bigl\{\pi_n^{(\beta)} P^{**}\bigr\}$. А n-я степень переходного ядра P^* удовлетворяет локальной предельной теореме. В совокупности это позволяет вычислить локальную асимптотику меры $\pi_n^{(\beta)}$.

Лемма 7. *Семейство мер* $\{\pi_k^{(\beta)}P^{**},\ k\geq 0\}$ *относительно компактно в том смысле, что при* $x\to\infty$

$$\sup_{k\geq 0}\left|\pi_k^{(\beta)}P^{**}\right|(-\infty,-x]=O\left(e^{-\beta x}\right),$$

$$\sup_{k\geq 0}\left|\pi_k^{(\beta)}P^{**}\right|(x,\infty)\to 0.$$

Кроме того, последовательность мер $\pi_k^{(\beta)}P^{**}$ *сходится при* $k\to\infty$ *в метрике полной вариации к мере* $\pi^{(\beta)}P^{**}$, *где* $\pi^{(\beta)}(du)\equiv\pi(du)e^{\beta u}$.

Учитывая, что $\left(\pi^{(\beta)}P^{**}\right)(\mathbb{R})$ равно

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}P^{**}(u,\mathbb{R})\pi^{(\beta)}(du)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(P^{(\beta)}(u,\mathbb{R})-P^{*}(u,\mathbb{R})\right)\pi^{(\beta)}(du)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(u)}-1\right)e^{\beta u}\pi(du),\end{aligned}\tag{36}$$

получаем

Следствие 2. *Значение константы* c *в* (33) *конечно.*

Что касается положительности константы c, то некоторые достаточные условия приведены сразу после теоремы 2. Отметим, что эти условия автоматически выполнены для частично однородной цепи с равномерно ограниченными моментами порядка $2+\varepsilon$ отрицательных частей скачков.

Доказательство леммы. Имеем неравенство

$$\left|\pi_k^{(\beta)}P^{**}\right|(B)\leq\int_{-\infty}^{\infty}|P^{**}|(u,B)\pi_k^{(\beta)}(du).\tag{37}$$

Из определения меры $P^{**}(u,\cdot)$ и условия (32) при $\lambda=0$ следует, что

$$\begin{aligned}|P^{**}|(u,B)&=\frac{\left|P^{(\beta)}(u,\mathbb{R})-1\right|}{P^{(\beta)}(u,\mathbb{R})}P^{(\beta)}(u,B)\\&=\frac{\left|\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(u)}-1\right|}{\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(u)}}P^{(\beta)}(u,B)\\&\leq\frac{\delta(u)}{\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(u)}}P^{(\beta)}(u,B),\end{aligned}\tag{38}$$

откуда ввиду (30) выводим оценку

$$|P^{**}|(u,B)\leq c_1P^{(\beta)}(u,B).\tag{39}$$

Мера $\pi_k^{(\beta)}$ является преобразованием Крамера с положительным параметром β над вероятностной мерой и, следовательно, допускает экспоненциальную оценку отрицательного хвоста вида $\pi_k^{(\beta)}(-\infty,-x] \le e^{-\beta x}$, $x>0$. Поэтому из (37) и (39) при $B=(-\infty,-x]$ вытекают оценки

$$\begin{aligned}\left|\pi_k^{(\beta)}P^{**}\right|(-\infty,-x] &\le c_1\int_{-\infty}^{\infty} P^{(\beta)}\big(u,(-\infty,-x]\big)\pi_k^{(\beta)}(du)\\ &= c_1\pi_{k+1}^{(\beta)}(-\infty,-x]\\ &\le c_1 e^{-\beta x}.\end{aligned}$$

Первая равномерная оценка леммы доказана.

Проверим теперь вторую равномерную сходимость, сформулированную в лемме. Фиксируем произвольно $\lambda\in(0,\beta)$; имеем $\mathbb{E}\,e^{\lambda\xi}<1$. Так как $\xi(u)\Rightarrow\xi$ при $x\to\infty$ и семейство величин $\{e^{\beta\xi(u)}\}$ равномерно интегрируемо, получаем $\mathbb{E}e^{\lambda\xi(u)}\to\mathbb{E}\,e^{\lambda\xi}<1$. Значит, найдется достаточно большое U такое, что

$$\sup_{u>U}\mathbb{E}\,e^{\lambda\xi(u)}<1. \tag{40}$$

Не ограничивая общности можно считать, что $U=0$. Тогда ввиду леммы 5 имеем

$$\sup_k \pi_k^{(\beta)}(-\infty,x]=O(x)\quad\text{при}\quad x\to\infty. \tag{41}$$

Из (39) ввиду (29) выводим, что при $u\le x$

$$\Big|P^{**}\big(u,(x,\infty)\big)\Big| \le c_1\frac{\mathbb{E}\,\bar\xi^2 e^{\beta\bar\xi}}{(x-u)^2}=\frac{c_2}{(x-u)^2}, \tag{42}$$

и из (38) заключаем, что при всех u и x

$$\Big|P^{**}\big(u,(x,\infty)\big)\Big| \le \frac{\delta(u)}{\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(u)}}P^{(\beta)}(u,\mathbb{R})=\delta(u). \tag{43}$$

Подставляя (42) и (43) в (37) при $B=(x,\infty)$, получаем

$$\left|\pi_k^{(\beta)}P^{**}\right|(x,\infty)\le c_3\int_{-\infty}^{x/2}(x-u)^{-2}\pi_k^{(\beta)}(du)+\int_{x/2}^{\infty}\delta(u)\pi_k^{(\beta)}(du). \tag{44}$$

Первый интеграл стремится к нулю при $x\to\infty$. Что касается второго интеграла, то интегрирование по частям дает равенство

$$\int_{x/2}^{\infty}\delta(u)\pi_k^{(\beta)}(du)=\delta(u)\pi_k^{(\beta)}[0,u]\Big|_{x/2}^{\infty}+\int_{x/2}^{\infty}\pi_k^{(\beta)}[0,u]d\big(-\delta(u)\big).$$

В силу (41) и соотношения $\delta(u) = o(1/u)$ первое слагаемое правой части последнего равенства стремится к нулю при $x \to \infty$ равномерно по k. На основании той же теоремы и убывания функции δ имеем равномерную по k оценку

$$\int_{x/2}^{\infty} \pi_k^{(\beta)}[0,u]d\big(-\delta(u)\big) \le c_4 \int_{x/2}^{\infty} ud\big(-\delta(u)\big).$$

Повторное интегрирование по частям и интегрируемость функции δ на бесконечности приводят к тому, что и второй интеграл в (44) стремится к нулю при $x \to \infty$ равномерно по k. Поэтому семейство мер $\pi_k^{(\beta)} P^{**}$ относительно компактно.

Слабая сходимость вытекает из сходимости по вариации последовательностей мер $\pi_k^{(\beta)}$ при $k \to \infty$ к мере $\pi^{(\beta)}$. Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы 6 проведем, наложив три дополнительных ограничения: условие существования миноранты для семейства скачков цепи с переходной вероятностью P^* $\big($см. (45)$\big)$, условие достаточно высокой скорости сходимости π_n к π $\big($см. (46)$\big)$ и условие абсолютной непрерывности распределения π_n относительно инвариантной меры π $\big($см. (47)$\big)$. Окончание доказательства теоремы в общем случае выделено в отдельный § 7.

Пусть $\xi^*(x)$ — скачок из состояния x цепи Маркова X_n^* с переходной вероятностью P^*, т. е. такая случайная величина, что $\mathbb{P}\big\{\xi^*(x) \in B\big\} = P^*(x, x+B)$. Так как $P^{(\beta)}(x, \mathbb{R}) \to 1$ при $x \to \infty$, по определению ядра P^* имеет место слабая сходимость

$$\xi^*(x) \Rightarrow \xi^{(\beta)} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Итак, предположим, что семейство скачков $\big\{\xi^*(x),\, x \in \mathbb{R}\big\}$ допускает миноранту $\underline{\zeta}$, имеющую положительное среднее значение и конечную дисперсию, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место стохастическое неравенство

$$\xi^*(x) \ge_{\mathrm{st}} \underline{\zeta}. \tag{45}$$

Пусть скорость сходимости в (1) достаточно высокая, а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\pi_n - \pi|(\mathbb{R}) < \infty. \tag{46}$$

Кроме того, предположим, что для любого n мера π_n абсолютно непрерывна относительно меры π, т. е. определена (неотрицательная) производная Радона — Никодима

$$f_n(u) \equiv \frac{d\pi_n}{d\pi}(u), \tag{47}$$

причем эта производная ограничена сверху числом $\rho < \infty$ равномерно по n и u. По определению преобразования Крамера имеем равенство

$$\frac{d\pi_n^{(\beta)}}{d\pi^{(\beta)}}(u) = \frac{d\pi_n}{d\pi}(u) = f_n(u).$$

Тогда мера $\pi_n P^{**}$ абсолютно непрерывна относительно меры πP^{**}, причем соответствующую знакопеременную плотность $f^{**}(u)$ можно оценить следующим образом:

$$\left|f_n^{**}(u)\right| \equiv \left|\frac{d\pi_n^{(\beta)}P^{**}}{d\pi^{(\beta)}P^{**}}(u)\right| \le \rho, \tag{48}$$

поскольку для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\pi_n^{(\beta)}P^{**}(B) &= \int_{\mathbb{R}} P^{**}(u,B) f_n(u)\pi^{(\beta)}(du)\\ &\le \rho \int_{\mathbb{R}} P^{**}(u,B)\pi^{(\beta)}(du) = \rho\pi^{(\beta)}P^{**}(B).\end{aligned}$$

Так как

$$\mathbb{P}\{\xi^*(x) > u\} = \frac{\operatorname{Mes}\{\xi^{(\beta)} > u\}}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(x)}} \le \frac{\operatorname{Mes}\{\bar{\xi}^{(\beta)} > u\}}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(x)}},$$

в силу условий (29) и (30) семейство случайных величин $\{\xi^*(x)\}$ имеет интегрируемую в квадрате мажоранту. Ввиду (31) и (34) находим

$$\mathbb{E}\,\xi^*(x) = \frac{\mathbb{E}\,\xi(x)e^{\beta\xi(x)}}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(x)}} = \frac{\alpha + o\big(1/\sqrt{x}\,\big)}{1+o(1/x)} = \alpha + o\big(1/\sqrt{x}\,\big) \ \text{ при } \ x \to \infty.$$

Из слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$, условий (29) и (34) вытекает, что

$$\mathbb{E}\big(\xi^*(x)\big)^2 = \frac{\mathbb{E}\big(\xi(x)\big)^2 e^{\beta\xi(x)}}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(x)}} \to \sigma^2 + \alpha^2 \ \text{ при } \ x \to \infty.$$

Для любого $A > 0$ при $x \to \infty$ из (32) и (34) следует соотношение

$$\sup_{\lambda\in[-A,A]} \left|\mathbb{E}\, e^{i\lambda\xi^*(x)} - \mathbb{E}\, e^{i\lambda\xi^{(\beta)}}\right| = \sup_{\lambda\in[-A,A]} \left|\frac{\mathbb{E}\, e^{(i\lambda+\beta)\xi(x)}}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(x)}} - \mathbb{E}\, e^{(i\lambda+\beta)\xi}\right| = O\big(\delta(x)\big).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 (включая наличие соответствующей миноранты), согласно которой для цепи X_n^* имеет место локальная предельная теорема. В частности, для любого фиксированного $\Delta > 0$ получаем

$$\sup_y \mathbb{P}\{X_n^* \in (y, y+\Delta]\} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{49}$$

Согласно равенству (35) имеем

$$\pi_n^{(\beta)}(y, y+\Delta] = \pi_0^{(\beta)}(P^*)^n(y, y+\Delta] + \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k^{(\beta)} P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y, y+\Delta].$$

В силу (49) слагаемое $\pi_0^{(\beta)}(P^*)^n(y, y+\Delta]$, а также любое (если зафиксировать k) из слагаемых $\pi_k^{(\beta)} P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y, y+\Delta]$ вносят в общую сумму пренебрежимо малый вклад $o(1)$ при $n \to \infty$ равномерно по y. Поэтому для любого фиксированного K имеем при $n \to \infty$ равномерное по y соотношение

$$\pi_n^{(\beta)}(y, y+\Delta] = \sum_{k=K}^{n-1} \pi_k^{(\beta)} P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y, y+\Delta] + o(1). \tag{50}$$

Напомним, что $\pi_k^{(\beta)} P^{**}$ сходится по вариации к мере $\pi^{(\beta)} P^{**}$ при $k \to \infty$ (см. лемму 7). Поэтому наша ближайшая цель — произвести эту замену меры в (50) и доказать, что при $n \to \infty$ равномерно по y выполняется соотношение

$$\pi_n^{(\beta)}(y, y+\Delta] = \sum_{k=0}^{n-1} \pi^{(\beta)} P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y, y+\Delta] + o(1). \tag{51}$$

Обоснуем переход от (50) к (51).

Для любого A имеем равенство

$$\begin{aligned}
&\pi_k^{(\beta)} P^{**}(P^*)^{n-1-k}(y, y+\Delta] \\
&\quad = \left(\int_{-\infty}^{A} + \int_{A}^{\infty}\right)(P^*)^{n-1-k}\big(u, (y, y+\Delta]\big)\big(\pi_k^{(\beta)} P^{**}\big)(du) \\
&\quad \equiv I_1(k, A) + I_2(k, A).
\end{aligned}$$

Исходя из (48), второй интеграл оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\big|I_2(k, A)\big| &= \left| \int_A^{\infty} (P^*)^{n-1-k}\big(u, (y, y+\Delta]\big) f_k^{**}(u)\big(\pi^{(\beta)} P^{**}\big)(du) \right| \\
&\le \rho \int_A^{\infty} (P^*)^{n-1-k}\big(u, (y, y+\Delta]\big)\big|\pi^{(\beta)} P^{**}\big|(du).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sup_n \left| \sum_{k=0}^{n-1} I_1(k, A) \right| &\le \rho \int_A^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (P^*)^{n-1-k}\big(u, (y, y+\Delta]\big)\big|\pi^{(\beta)} P^{**}\big|(du) \\
&\to \rho\big|\pi^{(\beta)} P^{**}\big|(A, \infty)\Delta/\alpha
\end{aligned}$$

по теореме 4. Таким образом,

$$\lim_{A\to\infty}\sup_n\left|\sum_{k=0}^{n-1} I_1(k,A)\right|\to 0. \tag{52}$$

Рассмотрим теперь интегралы $I_1(k,A)$ при *фиксированном* A. Имеем оценки

$$\begin{aligned}
&\left|I_1(k,A)-\int_{-\infty}^{A}(P^*)^{n-1-k}\big(u,(y,y+\Delta]\big)\big(\pi^{(\beta)}P^{**}\big)(du)\right|\\
&\quad\le\int_{-\infty}^{A}\big|\pi_k^{(\beta)}P^{**}-\pi^{(\beta)}P^{**}\big|(du)\\
&\quad=\big|\pi_k^{(\beta)}P^{**}-\pi^{(\beta)}P^{**}\big|(-\infty,A)\\
&\quad\le\big|\pi_k^{(\beta)}-\pi^{(\beta)}\big|(-\infty,A)\sup_{u\in\mathbb{R}}|P^{**}|(u,\mathbb{R})\\
&\quad\le e^{\beta A}|\pi_k-\pi|(-\infty,A)\sup_{u\in\mathbb{R}}|P^{**}|(u,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в силу (46) сумма

$$\sum_{k=K}^{n-1} I_1(k,A)$$

может быть сделана сколь угодно близкой к сумме

$$\sum_{k=K}^{n-1}\int_{-\infty}^{A}(P^*)^{n-1-k}\big(u,(y,y+\Delta]\big)\big(\pi^{(\beta)}P^{**}\big)(du)$$

равномерно по всем n выбором достаточно большого K. Вместе с (52) это обосновывает переход от (50) к (51).

Из (51) по теореме 4, принимая во внимание равенство (36) и следствие 2, выводим асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
\pi_n^{(\beta)}(y,y+\Delta] &= \big(\pi^{(\beta)}P^{**}\big)(\mathbb{R})\frac{\Delta}{\alpha}\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha-y}{\sqrt{y/\alpha}}\right)+o(1)\\
&= c\beta\Delta\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha-y}{\sqrt{y/\alpha}}\right)+o(1)\quad\text{при } y\to\infty,\ n\to\infty.
\end{aligned}\tag{53}$$

Применяя обратное преобразование Крамера (13) к марковской эволюции масс $X_n^{(\beta)}$, получаем

$$\mathbb{P}\{X_n>x\}=\int_x^\infty e^{-\beta y}\pi_n^{(\beta)}(dy).$$

Следовательно, для любого $\Delta > 0$ справедливы оценка сверху

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} \le \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta)} \pi_n^{(\beta)}(x + k\Delta, x + k\Delta + \Delta] \equiv s_1(\Delta)$$

и оценка снизу

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} \ge \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta+\Delta)} \pi_n^{(\beta)}(x + k\Delta, x + k\Delta + \Delta] \equiv s_2(\Delta).$$

Отношение $s_1(\Delta)/s_2(\Delta)$ оценки сверху к оценке снизу равно $e^{\beta\Delta}$ и стремится к 1 при $\Delta \to 0$. Для любого фиксированного $\Delta > 0$ выводим из (53) соотношение

$$\begin{aligned} s_1(\Delta) &= o(1) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta)} + c\Delta\beta \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta)} \Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - (x + k\Delta)}{\sqrt{(x + k\Delta)/\alpha}}\right) \\ &= o\big(e^{-\beta x}\big) + c\Delta\beta\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(x+k\Delta)} \\ &= o\big(e^{-\beta x}\big) + c\frac{\Delta\beta}{1 - e^{-\beta\Delta}} e^{-\beta x} \Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\right), \end{aligned}$$

что влечет асимптотику

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} = c\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha - x}{\sqrt{x/\alpha}}\right) e^{-\beta x} + o\big(e^{-\beta x}\big) \tag{54}$$

при $n \to \infty$, $x \to \infty$. При любом фиксированном n имеем $\mathbb{P}\{X_n > x\} = o\big(e^{-\beta x}\big)$. Поэтому (54) выполняется при $x \to \infty$ равномерно по $n \ge 0$.

Итак, утверждение теоремы доказано, но пока лишь при дополнительном предположении существования стохастической миноранты семейства скачков $\{\xi^*(x)\}$ и абсолютной непрерывности π_n относительно инвариантной меры π.

§ 7. Завершение доказательства теоремы 6

В этом параграфе строится вспомогательная цепь Маркова $\widetilde{Z}_n$, которая эквивалентна исходной цепи X_n с точки зрения вероятностей больших уклонений, но в то же время удовлетворяет дополнительным условиям, наложенным на цепь X_n в ходе доказательства в предыдущем параграфе.

По построению и условию (30) среднее

$$\mathbb{E}\Big\{ e^{\beta|\xi^{(\beta)}(u)|};\, \xi^{(\beta)}(u) \le 0 \Big\} = \frac{1}{P^{(\beta)}(u,\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{0} e^{-\beta y} \mathbb{P}\big\{\xi^{(\beta)}(u) \in dy\big\}$$
$$= \frac{1}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(u)}} \int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}\big\{\xi(u) \in dy\big\}$$
$$\le \frac{1}{\mathbb{E}\, e^{\beta\xi(u)}}$$

представляет собой величину, ограниченную равномерно по $u \in \mathbb{R}$. В частности, квадраты отрицательных частей случайных величин $\xi^{(\beta)}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, равномерно интегрируемы. В совокупности со слабой сходимостью $\xi^{(\beta)}(u) \Rightarrow \xi^{(\beta)}$ это влечет существование уровня $U \in \mathbb{R}$ такого, что семейство $\big\{\xi^{(\beta)}(u),\, u > U\big\}$ имеет миноранту с положительным средним значением и конечным вторым моментом. Выберем U настолько большим, чтобы выполнялось (40) и $\inf_{n\ge 0} \mathbb{P}\{X_n \le U\} > 0$.

Укрупним цепь X_n, объединив состояния на полуоси $(-\infty, U]$ в одно состояние U. А именно, рассмотрим цепь Маркова Z_n со значениями на полуоси $[U,\infty)$, с начальным состоянием $Z_0 = \max\{U, X_0\}$ и со следующими *неоднородными во времени* переходными вероятностями $P_{Z,n}$:

$$P_{Z,n}(u,B) = P_Z(u,B) = P(u,B), \quad \text{если} \quad u > U \text{ и } B \subseteq (U,\infty);$$
$$P_{Z,n}\big(u,\{U\}\big) = P_Z\big(u,\{U\}\big) = P\big(u,(-\infty,U]\big), \quad \text{если} \quad u > U;$$
$$P_{Z,n}(U,B) = \frac{1}{\mathbb{P}\{X_n \le U\}} \int_{-\infty}^{U} P(u,B)\mathbb{P}\{X_n \in du\}, \quad \text{если} \quad B \subseteq (U,\infty);$$
$$P_{Z,n}\big(U,\{U\}\big) = \frac{1}{\mathbb{P}\{X_n \le U\}} \int_{-\infty}^{U} P\big(u,(-\infty,U]\big)\mathbb{P}\{X_n \in du\}.$$

Отметим, что неоднородность во времени наблюдается исключительно у переходных вероятностей из состояния U, да и то ввиду сходимости по вариации (1) имеет место асимптотическая однородность при $n \to \infty$:

$$P_{Z,n}(U,B) \to \frac{1}{\pi(-\infty,U]} \int_{-\infty}^{U} P(u,B)\pi(du), \quad \text{если} \quad B \subseteq (U,\infty);$$
$$P_{Z,n}\big(U,\{U\}\big) \to \frac{1}{\pi(-\infty,U]} \int_{-\infty}^{U} P\big(u,(-\infty,U]\big)\pi(du).$$

По построению начального распределения Z_0 и переходных вероятностей цепи Z_n имеем равенства

$$\mathbb{P}\{Z_n = U\} = \mathbb{P}\{X_n \le U\},$$
$$\mathbb{P}\{Z_n > x\} = \mathbb{P}\{X_n > x\} \quad \text{при} \quad x > U.$$

Наряду с цепью Z_n рассмотрим также цепь $\widetilde{Z}_n$ с атомом в точке U и начальным состоянием $\widetilde{Z}_0 = U$, переходные вероятности $\widetilde{P}(u, \cdot)$ которой совпадают с $P_Z(u, \cdot)$ при $u > U$, а из точки $u = U$ равны

$$\widetilde{P}(U, B) = \frac{1}{\pi(-\infty, U]} \int_{-\infty}^{U} P(u, B)\pi(du), \quad \text{если} \quad B \subseteq (U, \infty);$$

$$\widetilde{P}\big(U, \{U\}\big) = \frac{1}{\pi(-\infty, U]} \int_{-\infty}^{U} P\big(u, (-\infty, U]\big)\pi(du).$$

Переходные вероятности цепи $\widetilde{Z}_n$ однородны во времени. Инвариантная мера $\widetilde{\pi}$ этой цепи совпадает с мерой π на множестве (U, ∞), а $\widetilde{\pi}\big(\{U\}\big) = \pi(-\infty, U]$. Скачки $\widetilde{\xi}(u)$ цепи $\widetilde{Z}_n$ допускают миноранту с положительным средним и конечной дисперсией. Эта цепь с атомом является геометрически эргодической (см., например, [10, § 15]), поэтому $|\pi_n - \pi|(\mathbb{R}) = o(r^n)$ для некоторого $r < 1$ и выполнено условие (46). Кроме того, для любого $B \in \mathcal{B}(U, \infty)$ имеем равенство

$$\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_n \in B\big\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_k = U\big\}\mathbb{P}\Big\{\widetilde{Z}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}_{n-1} > U,\, \widetilde{Z}_n \in B \;\Big|\; \widetilde{Z}_k = U\Big\}.$$

Поэтому, с одной стороны,

$$\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_n \in B\big\} \le \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\Big\{\widetilde{Z}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}_{n-1} > U,\, \widetilde{Z}_n \in B \;\Big|\; \widetilde{Z}_k = U\Big\},$$

а с другой стороны, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_m \in B\big\} \ge \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\Big\{\widetilde{Z}_{k+1} > U, \ldots, \widetilde{Z}_{m-1} > U,\, \widetilde{Z}_m \in B \;\Big|\; \widetilde{Z}_k = U\Big\}.$$

Значит, для любых $n < m$ мера $\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_n \in \cdot\big\}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_m \in \cdot\big\}$ и соответствующая плотность не превосходит $1/\varepsilon$. Отсюда для любого n мера $\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_n \in \cdot\big\}$ абсолютно непрерывна и относительно меры $\widetilde{\pi}$ с плотностью, также не превосходящей $1/\varepsilon$.

Таким образом, цепь $\widetilde{Z}_n$ удовлетворяет каждому из трех дополнительных условий (45)–(47) предыдущего параграфа. Следовательно, при $x \to \infty$ справедлива равномерная по $n \ge 0$ эквивалентность

$$\mathbb{P}\big\{\widetilde{Z}_n > x\big\} = \widetilde{c}\,\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{x - n\alpha}{\sqrt{x/\alpha}}\right) e^{-\beta x} + o\big(e^{-\beta x}\big), \tag{55}$$

где

$$\widetilde{c} = \frac{1}{\alpha\beta}\int_U^\infty \Big(\mathbb{E}\, e^{\beta\widetilde{\xi}(u)} - 1\Big) e^{\beta u}\widetilde{\pi}(du)$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta}\left(\int_{U+0}^\infty \Big(\mathbb{E}\, e^{\beta\left(u+\widetilde{\xi}(u)\right)} - e^{\beta u}\Big)\pi(du) + \Big(\mathbb{E}\, e^{\beta\left(U+\widetilde{\xi}(U)\right)} - e^{\beta U}\Big)\pi(-\infty, U]\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^\infty \Big(\mathbb{E}\, f\big(u+\xi(u)\big) - f(u)\Big)\pi(du); \tag{56}$$

здесь $f(u) = \max\big\{e^{\beta U}, e^{\beta u}\big\}$. Значения функции $g(u) = e^{\beta u} - f(u)$ заключены в пределах от $-e^{\beta U}$ до 0. Поэтому если цепь X_n находится в стационарном режиме, т. е. X_n имеет распределение π, то $\mathbb{E}\, g(X_{n+1}) = \mathbb{E}\, g(X_n)$. Следовательно, справедливо *тождество равновесия*:

$$\int_{-\infty}^\infty \Big(\mathbb{E}\, g\big(u+\xi(u)\big) - g(u)\Big)\pi(du) = 0.$$

Деля это равенство на $\alpha\beta$ и складывая затем с (56), получаем окончательное представление для константы $\widetilde{c}$:

$$\widetilde{c} = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^\infty \Big(\mathbb{E}\, e^{\beta\left(u+\xi(u)\right)} - e^{\beta u}\Big)\pi(du).$$

Пусть $Z_n^{(\beta)}$ и $\widetilde{Z}_n^{(\beta)}$ — марковские эволюции масс, полученные из цепей Z_n и $\widetilde{Z}_n$ соответственно преобразованием Крамера с параметром β. Проанализируем меры $\mathrm{Mes}\big\{Z_n^{(\beta)} \in \bullet\big\}$ и $\mathrm{Mes}\big\{\widetilde{Z}_n^{(\beta)} \in \bullet\big\}$ с точки зрения формулы по последнему попаданию в точку U. Что касается первой меры, то имеем

$$\mathrm{Mes}\Big\{Z_n^{(\beta)} \in [y, y+\Delta)\Big\}$$
$$= \mathrm{Mes}\Big\{Z_0^{(\beta)} > U, \dots, Z_{n-1}^{(\beta)} > U,\ Z_n^{(\beta)} \in [y, y+\Delta)\Big\} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Mes}\Big\{Z_k^{(\beta)} = U\Big\}$$
$$\times\, \mathrm{Mes}\Big\{Z_{k+1}^{(\beta)} > U, \dots, Z_{n-1}^{(\beta)} > U,\ Z_n^{(\beta)} \in [y, y+\Delta) \;\Big|\; Z_k^{(\beta)} = U\Big\}. \tag{57}$$

Напомним, что выполняется (40). Ввиду центральной предельной теоремы 5 значение

$$\mathrm{Mes}\Big\{Z_0^{(\beta)} > U, \dots, Z_{n-1}^{(\beta)} > U,\ Z_n^{(\beta)} \in [y, y+\Delta)\Big\},$$

а также при любом фиксированном k значение

$$\mathrm{Mes}\Big\{Z_{k+1}^{(\beta)} > U, \dots, Z_{n-1}^{(\beta)} > U,\ Z_n^{(\beta)} \in [y, y+\Delta) \;\Big|\; Z_k^{(\beta)} = U\Big\}$$

суть величины порядка $o(1)$ при $n \to \infty$ равномерно по y. Поэтому замена любого конечного (по k) набора переходных вероятностей из числа $P^{(\beta)}_{Z,k}(U, \bullet)$ вероятностями $\widetilde{P}^{(\beta)}(U, \bullet)$ изменяет значение $\operatorname{Mes}\{Z^{(\beta)}_n \in (y, y+\Delta]\}$ на величину порядка $o(1)$. Учитывая также, что при $k \to \infty$

$$\operatorname{Mes}\{Z^{(\beta)}_k = U\} = e^{\beta U}\mathbb{P}\{Z_k = U\} \to e^{\beta U}\pi(-\infty, U],$$

из (57) выводим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Mes}&\Big\{Z^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\Big\} \\ &= o(1) + e^{\beta U}\pi(-\infty, U]\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Mes}\Big\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_{k+1} > U, \dots, \widetilde{Z}^{(\beta)}_{n-1} > U, \\ &\qquad\qquad \widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta) \mid \widetilde{Z}^{(\beta)}_k = U\Big\}\end{aligned}$$

при $n \to \infty$ равномерно по y. По тем же соображениям находим такое же соотношение для однородной во времени марковской последовательности масс $\widetilde{Z}^{(\beta)}_n$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Mes}&\Big\{\widetilde{Z}(\beta)_n \in [y, y+\Delta)\Big\} \\ &= o(1) + e^{\beta U}\pi(-\infty, U]\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Mes}\Big\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_{k+1} > U, \dots, \widetilde{Z}^{(\beta)}_{n-1} > U, \\ &\qquad\qquad \widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta) \mid \widetilde{Z}^{(\beta)}_k = U\Big\}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Mes}\Big\{Z^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\Big\} = \operatorname{Mes}\Big\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in [y, y+\Delta)\Big\} + o(1).$$

Применяя обратное (т. е. с параметром $-\beta$, см. лемму 1) преобразование Крамера к мерам $\operatorname{Mes}\{Z^{(\beta)}_n \in \bullet\}$ и $\operatorname{Mes}\{\widetilde{Z}^{(\beta)}_n \in \bullet\}$, получаем при $n \to \infty$ равномерное по x соотношение

$$\mathbb{P}\{Z_n > x\} = \mathbb{P}\{\widetilde{Z}_n > x\} + o(1),$$

которое вместе с (55) завершает доказательство теоремы.

§ 8. Решетчатый случай

Пусть X_n — цепь Маркова со значениями на решетке $\{k\Delta,\ k \in \mathbb{Z}\}$ с шагом $\Delta > 0$, причем эта решетка минимальна. Рассмотрим асимптотически однородную цепь, т. е. $\xi(k\Delta) \Rightarrow \xi$ при $k \to \infty$; значения величины ξ пропорциональны Δ. Сформулируем соответствующую теорему о вероятностях больших уклонений.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbb{E}\,e^{\beta X_0}$ *конечно. Предположим, что семейство скачков* $\{\xi(k\Delta),\ k\in\mathbb{Z}\}$ *имеет стохастическую мажоранту* $\bar\xi$ *такую, что* $\mathbb{E}\,\bar\xi^2 e^{\beta\bar\xi}<\infty$. *Пусть скачки цепи удовлетворяют следующим условиям*:

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(k\Delta)}>0,$$

$$\mathbb{E}\,\xi(k\Delta)e^{\beta\xi(k\Delta)}=\alpha+o(1/\sqrt{k})\ \ \textit{при}\ \ k\to\infty.$$

Кроме того, допустим, что найдется ограниченная убывающая суммируемая на бесконечности последовательность $\delta(k)=o(1/k)$ *такая, что для любого* $k\in\mathbb{Z}$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{\lambda\in[-\pi/\Delta,\pi/\Delta]}\left|\mathbb{E}\,e^{(\beta+i\lambda)\xi(k\Delta)}-\mathbb{E}\,e^{(\beta+i\lambda)\xi}\right|\le\delta(k).$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{X_n=m\Delta\}=c_\Delta e^{-\beta m\Delta}\Phi_{\sigma^2}\left(\frac{n\alpha-m\Delta}{\sqrt{m\Delta/\alpha}}\right)+o\big(e^{-\beta m\Delta}\big)$$

при $m\to\infty$ *равномерно по* $n\ge0$, *где*

$$c_\Delta=\frac{\Delta}{\mathbb{E}\,\xi e^{\beta\xi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(k\Delta)}-1\Big)e^{\beta k\Delta}\pi(k\Delta)\in[0,\infty).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в нерешетчатом случае. Единственное отличие порождается решетчатым вариантом локальной теоремы восстановления, что и сказывается присутствием другого постоянного множителя в итоговой асимптотике вероятности $\mathbb{P}\{X_n\ge m\Delta\}$.

§ 9. О положительности постоянного множителя *c* в теореме 6

Как уже отмечалось сразу после теоремы 2, константа

$$c\equiv\frac{1}{\beta\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(y)}-1\Big)e^{\beta y}\,\pi(dy)\tag{58}$$

положительна, если $\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(y)}\ge1-\gamma(y)$, где $\gamma(y)\ge0$ при любом y и

$$\int_0^\infty\gamma(y)y\ln y\,dy<\infty.$$

В следующей теореме это условие несколько ослабляется. При этом доказательство является существенно усовершенствованным вариантом доказательства теоремы 5 из [2, § 27].

Теорема 8. *Пусть цепь X_n асимптотически однородна в пространстве, т. е. $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \to \infty$. Предположим, что $\mathbb{E}\,\xi < 0$ и существует $\beta > 0$ такое, что $\mathbb{E}\,e^{\beta\xi} = 1$. Пусть $\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(y)} \geq 1 - \gamma(y)$, где $\gamma(y)$ — неотрицательная монотонно убывающая функция, $\gamma(y) = o(1/y)$ при $y \to \infty$ и*

$$\int_0^\infty \gamma(y)y\,dy < \infty. \tag{59}$$

Допустим, что π — произвольное вероятностное инвариантное распределение цепи X_n такое, что $\pi(y,\infty) > 0$ при любом y и $\pi(y,\infty) = O\bigl(e^{-\beta y}\bigr)$ при $y \to \infty$. Тогда константа c, определяемая равенством (58), больше нуля.

Доказательство. Докажем сначала, что в условиях теоремы имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\beta u}\pi(du) = \infty. \tag{60}$$

Укрупним цепь X_n, усреднив состояния на полуоси $(-\infty, U]$ в соответствии с мерой π и объединив их в одно состояние U. А именно, рассмотрим цепь Маркова $X_{U,n}$ со значениями на полуоси $[U,\infty)$ и со следующими переходными вероятностями P_U:

$$P_U(y,B) = P(y,B), \quad \text{если} \quad y > U \text{ и } B \subseteq (U,\infty);$$

$$P_U\bigl(y,\{U\}\bigr) = P\bigl(y,(-\infty,U]\bigr), \quad \text{если} \quad y > U;$$

$$P_U(U,B) = \frac{1}{\pi(-\infty,U]}\int_{-\infty}^U P(u,B)\pi(du), \quad \text{если} \quad B \subseteq (U,\infty);$$

$$P_U\bigl(U,\{U\}\bigr) = \frac{1}{\pi(-\infty,U]}\int_{-\infty}^U P\bigl(u,(-\infty,U]\bigr)\pi(du).$$

По построению переходных вероятностей P_U инвариантная мера π_U цепи $X_{U,n}$ совпадает с мерой π на множестве (U,∞), а $\pi_U\bigl(\{U\}\bigr)$ равно $\pi(-\infty,U]$. При любом $y > U$ скачок $\xi_U(y)$ цепи $X_{U,n}$ удовлетворяет стохастическому неравенству

$$\xi_U(y) \geq_{\mathrm{st}} \xi(y). \tag{61}$$

Выберем уровень U настолько большим, чтобы при любом $u > U$ выполнялось неравенство

$$u\Bigl(\mathbb{E}\,e^{\beta\xi(u)} - 1\Bigr) + \mathbb{E}\,\xi(u)e^{\beta\xi(u)} > 0. \tag{62}$$

Такой выбор возможен, поскольку $\gamma(u) = o(1/u)$ и

$$\liminf_{u\to\infty} \mathbb{E}\,\xi(u)e^{\beta\xi(u)} \geq \mathbb{E}\,\xi e^{\beta\xi} \in (0,\infty]$$

ввиду слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$.

Предположим теперь, что интеграл в (60) конечен. Тогда для любого $\lambda \in [0, \beta]$ среднее приращение экспоненты $e^{\lambda X_{U,n}}$ за один шаг в стационарном состоянии π_U равно нулю, т. е. справедливо следующее *тождество равновесия*:

$$\int_U^\infty e^{\lambda u}\Big(\mathbb{E}\, e^{\lambda \xi_U(u)} - 1\Big)\pi_U(du) = 0. \tag{63}$$

Продифференцировав это равенство по λ, получим для любого $\lambda \in [0, \beta]$:

$$\int_U^\infty e^{\lambda u} u\Big(\mathbb{E}\, e^{\lambda \xi_U(u)} - 1\Big)\pi_U(du) + \int_U^\infty e^{\lambda u}\mathbb{E}\,\xi_U(u) e^{\lambda \xi_U(u)}\pi_U(du) = 0.$$

Полагая $\lambda = \beta$, приходим к равенству

$$\int_U^\infty e^{\beta u}\Big[u\Big(\mathbb{E}\, e^{\beta \xi_U(u)} - 1\Big) + \mathbb{E}\,\xi_U(u) e^{\beta \xi_U(u)}\Big]\pi_U(du) = 0,$$

чего не может быть ввиду (62), (61) и $\pi(U, \infty) > 0$. Таким образом, (60) доказано.

Далее, предположим, что $c = 0$ в (58). Тогда, как отмечалось при подсчете константы $\widetilde{c}$ в (56), *для любого* уровня U справедливо тождество равновесия (63) при $\lambda = \beta$. Следовательно,

$$\Big(\mathbb{E}\, e^{\beta \xi_U(U)} - 1\Big) e^{\beta U}\pi(-\infty, U] = \int_{U+0}^\infty \Big(1 - \mathbb{E}\, e^{\beta \xi_U(u)}\Big) e^{\beta u}\pi(du). \tag{64}$$

По определению переходных вероятностей P_U выражение в левой части тождества равно

$$e^{\beta U}\int_{-\infty}^U \mathbb{E}\,\max\Big\{0, e^{\beta\left(u+\xi(u)-U\right)} - 1\Big\}\pi(du).$$

Поскольку $\xi(u) \Rightarrow \xi$, найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при всех достаточно больших U выполняется $\mathbb{E}\max\big\{0, e^{\beta\left(u+\xi(u)-U\right)} - 1\big\} \geq \delta$ для любого $u \in (U - \varepsilon, U]$ и соответственно

$$\Big(\mathbb{E}\, e^{\beta \xi_U(U)} - 1\Big) e^{\beta U}\pi(-\infty, U] \geq \delta e^{\beta U}\pi(U - \varepsilon, U]. \tag{65}$$

В силу (61) и условий теоремы правая часть (64) не превосходит

$$\int_{U+0}^\infty \gamma(y) e^{\beta y}\pi(dy) \leq \bar{c}\int_{U+1}^\infty \gamma(y)dy \tag{66}$$

при некотором $\bar{c} < \infty$. Подставляя (65) и (66) в (64), приходим к неравенству

$$e^{\beta U}\pi(U - \varepsilon, U] \leq \frac{\bar{c}}{\delta}\int_{U+1}^\infty \gamma(y)dy. \tag{67}$$

Поскольку это верно для всех достаточно больших U, из условия (59) вытекает конечность экспоненциального момента с показателем β распределения π, что противоречит (60). Таким образом, предположение $c = 0$ привело к противоречию, и теорема доказана.

Условие (59) можно существенно ослабить, наложив более сильные моментные ограничения на скачки цепи X_n. Если, например, цепь имеет ограниченные скачки, т. е. если найдется постоянная $A < \infty$ такая, что $|\xi(y)| \le A$ почти наверное для любого y, то достаточно выполнения условия

$$\int_0^\infty \gamma(y) y^\mu \, dy < \infty \tag{68}$$

для некоторого $\mu > 0$. Для доказательства заметим, что в этом случае

$$\int_1^\infty \frac{e^{\beta u}}{u^{1-\mu}} \pi(du) = \infty. \tag{69}$$

Действительно, поскольку средний снос $v_\lambda(y) \equiv \mathbb{E}\, V_\lambda\big(y + \xi(y)\big) - V_\lambda(y)$ пробной функции $V_\lambda(y) = e^{\lambda y} y^{\mu-1} \mathbf{I}\{y > 1\}$ при $y > 1 + A$ равен

$$\frac{e^{\lambda y}}{y^{1-\mu}} \left(\mathbb{E}\, e^{\lambda \xi(y)} \left(\frac{1}{1 + \xi(y)/y} \right)^{1-\mu} - 1 \right),$$

при условии ограниченности скачков имеем

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dv_\lambda(y)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\beta} &= \frac{y e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \left(\mathbb{E}\, e^{\beta \xi(y)} - 1 - \frac{1-\mu}{y} \mathbb{E}\, \xi(y) e^{\beta \xi(y)} + O(1/y^2) \right) \\
&\qquad + \frac{e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \Big(\mathbb{E}\, \xi(y) e^{\beta \xi(y)} + O(1/y) \Big) \\
&= \frac{y e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \left(o(1/y) - \frac{1-\mu}{y} \mathbb{E}\, \xi e^{\beta \xi} + O(1/y^2) \right) \\
&\qquad + \frac{e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \Big(\mathbb{E}\, \xi e^{\beta \xi} + O(1/y) \Big) \\
&= \frac{e^{\beta y}}{y^{1-\mu}} \Big(o(1) + \mu \mathbb{E}\, \xi e^{\beta \xi} \Big), \quad y \to \infty,
\end{aligned}$$

что является величиной положительной при больших y. Как отмечалось в предыдущем доказательстве, этого достаточно для проверки (69). Далее,

умножая (67) на $U^{\mu-1}$ и суммируя, приходим к неравенствам

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\beta(U+k\varepsilon)}}{(U+k\varepsilon)^{1-\mu}} \pi\big(U+(k-1)\varepsilon, U+k\varepsilon\big]$$
$$\le \frac{\bar{c}}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(U+k\varepsilon)^{1-\mu}} \int_{U+k\varepsilon+1}^{\infty} \gamma(y)dy$$
$$\le c^* \int_U^{\infty} \gamma(y) y^{\mu} dy$$

при некотором $c^* < \infty$. В силу условия (68) это влечет конечность интеграла в (69). Данное противоречие и завершает доказательство.

§ 10. О необходимости условия интегрируемости скорости сближения распределения скачка с предельным

В заключение мы построим пример цепи Маркова, показывающий, что условие (32), относящееся к скорости сходимости распределения скачка к предельному распределению F, существенно до такой степени, что может считаться практически необходимым.

Рассмотрим цепь Маркова X_n со значениями в $\mathbb{Z}^+$. Предположим, что цепь непрерывна как сверху, так и снизу, т. е. за один шаг значение цепи меняется не более чем на единицу. Обозначим

$$p(k,k-1) \equiv \mathbb{P}\big\{X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k\big\}, \quad k \ge 1,$$
$$p(k,k+1) \equiv \mathbb{P}\big\{X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k\big\}, \quad k \ge 0,$$
$$p(0,0) \equiv \mathbb{P}\big\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0\big\}.$$

Предположим, что

$$p(k,k-1) + p(k,k+1) = 1, \quad p(0,0) + p(0,1) = 1,$$

а также

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p(j,j+1)}{p(j+1,j)} < \infty.$$

Известно (см., например, [9, гл. 3, § 7]), что последнее условие необходимо и достаточно для эргодичности такой цепи. Обозначим через $\big\{\pi(k),\ k \in \mathbb{Z}^+\big\}$ стационарные вероятности этой цепи. Особая простота системы уравнений

$$\pi(k+1)p(k+1,k) + \pi(k-1)p(k-1,k) = \pi(k), \quad k \ge 1,$$
$$\pi(1)p(1,0) + \pi(0)p(0,0) = \pi(0),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) = 1$$

для стационарных вероятностей $\{\pi(k)\}$ позволяет вычислить последние в явном виде (см. также [9, гл. 3, § 7]):

$$\pi(k) = \pi(0) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p(j, j+1)}{p(j+1, j)}, \quad k \geq 1,$$

где

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p(j, j+1)}{p(j+1, j)} \right)^{-1}.$$

Пусть $p(k, k+1) \to p$ и, соответственно, $p(k, k-1) \to 1-p$ при $k \to \infty$, так что предельное распределение F является распределением Бернулли с параметром p, а преобразование Лапласа равно

$$\varphi(\lambda) = pe^{\lambda} + (1-p)e^{-\lambda}.$$

Чтобы цепь была эргодичной, предполагаем, что $p < 1/2$. Единственное ненулевое решение β уравнения $\varphi(\lambda) = 1$ имеет вид

$$\beta = \ln \frac{1-p}{p} > 0.$$

При сделанных предположениях условие (32) интегрируемости скорости сходимости к предельному распределению для построенной цепи эквивалентно тому, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bigl| p(k) - p \bigr| < \infty. \tag{70}$$

Теорема 9. *Пусть $\varepsilon(k) \equiv p(k, k+1) - p \geq 0$ для любого k. Тогда следующие два утверждения эквивалентны*:

(а) *найдется такое $c > 0$, что стационарные вероятности имеют асимптотику*

$$\pi(k) \sim ce^{-\beta k} \quad \textit{при } k \to \infty;$$

(б) *выполнено условие* (70).

Доказательство. Имеем

$$\pi(k) = \pi(0) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p + \varepsilon(j)}{1 - p - \varepsilon(j+1)} = \pi(0) \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 + \bigl(\varepsilon(j)/(p)\bigr)}{1 - \bigl(\varepsilon(j+1)/(1-p)\bigr)}.$$

Учитывая определение β, получаем

$$\pi(k) = \pi(0) e^{-\beta k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 + \bigl(\varepsilon(j)/(p)\bigr)}{1 - \bigl(\varepsilon(j+1)/(1-p)\bigr)}.$$

Поэтому утверждение (а) теоремы эквивалентно тому, что

$$\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1+\big(\varepsilon(j)/(p)\big)}{1-\big(\varepsilon(j+1)/(1-p)\big)} < \infty.$$

В свою очередь, для этого необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1+\big(\varepsilon(j)/(p)\big)}{1-\big(\varepsilon(j+1)/(1-p)\big)} - 1\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\big(\varepsilon(j)/(p)\big)+\big(\varepsilon(j+1)/(1-p)\big)}{1-\big(\varepsilon(j+1)/(1-p)\big)}$$

сходился. Поскольку $\varepsilon(j) \to 0$, это эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon(j+1)}{1-p} + \frac{\varepsilon(j)}{p}\right),$$

что, в свою очередь, эквивалентно (70). Теорема доказана.

Литература

1. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // *Сиб. мат. журн.* 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
2. *Боровков А. А.* *Эргодичность и устойчивость случайных процессов.* М.: Эдиториал УРСС, 1999; Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.
3. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. I: Стационарные распределения // *Теория вероятностей и ее применения.* 1996. Т. 41, № 1. С. 3–30.
4. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. II: Достационарные распределения в экспоненциальном случае // *Теория вероятностей и ее применения.* 2000. Т. 45, № 3. С. 437–468.
5. *Боровков А. А., Фосс С. Г.* Оценки для перескока случайного блуждания через произвольную границу и их применения // *Теория вероятностей и ее применения.* 1999. Т. 44, № 2. С. 249–277.
6. *Коршунов Д. А.* Предельные теоремы для общих цепей Маркова // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42, № 2. С. 354–371.
7. *Феллер В.* *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. М.: Мир, 1984.

8. *Cramér H. Collective Risk Theory: A Survey of Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes.* Stockholm: Scandia Insurance Company, 1955.

9. *Karlin S., Taylor H. M. A First Course in Stochastic Processes* / 2nd edition. New York; London, etc: Academic Press, 1975.

10. *Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability.* London; Berlin, etc: Springer–Verlag, 1993.

11. *Woodroofe M. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis* / CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. V. 39. Philadelphia, Pa: SIAM, 1982.

Коршунов Дмитрий Алексеевич

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: korshunov@math.nsc.ru

Статья поступила
12 февраля 2003 г.