ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2013, том 452, № 5, с. 483–485

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАУССОВСКОГО ХАОСА

© 2013 г. Д. А. Коршунов, В. И. Питербарг, Е. Хашорва

Представлено академиком А.Н. Ширяевым 06.03.2013 г.

Поступило 22.03.2013 г.

DOI: 10.7868/S0869565213300051

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_d)$ – случайный вектор в $\mathbb{R}^d$, имеющий нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей B, $B_{ij} := \mathbb{E}\xi_i\xi_j$. Большой интерес представляет собой задача исследования асимптотического поведения хвоста распределения произведения $\prod_{i=1}^{d}\xi_i$. Эта задача возникает в различных областях, таких как стохастическая геометрия, случайные разностные уравнения, теория риска и пр.

Рассмотрим более общий случай функций вектора $\boldsymbol{\xi}$, так называемый гауссовский хаос $h(\boldsymbol{\xi})$, где $h: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – непрерывная однородная функция порядка $\alpha > 0$, т.е. $h(x\mathbf{t}) = x^\alpha h(\mathbf{t})$ для всех $x > 0$ и $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Традиционно в литературе термин гауссовский хаос порядка $\alpha \in \mathbb{N}$ закреплен за случаем, когда g – однородный полином степени α; это понятие восходит к Винеру [14], который ввел в рассмотрение процессы полиномиального хаоса. Мы следуем более широкому толкованию понятия гауссовского хаоса.

Распределение вектора $\boldsymbol{\xi}$ равно распределению $\sqrt{B}\boldsymbol{\eta}$, если вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_d)$ имеет независимые координаты со стандартным нормальным распределением. Тогда

$$\mathbb{P}\{h(\boldsymbol{\xi}) > x\} = \mathbb{P}\{h(\sqrt{B}\boldsymbol{\eta}) > x\} = \\ = \mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\},$$

где $g(\mathbf{u}) = h(\sqrt{B}\mathbf{u})$. Непрерывная функция $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ также является однородной порядка α, как и h. Таким образом задача сводится к случаю единичной ковариационной матрицы. Поэтому в дальнейшем исследуется $g(\boldsymbol{\eta})$. Поскольку в силу однородности

$$\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \mathbb{P}\{(g(x^{-1/\alpha}\boldsymbol{\eta}) > 1\} = \\ = \frac{x^{d/\alpha}}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\{\mathbf{v}:\, g(\mathbf{v}) > 1\}} e^{-x^{2/\alpha}|\mathbf{v}|^2/2}d\mathbf{v}, \qquad (1)$$

то задача вычисления асимптотического поведения вероятности 1 может быть решена при помощи одной из разновидностей асимптотического метода Лапласа, см., например, [3]. Обозначим

$$c^2 := \min\{|\mathbf{u}|^2 : g(\mathbf{u}) \ge 1\} = \\ = \min\{|\mathbf{u}|^2 : g(\mathbf{u}) = 1\},$$

где последнее равенство вытекает из однородности g. В силу непрерывности g имеем $c^2 > 0$. Предположим, что интересующее нас с точки зрения метода Лапласа множество

$$\mathscr{C} := \arg\min\{|\mathbf{u}| : g(\mathbf{u}) = 1\} = \\ = \{\mathbf{u} : |\mathbf{u}| = c \text{ и } g(\mathbf{u}) = 1\},$$

расположенное на сфере радиуса c, представляет собой гладкое конечно-связное многообразие размерности r, а функция g имеет типичную для метода Лапласа структуру в окрестности этого многообразия. Обозначим $g(\varphi) := g(\mathbf{u}/|\mathbf{u}|)$, где $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{d-1}) \in \Pi := [0, \pi)^{d-2} \times [0, 2\pi)$ – сферические координаты вектора $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ на единичной сфере S_{d-1}, соответствующее многообразию $\mathscr{C}$ многообразие на параллелепипеде Π обозначим через $\mathscr{C}_\varphi$. Якобиан перехода к сферическим координатам в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $J(r, \boldsymbol{\varphi})$. Далее, обозначим через $g''(\boldsymbol{\varphi})$ гессиан функции $g(\boldsymbol{\varphi})$, а через $\lambda(A)$ – наименьшее по модулю отличное от нуля собственное значение симметричной матрицы A.

Теорема 1. *Пусть $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – непрерывная однородная функция порядка $\alpha > 0$. Пусть $\dim\mathscr{C}_\varphi = r \in [0, d-1]$. Если соответствующая ей*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Университет Лозанны, Швейцария

функция $g(\boldsymbol{\varphi})$: $\Pi \to \mathbb{R}$ *дифференцируема три раза и при этом*

$$\operatorname{rank} g''(\boldsymbol{\varphi}) \equiv d-1-r, \quad \inf_{\boldsymbol{\varphi}\in\mathscr{C}_\varphi} \lambda(g''(\varphi)) > 0$$

(*гессиан равномерно невырожден на* $\mathscr{C}_\varphi$), *то*

$$\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \mathscr{H} x^{(r-1)/\alpha} e^{-c^2 x^{2/\alpha}/2}(1 + O(x^{-2/\alpha})) \quad \text{при } x \to \infty, \tag{2}$$

$$\mathscr{H} := \frac{1}{(2\pi)^{(r+1)/2}} \frac{\alpha^{(d-1-r)/2}}{c^{1-r+\alpha(d-1-r)/2}} \times$$

$$\times \int_{\mathscr{C}_\varphi} \frac{J(1, \boldsymbol{\varphi})}{\sqrt{|\det g''_{d-1-r}(\boldsymbol{\varphi})|}} dV_\varphi,$$

где dV_φ — *элемент объема многообразия* $\mathscr{C}_\varphi \subset \Pi$ *и* $\det g''_{d-1-r}(\varphi)$ — *любой отличный от нуля минор гессиана* $g''(\boldsymbol{\varphi})$ *порядка* $d-1-r$. *Соотношение* (2) *можно дифференцировать, что дает асимптотику плотности распределения гауссовского хаоса* $g(\boldsymbol{\eta})$.

Заметим, что, как и в классическом случае метода Лапласа [3], потребовав большей гладкости от функции g, можно выписать асимптотическое разложение по степеням x для рассматриваемой вероятности и плотности. Доказательство теоремы в случае $r = 0$, т.е. когда $\mathscr{C} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, ..., \mathbf{t}_k\}$, где $\mathbf{t}_i$ — изолированные точки абсолютного минимума функции g в области интегрирования, заключается в прямом применении теоремы 4.2 из [3]. Интеграл в выражении для $\mathscr{H}$ превращается при этом в соответствующую сумму по точкам $\boldsymbol{\varphi}_i \in \Pi$, соответствующих точкам $\mathbf{t}_i$. В общем случае используется вариант метода Лапласа для функций, зависящих от параметра, по которым следует доказывать возможность интегрирования. На каждой карте из атласа с достаточно малыми картами на многообразии $\mathscr{C}_\varphi$ строится система координат, первые r из которых являются параметрами, при фиксации которых минимум амплитуды (функции под экспонентой) достигается в единственной точке окрестности карты, с последующим применением стандартного метода Лапласа и интегрирования по этим параметрам на всех окрестностях в Π карт атласа.

Ввиду теоремы 1, гауссовский хаос является субэкспоненциальной случайной величиной в случае $\alpha > 2$. Субэкспоненциальность случайных величин — важное понятие в различных приложениях, см., например, [4]. Субэкспоненциальность гауссовского хаоса имеет место при весьма слабых ограничениях на функцию h. Пусть, например, h неотрицательна. d-мерный центрированный гауссовский вектор $\boldsymbol{\eta}$ с единичной ковариационной матрицей допускает представление в виде произведения $\boldsymbol{\eta} \overset{d}{=} \chi\boldsymbol{\mu}$ независимых величин χ и $\boldsymbol{\mu}$, где $\chi^2 = \sum_{i=1}^{d} \eta_i^2$ имеет распределение χ^2 с d степенями свободы, а $\boldsymbol{\mu}$ имеет равномерное распределение на единичной сфере $S_{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Гауссовский случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = \sqrt{B}\boldsymbol{\eta} = \chi\sqrt{B}\boldsymbol{\mu}$ имеет ковариационную матрицу B. Поэтому ввиду свойства однородности h для любого $x > 0$ имеем

$$\mathbb{P}\{h(\boldsymbol{\xi}) > x\} = \mathbb{P}\{\chi^\alpha h(\sqrt{B}\boldsymbol{\mu}) > x\}. \tag{3}$$

Если $h(\sqrt{B}\boldsymbol{\mu})$ является положительной ограниченной случайной величиной, то в силу [2, следствие 2.5] случайная величина $h(\boldsymbol{\xi})$ субэкспоненциальна в случае $\alpha > 2$, потому что тогда распределение χ^α имеет плотность вейбулловского типа

$$\frac{1}{\alpha \cdot 2^{d/2-1}\Gamma(d/2)} x^{d/\alpha - 1} e^{-x^{2/\alpha}/2}$$

с показателем $2/\alpha < 1$, что означает субэкспоненциальность.

Как вытекает из (3), если h ограничена на единичной сфере S_{d-1}, т.е. $h^* := \max\{h(\mathbf{u})\colon |\mathbf{u}| = 1\} < \infty$, то имеют место оценки

$$\mathbb{P}\{h(\boldsymbol{\xi}) > x\} \le \mathbb{P}\{\chi^\alpha > x/h^*\} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha \cdot 2^{d/2-1}\Gamma(d/2)} \int_{x/h^*}^{\infty} y^{d/\alpha-1} e^{-y^{2/\alpha}/2} dy.$$

Эта явная оценка сверху улучшает оценку, полученную в [10, следствие 1]; в наших условиях она лучше оценки, которую можно получить из [1, теорема 4.3].

Сформулированная теорема позволяет единообразно рассмотреть различные задачи. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. (Произведение независимых $N(0, 1)$ случайных величин.) Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_d)$ — стандартный гауссовский вектор, а $g(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \ldots u_d$. Имеем: $\alpha = d$, $c^2 = d$, $\mathscr{C} = \{(\pm 1, ..., \pm 1)$ с четным числом отрицательных координат$\}$ состоит из 2^{d-1} точек. Применение теоремы 1 приводит к асимптотике

$$p_{\eta_1 \ldots \eta_d}(x) = \frac{2^{(d-1)/2}}{\sqrt{2\pi d}} x^{1/d - 1} e^{-dx^{2/d}/2}(1 + O(x^{-2/d})) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Это асимптотическое соотношение интуитивно понятно (см., например, [13]): наиболее вероятное большое значение произведения принимается тогда, когда все множители примерно равны; следовательно, $p_{\eta_1 \ldots \eta_d}(x)$ асимптотически похоже на произведение d плотностей в одной и той же точке $x^{1/d}$.

Для произведения координат произвольного гауссовского вектора $\boldsymbol{\xi}$ с матрицей ковариаций B справедлива аналогичная формула на основании представления $\xi = \sqrt{B}\boldsymbol{\eta}$, однако вычисление констант представляет собой определенную сложность.

Пример 2. (Квадратичные формы от независимых $N(0, 1)$ случайных величин.) Пусть $g(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{d} a_i\eta_i^2$, где постоянные $a_i \in \mathbb{R}$ таковы, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{d-r} < a_{d-r+1} = \ldots = a_d = a$, $a > 0$.

Поскольку

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d-r} a_i u_i^2 + a \sum_{i=d-r+1}^{d} u_i^2$$

и $a_i < a$ при $i \le d - r$, то минимум $|\mathbf{u}|^2$ на множестве $g(\mathbf{u}) = 1$ достигается в точках $\mathbf{u}$, удовлетворяющих $u_{d-r+1}^2 + \ldots + u_d^2 = \frac{1}{a}$ и $u_1 = u_2 = \ldots = u_{d-r} = 0$, так что $c^2 = \frac{1}{a}$. В случае $r = 1$ множество $\mathcal{C}_\varphi$ состоит из двух точек $\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Используя теорему 1, можно вывести, что

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{d} a_i\eta_i^2 > x\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2-1}\Gamma(r/2)}\prod_{i=1}^{d-r}\frac{1}{\sqrt{1-a_i/a}}(x/a)^{r/2-1}e^{-x/2a}(1 + O(1/x))$$

при $x \to \infty$, что согласуется (с точки зрения асимптотики первого порядка) с результатами [6] (см. также [12, 11] или [7, теорема 1]. Также это дополняет оценки сверху, полученные в [5] и [9].

Пример 3. (Скалярное произведение.) С квадратичными формами примера 2 тесно связано $g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^*) = \sum_{i=1}^{d} a_i\eta_i\eta_i^*$, где η_i, η_i^*, $i \le d$, — независимые $N(0, 1)$ случайные величины, а $a_i \in \mathbb{R}^+$. Действительно, поскольку $\eta_i\eta_i^*$ совпадает по распределению с

$$\frac{\eta_i + \eta_i^*}{\sqrt{2}}\frac{\eta_i - \eta_i^*}{\sqrt{2}} = \frac{\eta_i^2 - \eta_i^{*2}}{2},$$

то имеем равенство по распределению

$$g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^*) \stackrel{d}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{d} a_i\eta_i^2 - \sum_{i=1}^{d} a_i\eta_i^{*2}\right),$$

и к квадратичной форме справа можно применить результат предыдущего примера, заменив размерность на $2d$, а параметр r — на число максимальных a_i. Некоторые результаты для скалярных произведений можно найти в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arcones M., Giné E.* // J. Theor. Probab. 1993. V. 6. P. 101–122.
2. *Cline D.B.H., Samorodnitsky G.* // Stoch. Process. Appl. 1994. V. 49. P. 75–98.
3. *Федорюк М.В.* Асимптотики: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
4. *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions. N.Y.: Springer, 2011.
5. *Hanson D.L., Wright F.T.* // Ann. Math. Stat. 1971. V. 42. P. 1079–1083.
6. *Hoeffding W.* // Theory Probab. Appl. 1964. V. 9. № 1. P. 89–91.
7. *Hüsler J., Liu R., Singh K.* // J. Multiv. Anal. 2002. V. 82. P. 422–430.
8. *Ivanoff B.G., Weber N.C.* // Bull. Austral. Math. Soc. 1998. V. 58. P. 239–244.
9. *Latała R.* // Stud. Math. 1999. V. 135. P. 39–53.
10. *Latała R.* // Ann. Probab. 2006. V. 34. P. 2315–2331.
11. *Lifshits M.A.* Lectures on Gaussian Processes. SpringerBriefs in Mathematics. Heidelberg: Springer, 2012.
12. *Piterbarg V.I.* // Stoch. Process. Appl. 1994. V. 53. P. 307–337.
13. *Sornette D.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 4811–4813.
14. *Wiener N.* // Amer. J. Math. 1938. V. 60. P. 897–936.