ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ МАКСИМУМОВ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СРЕДНИМ И СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Д. А. КОРШУНОВ*

Аннотация. Рассматриваются суммы $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин с отрицательным средним значением. В случае сильно субэкспоненциального распределения слагаемых найдена асимптотика вероятности того, что максимум сумм $\max(S_1, \dots, S_n)$ превзойдет большой уровень x. Полученные утверждения об асимптотике этой вероятности имеют равномерный по всем значениям n характер.

Ключевые слова и фразы. Максимумы сумм случайных величин, однородная цепь Маркова, вероятности больших уклонений, субэкспоненциальное распределение, второй хвост распределения

1. Введение. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с общим распределением F на вещественной прямой $\mathbf{R}$; $F((-\infty, 0]) < 1$. Обозначим $F(x) = F((-\infty, x))$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Вообще, для любой меры G через $\overline{G}(x) = G([x, \infty))$ обозначаем хвост этой меры. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и

$$M_n = \max\,\{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Предполагаем, что существует $\mathbf{E}\xi$, причем $\mathbf{E}\xi < 0$; положим $a = |\mathbf{E}\xi|$. По усиленному закону больших чисел $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$ почти наверное, и, следовательно, семейство распределений максимумов M_n, $n \geqslant 1$, слабо компактно.

Основной задачей настоящей работы является изучение асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\}$ при $x \to \infty$ в случае, когда отдельное слагаемое имеет распределение F типа субэкспоненциального; нас интересуют как фиксированные значения временного параметра n, так и случай неограниченно возрастающего n. Точнее, будут получены утверждения об асимптотическом поведении вероятности $\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\}$, равномерные по n.

Напомним определения некоторых классов функций и распределений, используемых в дальнейшем изложении.

Определение 1. *Функция f называется* локально степенной, *если для всякого фиксированного t отношение $f(x+t)/f(x)$ стремится к 1 при $x \to \infty$. Говорим, что распределение G локально степенное, если функция $\overline{G}(x)$ локально степенная.*

Определение 2. *Говорят, что распределение G в $\mathbf{R}^+$ с неограниченным носителем принадлежит классу $\mathcal{S}$ (является* субэкспоненциальным *распределением), если хвост свертки $\overline{G{*}G}(x)$ эквивалентен $2\overline{G}(x)$ при $x \to \infty$.*

В [4] показано, что субэкспоненциальное распределение G обязательно локально степенное. Достаточные условия принадлежности распределения классу $\mathcal{S}$ можно найти, например, в [4], [10]. Класс $\mathcal{S}$ включает в себя, в частности, следующие распределения: (а) распределение Парето с хвостом $\overline{G}(x) = (\varkappa/x)^\alpha$, $x \geqslant \varkappa$, где $\varkappa > 0$, $\alpha > 0$; (б) логнормальное распределение с плотностью $g(x) = e^{-(\ln x - \ln \alpha)^2/2\sigma^2}/x\sigma\sqrt{2\pi}$, $x > 0$, где $\sigma > 0$, $\alpha > 0$; (в) распределение Вейбулла с хвостом $\overline{G}(x) = e^{-x^\alpha}$, $x \geqslant 0$, где $\alpha \in (0,1)$.

*Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск (korshunov@math.nsc.ru).

Пусть G — произвольное распределение в $\mathbf{R}$ с неограниченным справа носителем и конечным средним значением. Для любого $t > 0$ введем в рассмотрение распределение G_t в $\mathbf{R}^+$ такое, что

$$\overline{G_t}(x) = \min\Big(1, \int_x^{x+t} \overline{G}(u)\,du\Big), \quad x > 0 \tag{1.1}$$

(здесь и всюду в дальнейшем под интегралом в пределах от x_1 до x_2 понимается интеграл по множеству $[x_1, x_2)$). Семейство распределений $\{G_t,\ t > 0\}$ является стохастически возрастающим семейством.

Определение 3. *Будем говорить, что субэкспоненциальное распределение G является* сильно субэкспоненциальным (*и писать $G \in \mathcal{S}_*$), если отношение $\overline{G_t * G_t}(x)/\overline{G_t}(x)$ стремится к 2 при $x \to \infty$ равномерно по $t \in [1, \infty]$.*

По определению $\mathcal{S}_* \subseteq \mathcal{S}$. Возможно класс $\mathcal{S}_*$ совпадает с классом субэкспоненциальных распределений с конечным средним значением, однако мы не располагаем доказательством этого факта. Как отмечается в [7], неясно даже влечет ли принадлежность $G \in \mathcal{S}$ субэкспоненциальность распределения G_∞. Достаточные условия принадлежности распределения классу $\mathcal{S}_*$ приведены в п. 3. Там же проверено, что распределения Парето (при $\alpha > 1$), логнормальное и Вейбулла удовлетворяют этим условиям и, следовательно, являются сильно субэкспоненциальными.

Определим случайную последовательность $X = \{X_n\}$ равенством

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+. \tag{1.2}$$

Она образует однородную по времени цепь Маркова, являющуюся случайным блужданием с задержкой в нуле. Хорошо известно (см., например, [3, гл. VI, § 9]), что распределение цепи X в момент времени n при нулевом начальном условии $X_0 = 0$ совпадает с распределением M_n, т. е.

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} = \mathbf{P}\{X_n \geqslant x \mid X_0 = 0\}. \tag{1.3}$$

Поэтому изучение асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\}$ равносильно изучению асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{X_n \geqslant x \,|\, X_0 = 0\}$. Отметим, что конечномерные распределения последовательностей $\{M_n\}$ и $\{X_n\}$ не совпадают.

В работе [11] доказано, что если распределение F_∞ на полупрямой $\mathbf{R}^+$ является субэкспоненциальным, то хвост распределения супремума сумм эквивалентен второму хвосту распределения отдельного слагаемого, т.е. при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{n \geqslant 1} S_n \geqslant x\Big\} \sim \frac{1}{a}\int_x^\infty \overline{F}(u)\,du. \tag{1.4}$$

В [8] показано, что субэкспоненциальность распределения F_∞ является необходимым условием для справедливости асимптотики (1.4).

В [9] рассмотрен случай фиксированного значения n и доказано, что если распределение случайной величины $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ субэкспоненциальное, то $\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \sim n\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$.

В настоящей работе показано, что имеет место следующая

Theorem. *Пусть распределение случайной величины $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ сильно субэкспоненциальное. Тогда*

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} = \frac{1 + \varepsilon_n(x)}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(u)\,du,$$

где $\varepsilon_n(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *равномерно по* $n \geqslant 1$.

Утверждение теоремы вытекает из лемм 1 и 9, доказанных в пп. 2 и 6 соответственно.

Как нам стало известно, после написания настоящей работы аналогичная эквивалентность установлена другими методами в [5, теорема 6] в случае, когда $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ и функция $\overline{F}(u)$ правильно меняется на бесконечности.

Относительно более ранних результатов следует отметить статьи [2] и [1]. В работе [2] рассмотрен случай, когда функция $\overline{F}(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \in (-\infty, -2)$. Полагая присутствующую в теореме 2 этой работы функцию $g(t)$ равной $1+at/\gamma$, а x равным γn, можно вывести оттуда для любого фиксированного $\gamma > 0$ асимптотику

$$\mathbf{P}\{S_k \geqslant \gamma n \text{ для некоторого } k \leqslant n\} \sim n\mathbf{P}\{\xi \geqslant \gamma n\}\, c_\alpha,$$

где $c_\alpha = \int_0^1 [g(t)]^{-\alpha} dt$. Эта асимптотика совпадает с предлагаемой нами, если положить $x = \gamma n$.

Такая же, как и в [2], форма ответа в случае $\alpha \in (-2, -1)$ приведена в [1].

2. Оценка снизу для вероятностей больших уклонений максимума сумм. В следующей лемме при минимальных ограничениях на распределение F вероятность $\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\}$ оценивается снизу при больших значениях x.

Лемма 1. *Пусть распределение* F *локально степенное. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* x_1 *такое, что при* $x \geqslant x_1$ *и* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{a} \int_x^{x+na} \overline{F}(u)\, du.$$

Proof. Ввиду равенства (1.3) достаточно доказать соответствующее утверждение для цепи (1.2) с нулевым начальным состоянием $X_0 = 0$. Как отмечалось выше, семейство максимумов $\{M_n,\ n \geqslant 1\}$ ограничено по вероятности. Поэтому семейство $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ также ограничено по вероятности, т.е. имеет место сходимость

$$\inf_{n \geqslant 1} \mathbf{P}\{X_n < x\} \longrightarrow 1 \quad \text{при } x \to \infty. \tag{2.1}$$

Рассмотрим событие A_{in}, $i \in [1, n]$, состоящее в том, что $X_{i-1} < x$ и $X_j \geqslant x$ для любого $j \in [i, n]$. Поскольку события A_{in}, $i \in [1, n]$, не пересекаются, а их объединение равно событию $\{X_n \geqslant x\}$, то по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant x\} = \mathbf{P}\{A_{1n}\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_{nn}\}. \tag{2.2}$$

Пусть $\delta > 0$; положим $b = a + \delta$. Для $v \geqslant 0$ введем вероятность $p_i(x + v)$ равенством

$$p_i(x+v) = \mathbf{P}\{X_j \geqslant x \quad \text{для любого } j \leqslant i \mid X_0 = x + v\}.$$

Ввиду определения (1.2) при начальном состоянии $X_0 = x + v$ и любом i справедливо неравенство $X_i \geqslant x+v+\xi_1+\cdots+\xi_i$. Поэтому $p_i(x+v) \geqslant \mathbf{P}\{v+\xi_1+\cdots+\xi_j \geqslant 0$ для любого $j \leqslant i\}$. Полагая здесь $v = U+ib$, по усиленному закону больших чисел получаем равномерную по x и i сходимость

$$p_i(x + U + ib) \to 1 \quad \text{при } U \to \infty. \tag{2.3}$$

Так как совместное наступление событий $\{X_{i-1} < x\}$, $\{X_i \geqslant x + U + (n-i)\,b\}$ и $\{X_j \geqslant x$ при $j \in [i+1, n]\}$ влечет событие A_{in}, то справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \geqslant \int_0^x \mathbf{P}\{X_{i-1} \in dy\} \int_{U+(n-i)\,b}^{\infty} \mathbf{P}\{X_i \in x + du \mid X_{i-1} = y\}\, p_{n-i}(x+u).$$

Поскольку функция $p_i(x+u)$ не убывает по u,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A_{in}\} \geqslant\ & p_{n-i}\bigl(x + U + (n-i)\,b\bigr) \\ & \times \int_0^x \mathbf{P}\{X_{i-1} \in dy\} \mathbf{P}\bigl\{X_i \geqslant x + U + (n-i)\,b \mid X_{i-1} = y\bigr\}.\end{aligned}$$

Учитывая, что при любом $y \in [0, x)$

$$\mathbf{P}\bigl\{X_i \geqslant x + U + (n-i)\,b \mid X_{i-1} = y\bigr\} \geqslant \mathbf{P}\bigl\{\xi \geqslant x + U + (n-i)\,b\bigr\},$$

из последнего неравенства получаем

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \geqslant p_{n-i}\bigl(x + U + (n-i)\,b\bigr)\, \mathbf{P}\{X_{i-1} < x\} \mathbf{P}\bigl\{\xi \geqslant x + U + (n-i)\,b\bigr\}.$$

В силу этой оценки и сходимости (2.3) найдется достаточно большое U такое, что при всех x, i и n справедливо неравенство $\mathbf{P}\{A_{in}\} \geqslant (1-\delta/2)\, \mathbf{P}\{X_{i-1} < x\}\, \mathbf{P}\{\xi \geqslant x + U + (n-i)\,b\}$. Отсюда ввиду сходимости (2.1) при достаточно больших x

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \geqslant (1-\delta)\, \overline{F}\bigl(x + U + (n-i)\,b\bigr)$$

равномерно по i и n. Используя последнее неравенство, выводим из равенства (2.2) оценку, верную для достаточно больших x:

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant x\} \geqslant (1-\delta) \sum_{i=1}^{n} \overline{F}\bigl(x + U + (n-i)\,b\bigr).$$

Так как функция $\overline{F}(v)$ локально степенная, то равномерно по n

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}\bigl(x + U + (n-i)\,b\bigr) \sim \frac{1}{b} \int_x^{x+nb} \overline{F}(v)\, dv \quad \text{при } x \to \infty.$$

Поскольку $b = a + \delta$ и $\delta > 0$ выбрано произвольно, отсюда вытекает утверждение леммы.

3. Условия принадлежности распределения классу $\mathcal{S}_*$. Пусть G — локально степенное распределение в $\mathbf{R}^+$ с конечным средним значением. Для любого $U \in (0, x)$ имеем равенства (распределение G_t определено в (1.1)):

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G_t{*}G_t}(x)}{\overline{G_t}(x)} &= \int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) + 1 && (3.1)\\ &= \Bigl(\int_0^U + \int_U^x\Bigr) \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) + 1. && (3.2)\end{aligned}$$

Так как функция $\overline{G_t}(y)$ локально степенная, то при любом фиксированном U

$$\int_0^U \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\, dG_t(u) \longrightarrow G_t(U)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $t \geqslant 1$. Следовательно, имеет место

Лемма 2. *Пусть распределение G — локально степенное. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $G \in \mathcal{S}_*$;

(ii) *для любого $\varepsilon > 0$ найдутся U и x_0, $0 \leqslant U \leqslant x_0$, такие, что для всех $x \geqslant x_0$ и $t \geqslant 1$ выполняется*

$$\int_U^x \overline{G_t}(x-u)dG_t(u) \leqslant \varepsilon \overline{G_t}(x);$$

(iii) *существует функция $U(x) \to \infty$, $0 \leqslant U(x) \leqslant x$, такая, что $\overline{G}(x-U(x)) \sim \overline{G}(x)$ и равномерно по $t \geqslant 1$*

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\, dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \quad \text{при } x \to \infty;$$

(iv) *для любой функции $U(x) \to \infty$, $0 \leqslant U(x) \leqslant x$, такой, что $\overline{G}(x-U(x)) \sim \overline{G}(x)$, выполняется равномерное по $t \geqslant 1$ соотношение*

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\, dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \quad \text{при } x \to \infty.$$

В следующей лемме формулируется свойство замкнутости класса $\mathcal{S}_*$ относительно отношения слабой эквивалентности хвостов распределений (терминология из [7]).

Лемма 3. *Пусть G и H — два локально степенных распределения в $\mathbf{R}^+$. Если $G \in \mathcal{S}_*$ и $c_1\overline{G}(x) \leqslant \overline{H}(x) \leqslant c_2\overline{G}(x)$ для некоторых c_1 и c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, то $H \in \mathcal{S}_*$.*

Proof. Так как распределение H локально степенное, а G сильно субэкспоненциальное, по лемме 2 найдется последовательность $U(x) \to \infty$ такая, что $\overline{G}(x-U(x)) \sim \overline{G}(x)$, $\overline{H}(x-U(x)) \sim \overline{H}(x)$ и

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\, dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \tag{3.3}$$

при $x \to \infty$ равномерно по $t \geqslant 1$. Поскольку $\overline{H}(x) \leqslant c_2\overline{G}(x)$, то после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\int_{U(x)}^x \overline{H_t}(x-u)\, dH_t(u) &\leqslant c_2 \int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x-u)\, dH_t(u) \\ &= -c_2\overline{G_t}(x-u)\overline{H_t}(u)\,|_{U(x)}^x + c_2 \int_{U(x)}^x \overline{H_t}(u)\, d_u\overline{G_t}(x-u) \\ &\leqslant c_2\overline{G_t}(x-U(x))\,\overline{H_t}(U(x)) + c_2^2 \int_{U(x)}^x \overline{G_t}(u)\, d_u\overline{G_t}(x-u).\end{aligned}$$

Отсюда ввиду (3.3) и условия $\overline{H}(x) \geqslant c_1\overline{G}(x)$ вытекает соотношение

$$\int_{U(x)}^x \overline{H_t}(x-u)\, dH_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) = o(\overline{H_t}(x)),$$

которое в силу леммы 2 завершает доказательство.

Лемма 4. *Пусть распределение G с конечным средним значением является субэкспоненциальным и существует $c>0$ такое, что $\overline{G}(2x)\geqslant c\overline{G}(x)$ для любого x. Тогда распределение G является сильно субэкспоненциальным.*

Proof. Имеем

$$\overline{G_t}(2x)=\min\Big(1,\ \int_{2x}^{2x+t}\overline{G}(u)\,du\Big)$$
$$=\min\Big(1,\ 2\int_{x}^{x+t/2}\overline{G}(2u)\,du\Big)\geqslant\min\Big(1,\int_{x}^{x+t}\overline{G}(2u)\,du\Big).$$

Так как $\overline{G}(2u)\geqslant c\overline{G}(u)$, то отсюда вытекает неравенство

$$\overline{G_t}(2x)\geqslant\min\Big(c,\ c\int_{x}^{x+t}\overline{G}(u)\,du\Big)=c\overline{G_t}(x). \tag{3.4}$$

Кроме того, функция $\overline{G}(y)$ локально степенная. Поэтому для любого фиксированного u равномерно по $t\geqslant 1$

$$\overline{G_t}(x-u)\,[\overline{G_t}(x)]^{-1}\longrightarrow 1\quad\text{при } x\to\infty. \tag{3.5}$$

Для хвоста свертки $G_t{*}G_t$ с помощью интегрирования по частям и с учетом непрерывности распределения G_t в точках $u>0$ получаем выражения:

$$\overline{G_t{*}G_t}(x)=-\Big(\int_0^{x/2}+\int_{x/2}^{\infty}\Big)\overline{G_t}(x-u)\,d\overline{G_t}(u)$$
$$=\int_0^{x/2}\overline{G_t}(x-u)\,dG_t(u)+\int_{x/2}^{\infty}\overline{G_t}(u)\,d_u\overline{G_t}(x-u)+\Big(\overline{G_t}\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)^2$$
$$=2\int_0^{x/2}\overline{G_t}(x-u)\,dG_t(u)+\Big(\overline{G_t}\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)^2. \tag{3.6}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{x/2}\frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u)=\Big(\int_0^{U}+\int_U^{x/2}\Big)\frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u).$$

Ввиду (3.5) первое слагаемое для любого фиксированного U имеет своим пределом $G_t(U)$. В силу (3.4) второе слагаемое не превосходит $\overline{G_\infty}(U)/c$ и выбором достаточно большого U может быть сделано сколь угодно малым. Из сказанного вытекает равномерная по $t\geqslant 1$ сходимость интегралов

$$\int_0^{x/2}\frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u)\longrightarrow 1\quad\text{при } x\to\infty.$$

Из (3.4) вытекает также, что $(\overline{G_t}(x/2))^2\leqslant\overline{G_t}(x)\,\overline{G_t}(x/2)/c=o(\overline{G_t}(x))$ при $x\to\infty$. Подставляя два последние соотношения в (3.6), приходим к требуемой равномерной по $t\geqslant 1$ асимптотике $\overline{G_t{*}G_t}(x)\sim 2\overline{G_t}(x)$ при $x\to\infty$.

Лемма 5. *Пусть распределение G с конечным средним значением является субэкспоненциальным. Пусть существует x_0 такое, что функция $g(x)\equiv-\ln\overline{G}(x)$ вогнута при $x\geqslant x_0$ и, кроме того,*

$$\int_0^x\overline{G}(x-u)\overline{G}(u)\,du\sim\overline{G}(x)\int_0^{\infty}\overline{G}(u)\,du\quad\textit{при } x\to\infty. \tag{3.7}$$

Тогда распределение G является сильно субэкспоненциальным.

Proof. Обозначим $J_t(x) = \overline{G}_t(x)/\overline{G}(x)$. В частности, если случайная величина ζ имеет распределение G, то $J_\infty(x) = \mathbf{E}\{\zeta \,|\, \zeta \geqslant x\}$ для таких значений x, что $\overline{G_\infty}(x) \leqslant 1$.

Так как функция $g(x)$ вогнута, разность $g(x+u) - g(x)$ не возрастает по x, и, следовательно, отношение $\overline{G}(x+u)/\overline{G}(x) = e^{-(g(x+u)-g(x))}$ не убывает по x. Поэтому функция

$$J_t(x) = \frac{\overline{G_t}(x)}{\overline{G}(x)} = \int_0^t \frac{\overline{G}(x+u)}{\overline{G}(x)}\,du$$

также не убывает по x. Отсюда, поскольку $\overline{G_t}(x) = J_t(x)\,\overline{G}(x)$, значение второго интеграла в (3.2) допускает оценку

$$\int_U^x \frac{J_t(x-u)}{J_t(x)}\frac{\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)}\,dG_t(u) \leqslant \int_U^x \frac{\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)}\,dG_t(u)$$
$$= \int_U^x \frac{\overline{G}(x-u)}{\overline{G}(x)}\big(\overline{G}(u) - \overline{G}(u+t)\big)\,du \leqslant \int_U^x \frac{\overline{G}(x-u)\overline{G}(u)}{\overline{G}(x)}\,du$$

и ввиду условия (3.7) может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого U. Отсюда по лемме 2 вытекает сильная субэкспоненциальность распределения G.

Распределение Парето с параметром $\alpha > 1$, равно как и любое распределение с правильно меняющимся на бесконечности хвостом и с конечным средним значением, удовлетворяет условиям леммы 4 и, следовательно, является сильно субэкспоненциальным.

Распределение Вейбулла $\overline{G}(x) = e^{-x^\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, удовлетворяет условиям леммы 5. Действительно, функция $g(x) = x^\alpha$ вогнута при $\alpha \in (0,1)$, и осталось проверить выполнение условия (3.7). Функция $(x-u)^\alpha + u^\alpha$ достигает своего минимума по $u \in [U, x-U]$ на концах этого отрезка, следовательно,

$$\int_U^{x-U} \overline{G}(x-u)\overline{G}(u)\,du = \int_U^{x-U} e^{-((x-u)^\alpha + u^\alpha)}\,du \leqslant x e^{-((x-U)^\alpha + U^\alpha)} = o(e^{-x^\alpha}),$$

например, при $U = U(x) = \ln^{2/\alpha} x$. Кроме того, при таком выборе $U(x)$

$$\Big(\int_0^U + \int_{x-U}^x\Big)\,\overline{G}(x-u)\overline{G}(u)\,du \sim \overline{G}(x)\int_0^\infty \overline{G}(u)\,du.$$

Из последних двух соотношений вытекает (3.7).

Примерно так же проверяется, что и логнормальное распределение удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно, является сильно субэкспоненциальным.

4. Некоторые свойства сверток сильно субэкспоненциального распределения. Пусть G — сильно субэкспоненциальное распределение в $\mathbf{R}^+$. Настоящий пункт содержит аналоги стандартных свойств субэкспоненциальных распределений для распределений класса $\mathcal{S}_*$.

Лемма 6. *Для любого натурального k асимптотика хвоста k-й свертки распределения G_t имеет вид $\overline{G_t^{k*}}(x) \sim k\overline{G_t}(x)$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \geqslant 1$.*

Proof of Theorem следует по индукции из равенства для хвоста свертки $G_t^{(k+1)*}$

$$\overline{G_t^{(k+1)*}}(x) = \Big(\int_0^U + \int_U^x\Big)\overline{G_t^{k*}}(x-u)\,dG_t(u) + \overline{G_t}(x) \tag{4.1}$$

и из леммы 2.

Докажем следующую оценку для хвоста k-й свертки меры G_t.

Лемма 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что при любых $x \geqslant 0$, $t \geqslant 1$ и $k = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство*

$$\overline{G_t^{k*}}(x) \leqslant c\overline{G_t}(x)(1+\varepsilon)^k.$$

Proof. Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду сильной субэкспоненциальности распределения G из (3.1) вытекает существование числа $x_0 = x_0(\varepsilon)$ такого, что при любых $x \geqslant x_0$ и $t \geqslant 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) \leqslant 1+\varepsilon. \tag{4.2}$$

Обозначим $A_k \equiv \sup_{x\geqslant 0,\, t\geqslant 1}[\overline{G_t^{k*}}(x)/\overline{G_t}(x)]$. Оценим сверху A_{k+1} через A_k. В силу (4.1)

$$A_{k+1} \leqslant \sup_{x\geqslant 0, t\geqslant 1} \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) + 1. \tag{4.3}$$

По определению A_k имеем неравенство

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) = \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x-u)}\frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) \leqslant A_k \int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u).$$

Ввиду (4.2) имеем отсюда верную при $x \geqslant x_0$ оценку

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) \leqslant A_k(1+\varepsilon).$$

Кроме того, при $x < x_0$ и $t \geqslant 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) \leqslant \frac{1}{\overline{G_t}(x_0)} \leqslant \frac{1}{\min(1, \overline{G}(x_0+1))} \equiv c_1(x_0) < \infty.$$

Из двух последних оценок следует, что для любых $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)}\,dG_t(u) \leqslant A_k(1+\varepsilon) + c_1.$$

Подставляя эту оценку в (4.3), получаем $A_{k+1} \leqslant A_k(1+\varepsilon) + c_1 + 1$. Отсюда вытекает неравенство $A_{k+1} \leqslant (c_1+1)(k+1)(1+\varepsilon)^k$, которое эквивалентно оценке леммы.

5. Оценка сверху для хвоста распределения первой до момента времени n неотрицательной суммы. Пусть $\eta = \min\{k \geqslant 1\colon\ S_k \geqslant 0\}$ — номер первой неотрицательной лестничной высоты (считаем $\min\varnothing = \infty$), $\eta^{[n]} = \min\{k \in [1,n]\colon\ S_k \geqslant 0\}$ — номер первой до момента времени n неотрицательной лестничной высоты и $\chi^{[n]} = S_{\eta^{[n]}}$ — первая до момента времени n неотрицательная сумма.

Поскольку $\mathbf{E}\xi < 0$, то η, $\eta^{[n]}$ и $\chi^{[n]}$ — несобственные случайные величины; положим $p = \mathbf{P}\{\eta < \infty\}$, $p^{[n]} = \mathbf{P}\{\eta^{[n]} < \infty\}$. При любом n справедливы неравенства

$$0 < \mathbf{P}\{\xi \geqslant 0\} \leqslant p^{[n]} \leqslant p < 1. \tag{5.1}$$

Кроме того,

$$p^{[n]} \uparrow p \quad \text{при } n \to \infty. \tag{5.2}$$

Справедлива следующая оценка сверху для вероятности события $\{\chi^{[n]} \geqslant x\}$ при больших значениях n и x.

Лемма 8. *Пусть распределение F локально степенное. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа n_1 и x_1 такие, что при $n \geqslant n_1$ и $x \geqslant x_1$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geqslant x\} \leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{1-p}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(u)\,du.$$

Proof. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geqslant x\} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{S_i < 0 \text{ при всех } i \leqslant j-1,\ S_j \geqslant x\}. \tag{5.3}$$

Положим $\psi_j(B) = \mathbf{P}\{S_i < 0 \text{ при всех } i \leqslant j,\ S_j \in B\}$, $B \subseteq (-\infty, 0)$. По формуле полной вероятности справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{S_i < 0 \text{ при всех } i \leqslant j-1,\ S_j \geqslant x\} = \int_x^\infty F(dy)\,\psi_{j-1}([x-y,0)).$$

Подставляя это равенство в (5.3), получаем

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geqslant x\} = \int_x^\infty F(dy)\sum_{j=1}^{n}\psi_{j-1}([x-y,0)). \tag{5.4}$$

Оценим сумму в последнем представлении. Для любого $N < n$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\psi_{j-1}([x-y,0)) &\leqslant N + \sum_{j=N+1}^{n}\mathbf{P}\{S_1<0,\dots,S_N<0,S_j \geqslant x-y\}\\ &= N + \mathbf{P}\{S_1<0,\dots,S_N<0\}\sum_{j=N+1}^{n}\mathbf{P}\{S_j \geqslant x-y \mid S_1<0,\dots,S_N<0\}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\{S_1<0,\dots,S_N<0\} \longrightarrow 1-p \quad \text{при } N \to \infty, \tag{5.5}$$

то для любого $\delta > 0$ найдется N такое, что

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}([x-y,0)) \leqslant N + (1-p+\delta) \sum_{j=N+1}^{n} \mathbf{P}\{S_j \geqslant x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\}$$
$$\leqslant N + (1-p+\delta) \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_j \geqslant x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\}.$$

Асимптотика функции восстановления не зависит от значений первых N слагаемых. Поэтому для любого фиксированного N в силу теоремы восстановления для любого $\delta > 0$ найдется t такое, что при $y - x \geqslant t$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{j-1} \geqslant x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} \leqslant (1+\delta)\,\frac{y-x}{a}.$$

Кроме того, при $y \in [x, x+t)$ справедлива оценка

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{j-1} \geqslant x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\}$$
$$\leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{j-1} \geqslant -t \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} = \widetilde{c} = \widetilde{c}(-t) < \infty.$$

Из двух последних оценок вытекает неравенство, верное при любом $y \geqslant x$ ($\widehat{c} = N + \widetilde{c}$):

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}([x-y,0)) \leqslant (1-p+\delta)(1+\delta)\,\frac{y-x}{a} + \widehat{c}. \tag{5.6}$$

При любом $y \geqslant x$ имеем также следующие неравенство и асимптотику

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}([x-y,0)) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_j < 0\} \sim n(1-p)$$

при $n \to \infty$ ввиду (5.5). Следовательно, при достаточно больших n

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{j-1}([x-y,0)) \leqslant n(1-p+\delta). \tag{5.7}$$

Обозначим $g(x,y) \equiv (1-p+\delta)\,\min((1+\delta)\,(y-x)/a, n)$. Подставляя оценки (5.6) и (5.7) в (5.4), приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geqslant x\} \leqslant \widehat{c}\int_x^{\infty} F(dy) + \int_x^{\infty} F(dy)\, g(x,y) = \widehat{c}\overline{F}(x) - \overline{F}(y)\, g(x,y)\,|_x^{\infty}$$
$$+ \int_x^{\infty} \overline{F}(y)\, d_y g(x,y) = \widehat{c}\overline{F}(x) + (1-p+\delta)\frac{1+\delta}{a}\int_x^{x+na/(1+\delta)} \overline{F}(y)\, dy. \tag{5.8}$$

Поскольку функция $\overline{F}(x)$ локально степенная, то $\overline{F}(x) = o(\int_x^{x+na/(1+\varepsilon)} \overline{F}(y)\, dy)$ при $n, x \to \infty$. Поэтому из (5.8) вытекает утверждение леммы.

6. Оценка сверху для вероятностей больших уклонений максимума сумм. Определим собственную случайную величину $\widetilde{\chi}^{[n]}$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}^{[n]} \in B\} = \mathbf{P}\{\chi^{[n]} \in B\}(p^{[n]})^{-1}, \quad B \subseteq [0, \infty).$$

Пусть $\varepsilon > 0$; положим $b = (1 + \varepsilon)(1 - p)/pa$. В силу леммы 8 и сходимости (5.2) существуют n_0 и x_0 такие, что для любых $n \geqslant n_0$ и $x \geqslant x_0$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}^{[n]} \geqslant x\} \leqslant b \int_x^{x+na} \overline{F}(u)\, du. \tag{6.1}$$

Определим вероятностную меру G на полупрямой $\mathbf{R}^+$, положив

$$\overline{G}(x) = \min\bigl(1,\, b\overline{F}(x)\bigr) \quad \text{при } x \geqslant x_0 + 1, \quad \overline{G}(x_0 + 1) = 1. \tag{6.2}$$

Тогда в силу (6.1) при $n \geqslant n_0$ и $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\chi}^{[n]} \geqslant x\} \leqslant \overline{G_{na}}(x). \tag{6.3}$$

Пусть $\widetilde{\chi}_1^{[n]}, \widetilde{\chi}_2^{[n]}, \ldots$ — суть независимые копии случайной величины $\widetilde{\chi}^{[n]}$. Одна из сумм S_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, превосходит уровень x лишь тогда, когда одна из лестничных высот превзошла этот уровень. Вероятность того, что i-я лестничная высота существует, причем до момента времени n, не превосходит $(p^{[n]})^i$. Обозначим через $\widehat{p}_i{}^{[n]}$ условную вероятность того, что i-я лестничная высота окажется последней при условии, что она существует до момента времени n. Для любого фиксированного i имеем монотонную сходимость

$$\widehat{p}_i^{[n]} \downarrow 1 - p \quad \text{при } n \to \infty. \tag{6.4}$$

По формуле полной вероятности для любых x и n имеем неравенство:

$$\mathbf{P}\Bigl\{\max_{0 \leqslant i \leqslant n} S_i \geqslant x\Bigr\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (p^{[n]})^i \widehat{p}_i^{[n]} \mathbf{P}\{\widetilde{\chi}_1^{[n]} + \cdots + \widetilde{\chi}_i^{[n]} \geqslant x\}.$$

Пусть $N < n$. Разбивая последнюю сумму на две и используя (5.1) и неравенства $\widehat{p}_i^{[n]} \leqslant \widehat{p}_{i+1}^{[n]}$ и (6.3), получаем оценку

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \leqslant \widehat{p}_N^{[n]} \sum_{i=1}^{N} p^i \overline{G_{na}^{i*}}(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} p^i \overline{G_{na}^{i*}}(x), \tag{6.5}$$

верную для локально степенного распределения F.

Далее считаем, что случайная величина ξ имеет сильно субэкспоненциальное распределение. Соответственно, в силу определения (6.2) и леммы 3 распределение G также сильно субэкспоненциальное. Имеет место

Лемма 9. *Пусть $F \in \mathcal{S}_*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует x_1 такое, что при всех $n \geqslant 1$ и $x \geqslant x_1$ справедлива оценка*

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \leqslant \frac{1 + \varepsilon}{a} \int_x^{x+na} \overline{F}(u)\, du.$$

Proof. Поскольку временной параметр n принимает лишь счетное число значений и функция $\overline{F}(u)$ локально степенная, то достаточно проверить следующие два соотношения: при любом фиксированном n

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}}{\overline{F}(x)}=\frac{n}{a},\qquad \limsup_{n,x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}}{\int_x^{x+na}\overline{F}(u)\,du}\leqslant\frac{1}{a}. \tag{6.6}$$

Так как распределение F субэкспоненциальное, то равенство (1.3) позволяет проверить первое соотношение в (6.6) по индукции. Действительно, при $n=1$ имеем $X_1=\xi_1^+$ и $\mathbf{P}\{X_1\geqslant x\}=\overline{F}(x)$ при $x>0$. Поскольку $\mathbf{P}\{X_{n+1}\geqslant x\}=\mathbf{P}\{X_n+\xi_{n+1}\geqslant x\}$ при $x>0$, индукционный переход следует из стандартных свойств субэкспоненциальных распределений (см., например, доказательство теоремы 1 в [4] и предложения 1 в [6]).

Перейдем к проверке второго соотношения в (6.6), исходя из оценки (6.5). Распределение G сильно субэкспоненциальное, поэтому по лемме 7 для любого $\delta>0$ существует c_1 такое, что

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{\overline{G_{na}}(x)}\sum_{i=N+1}^{\infty}p^i\overline{G_{na}^{i*}}(x)\leqslant\frac{c_1[p(1+\delta)]^{N+1}}{1-p(1+\delta)}$$

равномерно по $n\geqslant1$. Подставляя это неравенство в (6.5), а также используя (6.4) и лемму 6, получаем

$$\limsup_{n,x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}}{\overline{G_{na}}(x)}\leqslant(1-p)\sum_{i=1}^{N}p^i i+\frac{c_1[p(1+\delta)]^{N+1}}{1-p(1+\delta)}.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора δ и N вытекает неравенство

$$\limsup_{n,x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}}{\overline{G_{na}}(x)}\leqslant\frac{p}{1-p},$$

следствием которого в силу определения G является соотношение

$$\limsup_{n,x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}}{\int_x^{x+na}\overline{F}(u)\,du}\leqslant\frac{1+\varepsilon}{a}.$$

Так как $\varepsilon>0$ выбрано произвольно, то справедливо второе соотношение в (6.6). Лемма доказана.

Список литературы

[1] Годованчук В. В. *Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона*, Теория вероятн. и ее примен., 23 (1978), pp. 624–630.

[2] Пинелис И. Ф. *Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий*, Теория вероятн. и ее примен., 26 (1981), pp. 73–87.

[3] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

[4] Чистяков В. П. *Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам*, Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.

[5] A. A. Borovkov and K. A. Borovkov, *On large deviation probabilities for random walks.* I. *Regularly varying distribution tails.* II. *Regularly exponential distribution tails*, 46 (2001), pp. 209–232.

[6] P. Embrechts, C. M. Goldie and N. Veraverbeke, *Subexponentiality and infinite divisibility*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 49 (1979), pp. 335–347.

[7] C. Klüppelberg, *Subexponential distributions and integrated tails*, J. Appl. Probab., 25 (1988), pp. 132–141.

[8] D. A. Korshunov, *On distribution tail of the maximum of a random walk*, Stochastic Process. Appl., 72 (1997), pp. 97–103.

[9] M. S. Sgibnev, *On the distribution of the maxima of partial sums*, Statist. Probab. Lett., 28 (1996), pp. 235–238.

[10] J. L. Teugels, *The class of subexponential distributions*, Ann. Probab., 3 (1975), pp. 1000–1011.

[11] N. Veraverbeke, *Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk*, Stochastic Process. Appl., 5 (1977), pp. 27–37.