

Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения*

Боровков А. А., Коршунов Д. А.

Аннотация

Рассматриваются однородные во времени и асимптотически однородные в пространстве цепи Маркова со значениями на вещественной оси, имеющие инвариантную меру. Такая мера всегда существует, если цепь эргодична. В работе продолжено изучение асимптотических свойств $\pi([x, \infty))$ при $x \rightarrow \infty$ для инвариантной меры π , начатое в [2, 3, 5]. В этих работах изучались главным образом ситуации, приводящие к чисто экспоненциальному убыванию $\pi([x, \infty))$. В предлагаемой работе рассмотрены два оставшихся альтернативных варианта: случай «степенного» убывания $\pi([x, \infty))$ и «смешанный» случай, когда $\pi([x, \infty))$ асимптотически ведёт себя как $l(x)e^{-\beta x}$, где $l(x)$ — правильно меняющаяся на бесконечности интегрируемая функция и $\beta > 0$.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, инвариантная мера, грубая и точная асимптотики вероятностей больших уклонений

1 Введение

Пусть $X(n) = X(y, n) \in \mathbf{R}$, $n = 0, 1, \dots$, — однородная во времени цепь Маркова с начальным значением $X(y, 0) = y \in \mathbf{R}$ и переходной вероятностью $P(y, B) = P(y, 1, B)$, $P(y, n, B) = \mathbf{P}\{X(y, n) \in B\}$, $n \geq 1$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, где $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ — σ -алгебра борелевских множеств на прямой. В первых и последних параграфах статьи (§1, 2, 8 и 9) мы будем предполагать, что рассматриваемые цепи обладают свойством асимптотической однородности в пространстве, т. е. свойством слабой сходимости распределений $P(y, y + B)$ при $y \rightarrow \infty$ к некоторому распределению $F(B)$. Если обозначить через $\xi(y) = X(y, 1) - y$ приращение цепи за один шаг и через ξ случайную величину с распределением $F(B)$, то названное выше свойство означает слабую сходимость распределения $\xi(y)$ при $y \rightarrow \infty$ к распределению ξ .

*Работа выполнена при частичной поддержке грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 93-01-01416) и Международного научного фонда (Grant No. RAC000, 1994)

Далее, мы будем предполагать в первой части работы, что существует вероятностная инвариантная мера $\pi(\cdot)$ (не единственная, вообще говоря), т. е. мера, удовлетворяющая уравнению

$$\pi(B) = \int_{\mathbf{R}} \pi(du) P(u, B), \quad \pi(\mathbf{R}) = 1. \quad (1.1)$$

Основным объектом изучения в первой части статьи будет асимптотическое поведение $\pi(x) = \pi([x, \infty))$ при $x \rightarrow \infty$. Во второй части будет изучаться асимптотика $P(x_0, n, [x, \infty))$ при $x \rightarrow \infty$.

Для упрощения изложения мы будем ограничиваться, как правило, рассмотрением цепей, принимающих значения на положительной полуоси. Как будет видно из дальнейшего (см. также [3, §23]), изучение больших уклонений для π в общем случае может быть сведено к случаю $X(n) \geq 0$.

Так как инвариантная мера π всегда существует, если цепь эргодична, то она будет существовать, если $\mathbf{E}\xi < 0$, а неотрицательная цепь $X(n)$ является харрисовой (см., например, [13, 3]). В первой части статьи условие $\mathbf{E}\xi < 0$ будет всюду предполагаться выполненным. При этом случай $\mathbf{E}\xi = -\infty$ не исключается, если противное специально не оговорено.

Если пытаться весьма грубо характеризовать возможное асимптотическое поведение $\pi([x, \infty))$, то можно выделить следующие три основных случая.

Обозначим $\pi(x) = \pi([x, \infty))$,

$$\varphi(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\xi}, \quad \mu_+ = \sup\{\mu \geq 0 : \varphi(\mu) < \infty\}, \quad (1.2)$$

$$F(t) \equiv F([t, \infty)) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\}, \quad G(t) = \int_t^\infty F(u) du, \quad (1.3)$$

и будем писать $f(y) \sim g(y)$ при $y \rightarrow \infty$, если существует $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y)/g(y) = 1$. Функции $F(t)$ и $G(t)$ иногда называют соответственно «хвостом» и «двойным хвостом» распределения ξ .

1) $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) > 1$ (разрешается также возможность $\varphi(\mu_+) = 1$, $\varphi'(\mu_+) < \infty$; напомним, что предположение $\mathbf{E}\xi < 0$ влечёт за собой отрицательность $\varphi(\mu) - 1$ при малых μ). В этом случае при выполнении некоторых дополнительных, весьма широких, условий относительно распределений $\xi(y)$ при конечных y будет иметь место чисто экспоненциальное убывание $\pi(x) \sim ce^{-\beta x}$, где $\beta > 0$ есть решение уравнения $\varphi(\beta) = 1$, $c = \text{const}$.

2) В остальных случаях ($\mu_+ = 0$ или $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) < 1$)

$$\pi(x) \sim cG(x) \quad (1.4)$$

(также при выполнении некоторых дополнительных весьма широких условий; при $\mu_+ > 0$ вместо (1.4) можно писать также $\pi(x) \sim c\mathbf{P}\{\xi \geq x\}$).

3) Дополнительные условия, упомянутые выше, состоят главным образом в предположении, что $\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}$ при конечных y убывает с ростом t достаточно быстро (не медленнее, чем некоторая заданная функция, иногда совпадающая с $\mathbf{P}\{\xi \geq t\}$). Если же это предположение нарушено, то преобладающее влияние на асимптотику

$\pi(x)$ могут оказывать распределения $\xi(y)$ при конечных y , а не распределение ξ (см., например, теорему 2 и её следствия). В этом случае природа асимптотики $\pi(x)$ может быть весьма сложной.

В [3, 5] для специального класса цепей Маркова, обладающих так называемым свойством частичной однородности (см. ниже) получено явное представление для $\pi(x)$. Это представление даёт возможность осуществить асимптотический анализ поведения $\pi(x)$ во всех трёх упомянутых выше возможностях. В тех же работах весьма полно изучена асимптотика $\pi(x)$ для первой из этих трёх возможностей.

Основное внимание ниже будет уделено изучению второй и отчасти третьей возможностей. При этом для полноты картины мы приведём все основные известные результаты, описывающие асимптотику $\pi(x)$.

С точки зрения приложений можно отметить по крайней мере две области применения полученных результатов:

(а) Во многих приложениях $X(n)$ описывает «нагрузку» некоторой физической системы и необходимо знать вероятность того, что эта нагрузка в стационарном режиме превзойдёт некоторый заданный большой уровень x . Это и есть вероятность $\pi(x)$, приближённое значение которой изучается.

(б) Полученные результаты позволяют установить существование «моментов» $\mathbf{E}f(X(n))$ для заданного класса растущих функций f , оперировать этими моментами в разного рода задачах оптимизации и оценивать эти моменты с помощью метода Монте–Карло. Кроме того, если установлено, например, что $\pi(x) \sim cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$, где какие-либо из параметров c , α или β в явном виде неизвестны, то с помощью метода Монте–Карло можно оценивать также и эти параметры (см., например, [4, гл. 5, §5], [6, 9, 14]); при этом для получения более полной информации об оценках полезно знать также следующий член асимптотики $\pi(x)$, т. е. асимптотическое поведение $\pi(x) - cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$ при $x \rightarrow \infty$ (см. §9).

С точки зрения математического анализа приводимые ниже результаты относятся к мало исследованной задаче об изучении асимптотических свойств решения уравнения (1.1) при весьма широких предположениях относительно ядра $P(y, \cdot)$. Используемые при этом методы являются в основном вероятностными. Они потребовали разработки новых подходов, которые будут весьма полезными и при исследовании вероятностей больших отклонений для многомерных цепей Маркова.

2 Формулировки основных теорем о вероятностях больших отклонений

2.1. Однородные цепи. Как уже отмечалось, изучение асимптотики $\pi(x)$ для широкого класса цепей было начато в [2, 3, 5]. Напомним для полноты картины и для последующего использования основные результаты. Начнём с наиболее простых *однородных* случайных блужданий с задержкой в нуле, которые хорошо изучены, часто встречаются в приложениях и имеют вид

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

где $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределённых как ξ , $a = \mathbf{E}\xi < 0$; $x^+ = \max(0, x)$. Обозначим

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad S = \sup_{k \geq 0} S_k, \quad S^* = \sup_{k \geq 1} S_k. \quad (2.1)$$

Инвариантное распределение для однородной цепи существует тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi < 0$, и совпадает с распределением S .

Прежде чем сформулировать теорему об асимптотике вероятности $\pi(x) = \mathbf{P}\{S \geq x\}$, введём (следуя [2, стр. 163, 171]) понятия локально степенной и надстепенной функций.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(y)$ называется *локально степенной*, если для всякого t

$$\frac{f(y+t)}{f(y)} \rightarrow 1 \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Локально степенная функция $f(y)$ называется *надстепенной*, если для некоторого $c_0 < \infty$ и для всех y и p , $1/2 \leq p \leq 1$,

$$\frac{f(py)}{f(y)} \leq c_0. \quad (2.3)$$

Если локально степенная функция $f(y)$ не возрастает, то она является надстепенной тогда и только тогда, когда для любого $y \geq 0$

$$\frac{f(y/2)}{f(y)} \leq c_0 < \infty. \quad (2.4)$$

При рассмотрении решётчатых распределений нам понадобятся те же определения, в которых, однако, y и t пробегает лишь целые значения, а py заменено на целую часть $[py]$.

В обозначениях (1.2) возможны три случая: (а) $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) \geq 1$; тогда определён единственный корень $\beta > 0$ уравнения $\varphi(\mu) = 1$, так что $\varphi(\mu) < 1$ при $\mu \in (0, \beta)$; (б) $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) < 1$; тогда положим $\beta = \mu_+$; (с) $\mu_+ = 0$; в этом случае положим $\beta = 0$. Параметр β можно определить и единообразно следующим образом:

$$\beta = \sup\{\mu \geq 0 : \varphi(\mu) \leq 1\}. \quad (2.5)$$

Теорема 1 ([2, стр. 168, 172]). (а) Если $\varphi(\beta) \geq 1$ и $\varphi'(\beta) = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty$, то

$$\pi(x) = e^{-\beta x}(c_1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

где $c_1 > 0$ зависит от распределения ξ и известно в явном виде (см. [2]). Если $\varphi(\mu_+) > 1$ и распределение ξ решётчато или содержит положительную абсолютно непрерывную компоненту, то $o(1)$ можно заменить на $o(e^{-\varepsilon x})$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

(b) Если $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$ и функция $e^{\beta y}G(y)$ надстепенная (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3)), то $\mathbf{E}e^{\beta S} < \infty$ и

$$\pi(x) \sim c_2 G(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

$c_2 > 0$ также известно в явном виде (см. ниже).

(с) Если $\beta = 0$ и функция $G(y)$ надстепенная (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)), то

$$\pi(x) = (-1/\mathbf{E}\xi + o(1))G(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 5 будет следовать, что $c_2 = \beta(1 - \varphi(\beta))^{-1}\mathbf{E}e^{\beta S}$.

З а м е ч а н и е 1. Если $X(n)$ принимают лишь целые значения, то переменные x и y в утверждениях (а) и (b) следует брать (как и в нижеследующих теоремах 4, 5) целыми.

З а м е ч а н и е 2. Если $\beta > 0$ и функция $\tilde{F}(t) \equiv e^{\beta t}F(t)$ локально степенная (т. е. удовлетворяет условию (2.2)), то

$$G(t) \equiv \int_t^\infty F(u) du = (1/\beta + o(1))F(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В частности, в утверждении (b) теоремы можно писать $\pi(x) \sim (1 - \varphi(\beta))^{-1}\mathbf{E}e^{\beta S}F(x)$. Это замечание будет доказано в §8.

Утверждения (b) и (с) теоремы можно обобщить на так называемые субэкспоненциальные распределения F .

О п р е д е л е н и е [7]. Говорим, что распределение $\hat{F}(\cdot)$ на $[0, \infty)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$, $\beta \geq 0$, если функция $e^{\beta t}\hat{F}([t, \infty))$ локально степенная, $\hat{\varphi}(\beta) = \int_0^\infty e^{\beta t}\hat{F}(dt) < \infty$ и $\hat{F}^{*(2)}([t, \infty)) \sim \hat{c}\hat{F}([t, \infty))$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторого $\hat{c} > 0$, или, что то же, $\mathbf{P}\{\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 \geq t\} \sim \mathbf{P}\{\hat{\xi}_1 \geq t\}$, где $\hat{\xi}_i$ независимы и имеют распределение \hat{F} .

Функции класса $\mathcal{S}(0)$ называются субэкспоненциальными.

Известно (см., например, [7]), что с необходимостью $\hat{c} = 2\hat{\varphi}(\beta)$. Из приведённой в §7 леммы 5 вытекает, что если функция $e^{\beta t}\hat{F}([t, \infty))$ надстепенная и $\hat{\varphi}(\beta) < \infty$, то распределение \hat{F} принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$. Справедлива следующая модификация утверждений (а) и (b) теоремы 1.

Теорема 2А. (b) Если $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$ и распределение случайной величины $\xi I\{\xi \geq 0\}$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$, то $\mathbf{E}e^{\beta S} < \infty$ и

$$\pi(x) \sim c_2 G(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

(с) Если $\beta = 0$ и распределение случайной величины $\xi I\{\xi \geq 0\}$ субэкспоненциальное, то

$$\pi(x) = (-1/\mathbf{E}\xi + o(1))G(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Утверждение (с) теоремы можно найти в [18, 7, 8]; утверждение (b) — в [12]. Отметим, что во всех последующих теоремах и леммах в которых используется условие для той или иной функции быть надстепенной, это условие можно ослабить до условия принадлежности соответствующего распределения классу $\mathcal{S}(\beta)$.

2.2. Частично однородные цепи. Рассмотрим теперь более широкий класс цепей, называемых *почти однородными* (в пространстве). Они принимают значения в \mathbf{R}^+ и определяются соотношениями

$$X(n+1) = \begin{cases} (X(n) + \xi_n)^+ & \text{при } X(n) > 0, \\ \eta_n & \text{при } X(n) = 0, \end{cases}$$

где $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — две независимые между собой последовательности независимых случайных величин, распределённых соответственно как ξ и η , $a = \mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{E}\eta < \infty$. Обозначим $G^{(H)}(t) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\eta > t + u\} dH(u)$, $t > 0$, где $H(u)$ есть функция восстановления случайной величины χ , равной первой положительной сумме среди $-S_1, -S_2, \dots$. Введём в рассмотрение случайную величину γ , не зависящую от S , с распределением $\mathbf{P}\{\gamma > t\} = G^{(H)}(t)/G^{(H)}(0)$.

Теорема 2 ([3, 5]). *Если $-\infty < \mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{E}\eta < \infty$, то цепь $X(n)$ эргодична и*

$$\pi(x) = c_3 \mathbf{P}\{S + \gamma \geq x\}, \quad x > 0, \quad \pi(\{0\}) = 1 - c_3,$$

где

$$c_3 = \frac{G^{(H)}(0)}{\mathbf{P}\{S^* < 0\} + G^{(H)}(0)} < 1.$$

Теорема 2 даёт явное выражение для $\pi(x)$ и возможность получить весьма полное описание асимптотики $\pi(x)$ в зависимости от асимптотических свойств $\mathbf{P}\{\gamma \geq t\}$ и $\mathbf{P}\{S \geq t\}$. Справедливо, например, следующее следствие (используем обозначения (2.1) и (2.5)).

Следствие 1 ([3, 5]). (а) *Пусть $\beta > 0$. Если $\varphi(\beta) \geq 1$, $\varphi'(\beta) < \infty$ (это выполнено автоматически, если $\varphi(\mu_+) > 1$) и $\mathbf{E}e^{\eta\beta} < \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{S \geq x\} \sim c_1 e^{-\beta x}, \quad \pi(x) \sim c_3 c_1 e^{-\beta x}.$$

(б) *Если $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$, функция $e^{\beta t} G(t)$ надстепенная и $\mathbf{P}\{\eta \geq t\} = o(\mathbf{P}\{\xi \geq t\})$, то $\mathbf{E}e^{\gamma\beta} < \infty$ и*

$$\pi(x) \sim c_3 c_2 \mathbf{E}e^{\gamma\beta} G(x).$$

(в) *Если $\beta = 0$, функция $G(t)$ надстепенная (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)) и $\int_t^\infty \mathbf{P}\{\eta \geq u\} du = o(G(t))$ при $t \rightarrow \infty$, то*

$$\pi(x) \sim G(x) c_3 / (-\mathbf{E}\xi).$$

Постоянные c_1 и c_2 взяты из теоремы 1, а c_3 из теоремы 2.

В этом утверждении присутствуют ограничения на убывание $\mathbf{P}\{\eta \geq t\}$, которые сводят роль η лишь к её влиянию на постоянный множитель. Приведём одно из альтернативных утверждений, вытекающее из теоремы 2, в котором главную роль играет η (точнее говоря, утверждение (а)–(б) вытекает из теорем 2, 3 и приводимой в §7 леммы 5; утверждение (в) вытекает из приводимой в §6 теоремы 10).

Следствие 2 ([3, §23]). (a)–(b) Пусть $\beta > 0$. Если функция $e^{\mu t} \mathbf{P}\{\eta \geq t\}$ надстепенная для некоторого $\mu \in [0, \beta)$ и $\mathbf{E}e^{\mu \eta} < \infty$, то

$$\pi(x) \sim c_3 \mathbf{E}e^{\mu S} \mathbf{P}\{\gamma \geq x\}.$$

(c) Пусть $\beta = 0$. Если функция $G_\eta(t) = \int_t^\infty \mathbf{P}\{\eta > u\} du$ надстепенная и $G(t) = o(G_\eta(t))$, то

$$\pi(x) \sim (1 - c_3)G_\eta(x)/(-\mathbf{E}\xi).$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие типы соотношений между распределениями S и η . Основное правило может быть выражено, грубо говоря, следующим образом. Если $\mathbf{P}\{\gamma \geq x\} = o(\mathbf{P}\{S \geq x\})$, то асимптотика $\pi(x)$ повторяет с точностью до постоянной асимптотику $\mathbf{P}\{S \geq x\}$. Если $\mathbf{P}\{S \geq x\} = o(\mathbf{P}\{\gamma \geq x\})$, то асимптотика $\pi(x)$ повторяет с точностью до постоянной асимптотику $\mathbf{P}\{\gamma \geq x\}$. Это правило можно упростить ещё больше, заметив, что для «регулярных» распределений η функции $G^{(H)}(t)$ и $G_\eta(t) = \int_t^\infty \mathbf{P}\{\eta > u\} du$ ведут себя асимптотически одинаково (с точностью до постоянного множителя). Поэтому в сформулированном выше правиле функцию $\mathbf{P}\{\gamma \geq t\}$ (или $G^{(H)}(t)$) можно заменить на двойной хвост $G_\eta(t)$ распределения η . В случаях (b) и (c) теоремы 1 $\mathbf{P}\{S \geq t\} \sim c'G(t)$, $c' = \text{const}$ и определение асимптотики $\pi(x)$ сведётся к сравнению двойных хвостов ξ и η . В случае (a) всё будет определяться сравнением $G_\eta(t)$ и $e^{-\beta t}$.

Мы привели здесь достаточно полное описание асимптотики $\pi(x)$ для почти однородных цепей потому, что оно по сути сохраняется для значительно более общего класса так называемых *частично однородных* цепей.

Обозначим $\xi(y) = X(y, 1) - y$ приращение цепи, выходящей из точки y , за один шаг. Цепь X со значениями в \mathbf{R} называется *N -частично однородной* (или просто *частично однородной*), если при $y \in (N, \infty)$ и $y + B \subset (N, \infty)$ распределение $P(y, y + B) = F(B)$ от y не зависит. Случайную величину с распределением $F(\cdot)$ обозначим ξ . Почти однородное блуждание является 0-частично однородным. При $y \leq N$ распределение $\xi(y)$ может быть любым.

Введём в рассмотрение «укрупнённую» (или «усреднённую») цепь $X^{(N)}$ со значениями в $[N, \infty)$, для которой состояние $\{N\}$ «соответствует» области $(-\infty, N]$ для цепи X . Определим переходные вероятности $P^{(N)}(y, B)$ цепи $X^{(N)}$ соотношениями

$$\begin{aligned} P^{(N)}(y, B) &= P(y, B) \quad \text{при } y > N, B \subset (N, \infty), \\ P^{(N)}(y, \{N\}) &= P(y, (-\infty, N]) \quad \text{при } y > N, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} P^{(N)}(N, B) &= \int_{-\infty}^N \frac{\pi(dy)}{\pi((-\infty, N])} P(y, B) \quad \text{при } B \subset (N, \infty), \\ P^{(N)}(N, \{N\}) &= 1 - P^{(N)}(N, (N, \infty)). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть (см. также [3, §23], [11, §7]), что новая цепь $X^{(N)}$ обладает тем свойством, что для неё существует инвариантная мера $\pi^{(N)}$, совпадающая в области (N, ∞) с π . Таким образом, с точки зрения изучения асимптотических свойств $\pi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ цепи X и $X^{(N)}$ эквивалентны.

Если цепь X N -частично однородна, то цепь $X^{(N)} - N$ является почти однородной (0-частично однородной) и к ней применимы теорема 2 и следствия 1, 2, где под $\eta \geq 0$ надо понимать случайную величину с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta \geq t\} = \int_{-\infty}^N \frac{\pi(du)}{\pi((-\infty, N])} \mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq N + t\}, \quad t > 0.$$

Поэтому, если, например, выполнены условия следствия 1(a) на величину ξ и

$$\sup_{y \leq N} \mathbf{E} e^{(y + \xi(y))\beta} < \infty,$$

то условия этого следствия будут выполнены и для η (применительно к цепи $X^{(N)} - N$), и, стало быть,

$$\pi(x) \sim c_3 c_1 e^{-\beta(x-N)}.$$

Сказанное выше позволяет считать проблему асимптотического анализа $\pi(x)$ для частично однородных цепей исследованной достаточно полно.

Отметим также, что для осциллирующего случайного блуждания (которое является 0-частично однородным) распределения η , π и константу c для «укрупнённой» цепи $X^{(0)}$ удаётся посчитать в явном виде (см. [4]).

2.3. Асимптотически однородные цепи. Более сложным объектом изучения являются *асимптотически однородные* цепи, т. е. цепи, для которых известно лишь, что распределение $\xi(y)$ слабо сходится при $y \rightarrow \infty$ к распределению случайной величины ξ . Этот факт мы будем записывать в виде $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \rightarrow \infty$. Здесь разнообразие асимптотик $\pi(x)$ может быть бóльшим. Однако при введении ряда естественных ограничений картина в целом будет аналогична тому, что получено в следствиях 1 и 2.

Остановимся сначала на грубой асимптотике. Как и ранее, обозначим $\beta = \sup\{\mu \geq 0 : \varphi(\mu) \leq 1\}$.

Теорема 3 ([3, 5]). Пусть $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \rightarrow \infty$ и $\sup_y \mathbf{E} e^{\beta \xi(y)} < \infty$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \pi(x)}{x} = -\beta.$$

Из теоремы следует выполнение принципа больших уклонений (см., например, [17, стр. 3]) с функцией уклонений $I(t) = -\beta t$.

Изучение точной асимптотики $\pi(x)$ требует более жёстких условий. Здесь до настоящего времени был рассмотрен лишь крамеровский случай, т. е. случай, когда существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) = 1$.

Теорема 4 ([3, 5]). Пусть $\varphi(\beta) = 1$, $\varphi'(\beta) = \mathbf{E} \xi e^{\beta \xi} < \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t} |\mathbf{P}\{\xi(y) < t\} - \mathbf{P}\{\xi < t\}| dt \leq l(y), \quad (2.7)$$

где $l(y)$ — правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$, т. е. $l(uy) \sim u^{-\alpha}l(y)$ при $y \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $u > 0$. Пусть далее

$$\int_0^{\infty} l(y) dy < \infty \quad (2.8)$$

(так что $\alpha \geq 1$). Тогда

$$\pi(x) = e^{-\beta x}(c_4 + o(1)), \quad 0 \leq c_4 < \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

Если, кроме того, при всех y

$$\pi(y) > 0 \quad \mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} \geq 1 - \gamma(y), \quad (2.9)$$

где

$$\gamma(y) \geq 0 \quad \int_1^{\infty} \gamma(y)y(\ln y) dy < \infty, \quad (2.10)$$

то $c_4 > 0$.

З а м е ч а н и е 3. При невыполнении (2.7) асимптотика $\pi(x)$, как показывает следствие 2, может быть существенно иной. Нарушение (2.7), состоящее, например, в том, что $\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} = \infty$, $y \leq y_0$, означает, что убывание $\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}$ при $t \rightarrow \infty$ и $y \leq y_0$ происходит гораздо медленнее, чем убывание $\mathbf{P}\{\xi \geq t\}$. В этом случае основной вклад в асимптотику $\pi(x)$ будет вносить $\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}$, $y \leq y_0$, а саму асимптотику можно оценивать с помощью построения близких между собой мажорант $\xi_+ \geq_{st} \xi(y)$ и минорант $\xi_- \leq_{st} \xi(y)$ при достаточно больших y , $\mathbf{E}\xi_+ < 0$, и вслед за этим построения частично однородных цепей X_+ и X_- , соответственно мажорирующих и минорирующих исходную цепь X .

З а м е ч а н и е 4. Условие (2.8) близко к необходимому, о чём свидетельствует следующий пример. Пусть цепь X принимает значения в $\mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\mathbf{P}\{\xi(x) = -1\} = (1 + \delta + l(x))/2$, $\mathbf{P}\{\xi(x) = 1\} = (1 - \delta - l(x))/2$, $x \in \mathbf{Z}^+$, $\delta > 0$, $l(x) \downarrow 0$. Тогда $\beta = \ln \frac{1+\delta}{1-\delta}$ и, как следует из вычислений ([10, стр. 79], [11, стр. 98]),

$$\pi(\{x\}) \sim c_5 e^{-\beta x} \exp \left\{ -c_6 \sum_{k=1}^x l(k) \right\}$$

для некоторых $c_5, c_6 > 0$. В случае, когда нарушено условие (2.8), т. е. $\sum l(x) = \infty$, асимптотика $\pi(\{x\})$ отличается от $e^{-\beta x}$.

З а м е ч а н и е 5. Вопрос о существенности условия (2.10) остаётся открытым.

Остаются не рассмотренными две возможности $\varphi(\beta) < 1$ и $\beta = 0$.

Рассмотрим сначала случай $\varphi(\beta) < 1$. В этом случае $\beta = \mu_+ > 0$. Положим $\tilde{F}(y) = e^{\beta y} \mathbf{P}\{\xi \geq y\}$.

Теорема 5. Пусть $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$, функция \tilde{F} является надстепенной (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3)) и

$$|\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\} - \mathbf{P}\{\xi \geq t\}| \leq \delta(y) \mathbf{P}\{\xi \geq t\}, \quad (2.11)$$

где $\delta(y) \downarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Тогда, если при каждом y существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}}{\mathbf{P}\{\xi \geq t\}} = c(y) < \infty, \quad (2.12)$$

то

$$\int_0^\infty e^{\beta y} \pi(dy) < \infty, \quad (2.13)$$

$$\pi(x) \sim G(x) \frac{\beta}{1 - \varphi(\beta)} \int_0^\infty c(y) e^{\beta y} \pi(dy). \quad (2.14)$$

З а м е ч а н и е 6. Условие (2.12) означает, что все «хвосты» $\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}$ убывают «не медленнее», чем $\mathbf{P}\{\xi \geq t\}$. Если это свойство нарушено, то можно рекомендовать тот же путь оценивания $\pi(x)$, что и в замечании 2.

Теорема 5 будет доказана в §8.

Пусть теперь $\beta = 0$. Этот случай возникает, например, если $\mathbf{P}\{\xi \geq t\}$ убывает степенным образом.

Теорема 6. Пусть цепь $\{X(n)\}$ асимптотически однородна, т. е. $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \rightarrow \infty$, $a \equiv \mathbf{E}\xi < 0$. Пусть скачки $\{\xi(y)\}$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y . Пусть функция $G(t)$ надстепенная (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)) и для некоторых $c(y)$ выполняется

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}}{\mathbf{P}\{\xi \geq t\}} \rightarrow c(y)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по y . Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\pi(x) \sim \frac{G(x)}{-a} \int_0^\infty c(y) \pi(dy). \quad (2.15)$$

Таким образом, соотношение (2.14) переходит «по непрерывности» в (2.15).

Теорема 6 следует из теоремы 10, которая будет приведена и доказана в §6.

Последующие §3, 4 и 6 содержат также некоторое обобщение теоремы 6 (см. теорему 10) и ряд оценок для $\pi(x)$, которые представляют и самостоятельный интерес. Из теорем 8 и 9 вытекает также следующая грубая теорема о больших уклонениях в степенном случае.

Теорема 7. Пусть $\xi(y) \Rightarrow \xi$, $a \equiv \mathbf{E}\xi < 0$ и случайные величины $|\xi(y)|$ интегрируемы равномерно по y . Пусть $\alpha > 1$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c' > 0$, $c'' < \infty$ и t_0 такие, что при $t > t_0$ для всех y выполняется

$$c' t^{-\alpha-\varepsilon} \leq \mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\} \leq c'' t^{-\alpha+\varepsilon}.$$

Тогда

$$\ln \pi(x) \sim -(\alpha - 1) \ln x.$$

Оценки скорости сходимости в теореме 4 (крамеровский случай), необходимые для построения статистических оценок, приведены в §9.

3 Неравенство снизу для хвоста инвариантного распределения

Пусть цепь $\{X(n)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, как и прежде, принимает значения в \mathbf{R}^+ и $\xi(y)$ — случайная величина, отвечающая скачку цепи $\{X(n)\}$ из состояния y ; $F_y(\cdot)$ — её распределение, т. е.

$$F_y(B) = \mathbf{P}\{\xi(y) \in B\} = P(y, y + B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^+).$$

Обозначим $F_y(t) = F_y([t, \infty))$,

$$G_y(t) \equiv \int_t^\infty F_y(u) du, \quad (3.1)$$

$$\underline{a}(y) \equiv \inf_{u > y} \mathbf{E}\xi(u). \quad (3.2)$$

Справедливо следующее неравенство снизу для вероятностей больших уклонений. Свойство асимптотической однородности цепи X здесь и в дальнейшем, если это специально не оговорено, не предполагается.

Лемма 1. Пусть

$$\sup_y \mathbf{E}|\xi(y)| < \infty \quad (3.3)$$

и N таково, что $\pi((N, \infty)) > 0$. Тогда $\underline{a}(N) \leq 0$ и

$$\begin{aligned} \pi((N, \infty)) &\geq \frac{1}{-\underline{a}(N)} \int_0^N G_u(N - u) \pi(du) \geq \\ &\geq \frac{1}{-\underline{a}(N)} \int_0^N G_u(N) \pi(du) \end{aligned}$$

(здесь принято $0/0 = 0$).

Это неравенство оценивает значение инвариантной меры на (N, ∞) через значения той же инвариантной меры, но в дополнительной области $[0, N]$. Позже будет выяснено, что в «регулярном случае» мера π в правой части влияет лишь на постоянный множитель в оценке снизу для $\pi(N)$.

Доказательство. Рассмотрим укрупнённую цепь $\{X^{(N)}(n)\}$ со значениями в фазовом пространстве $[N, \infty)$ и скачками $\xi^{(N)}(y)$ (см. (2.6)). Так как по построению при $y > N$ имеем $\xi^{(N)}(y) \geq_{\text{st}} \xi(y)$, то ввиду определения (3.2) функции $\underline{a}(y)$ при $y > N$ выполняется

$$\mathbf{E}\xi^{(N)}(y) \geq \underline{a}(N). \quad (3.4)$$

Ввиду условия (3.3) имеем $\sup_{y \geq N} \mathbf{E}|\xi^{(N)}(y)| < \infty$. Следовательно, можно применить тождество равновесия (см., например, [3, §8] или [11, §2]) и получить, что

$$0 = \int_N^\infty \mathbf{E}\xi^{(N)}(u) \pi^{(N)}(du). \quad (3.5)$$

В силу (3.4) это означает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi^{(N)}(N)\pi((-\infty, N]) &= \mathbf{E}\xi^{(N)}(N)\pi^{(N)}(\{N\}) = -\int_{N+0}^{\infty} \mathbf{E}\xi^{(N)}(u)\pi(du) \leq \\ &\leq -\underline{a}(N)\int_{N+0}^{\infty} \pi(du) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда и из неравенства $\pi((N, \infty)) > 0$ имеем, в частности, что $\underline{a}(N) \leq 0$.

Из (3.6) следует также, что

$$\pi((N, \infty)) \geq \frac{1}{-\underline{a}(N)}\pi((-\infty, N])\mathbf{E}\xi^{(N)}(N). \quad (3.7)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \pi((-\infty, N])\mathbf{E}\xi^{(N)}(N) &= \pi((-\infty, N])\frac{\int_{-\infty}^N \mathbf{E}\{u + \xi(u) - N; u + \xi(u) > N\}\pi(du)}{\pi((-\infty, N])} = \\ &= \int_{-\infty}^N \int_{N-u}^{\infty} F_u(t) dt \pi(du) = \\ &= \int_{-\infty}^N G_u(N-u)\pi(du). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отсюда и из (3.7) следует утверждение леммы.

4 Оценка сверху для хвоста стационарного распределения

Пусть $q(y)$ — неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая функция; обозначим $Q(y) \equiv \int_y^{\infty} q(u) du$. Пусть $\beta \in [0, \infty)$, функция $Q_1(y) \equiv e^{\beta y}Q(y)$ является надстепенной (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3)) и

$$\int_0^{\infty} e^{\beta y}q(y) dy < \infty. \quad (4.1)$$

Лемма 2. Пусть для любых $y, t \geq 0$

$$\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\} \leq q(t) \quad (4.2)$$

и для некоторых числа N и случайной величины $\bar{\xi}$, $\mathbf{E}\bar{\xi} < 0$, выполняется

$$\xi(y) \leq_{st} \bar{\xi} \quad \text{при } y \geq N. \quad (4.3)$$

Тогда, если (а) $\beta > 0$ и $\mathbf{E}e^{\beta\bar{\xi}} < 1$ либо (б) $\beta = 0$, то существует c такое, что при всех x

$$\pi(x) \leq cQ(x).$$

Доказательство начнём со случая $\beta > 0$, $\mathbf{E}e^{\beta\bar{\zeta}} < 1$. В силу условий (4.1)–(4.3) существуют случайная величина ζ и число T такие, что $\zeta \geq -T$ с вероятностью 1,

$$\zeta \geq_{\text{st}} \xi(y) \quad \text{при } y \geq N, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{P}\{\zeta \geq t\} = q(t) \quad \text{при } t \geq T, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{E}\zeta < 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}e^{\beta\zeta} < 1. \quad (4.6)$$

Положим $M = N + 2T$. Докажем, что для всех y, z таких, что $0 \leq y \leq z$ и $z \geq M$ имеет место неравенство

$$y + \xi(y) \leq_{\text{st}} z + \zeta. \quad (4.7)$$

Если $N \leq y \leq z$ и $z \geq M$, то это неравенство выполнено в силу (4.4). Если $y < N$ и $z \geq M$, то для $u \geq -T$ выполняется $z - y + u \geq T$ и, следовательно, ввиду (4.2) и (4.5) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{y + \xi(y) \geq z + u\} &\leq q(z - y + u) = \\ &= \mathbf{P}\{\zeta \geq z - y + u\} \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{z + \zeta \geq z + u\}. \end{aligned}$$

Для $u < -T$ последнее неравенство верно в силу того, что $\zeta \geq -T$. Таким образом, неравенство (4.7) выполнено и в случае, когда $y < N$ и $z \geq M$. Следовательно, (4.7) действительно имеет место.

Рассмотрим цепь $\{Y(n)\}$ с неотрицательными значениями, определённую равенством

$$Y(n+1) = (Y(n) + \zeta_n)^+,$$

где случайные величины $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ суть независимые копии ζ .

Пусть $X(0)$ имеет распределение π . Тогда при любом n распределение $X(n)$ есть также π . Если $X(n-1) \leq_{\text{st}} M + Y(n-1)$, то в силу (4.7) имеем

$$X(n) \leq_{\text{st}} M + Y(n-1) + \zeta_n \leq M + (Y(n-1) + \zeta_n)^+ = M + Y(n).$$

Таким образом, если $Y(0) \equiv_{\text{st}} X(0)$, то для любого n выполняется $X(n) \leq_{\text{st}} M + Y(n)$. В частности, для любого x

$$\pi(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M + Y(n) \geq x\} = \pi_Y([x - M, \infty)), \quad (4.8)$$

где π_Y означает стационарное распределение цепи Y . Цепь $\{Y(n)\}$ есть однородная цепь со значениями в \mathbf{R}^+ , причём «порождающая» её случайная величина ζ удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, для некоторого $c < \infty$ выполнено неравенство $\pi_Y([x - M, \infty)) \leq cQ(x - M)$. В сочетании с (4.8) и сходимостью $Q(x - M)/Q(x) \rightarrow e^{\beta M}$ последнее неравенство доказывает утверждение леммы в случае $\beta > 0$.

Пусть $\beta = 0$. Тогда вышеприведённые рассуждения останутся в силе, если исключить из формулы (4.6) неравенство $\mathbf{E}e^{\beta\zeta} < 1$. Лемма 2 доказана.

5 Две леммы о «локальном свойстве»

Пусть положительная невозрастающая функция $f(x)$ является локально степенной, т. е. удовлетворяет условию (2.2). Поскольку функция f не возрастает, то она является локально степенной тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$ такая, что

$$T_n - T_{n-1} \uparrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

$$f(T_n)/f(T_{n-1}) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Пусть $h(x)$ — неотрицательная, невозрастающая функция.

Лемма 3. Пусть $h(x) \leq f(x)$. Тогда существует последовательность отрезков $[t_n, s_n] \subseteq [T_{n-1}, T_n]$ таких, что $s_n - t_n \rightarrow \infty$ и $h(t_n) - h(s_n) = o(f(t_n))$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Ввиду (5.1) существует последовательность $u_n, u_n > 0$, такая, что $u_n \rightarrow \infty$ и $u_n = o(T_n - T_{n-1})$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через l_n наибольшее целое число, не превосходящее $(T_n - T_{n-1})/u_n$; по выбору u_n имеем $l_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого n существует точка $t_n \in [T_{n-1}, T_n - u_n]$, для которой

$$h(t_n) - h(t_n + u_n) = o(f(t_n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предположим, что, напротив, последнее соотношение не имеет места. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность индексов $n(k), n(k) \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что для любого $t \in [T_{n(k)-1}, T_{n(k)} - u_{n(k)}]$ выполняется

$$h(t) - h(t + u_{n(k)}) \geq \varepsilon f(t). \quad (5.3)$$

В частности, ввиду неравенства $h \leq f$,

$$h(t + u_{n(k)}) \leq h(t) - \varepsilon f(t) \leq (1 - \varepsilon)h(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h(T_{n(k)} - u_{n(k)}) &\leq (1 - \varepsilon)^{l_{n(k)}-1} h(T_{n(k)-1}) \leq \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{l_{n(k)}-1} f(T_{n(k)-1}) = \\ &= o(f(T_{n(k)} - u_{n(k)})), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу сходимостей $l_{n(k)} \rightarrow \infty$ и (5.2). Противоречие с (5.3) при $t = T_{n(k)} - u_{n(k)}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $h(x) \leq f(x)$. Тогда существуют функции $t(x)$ и $s(x)$ такие, что $[t(x), s(x)] \subseteq [0, x]$,

$$\begin{aligned} s(x) - t(x) &\rightarrow \infty, \\ f(N(x))/f(x) &\rightarrow 1, \\ h(t(x)) - h(s(x)) &= o(f(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $N(x)$ есть середина отрезка $[t(x), s(x)]$.

Доказательство. Если $x \in [T_n, T_{n+1})$, то положим $t(x) \equiv t_n$, $s(x) \equiv s_n$. Тогда $[t(x), s(x)] = [t_n, s_n] \subseteq [T_{n-1}, T_n] \subseteq [0, x]$, $s(x) - t(x) \rightarrow \infty$ и по лемме 3 $h(t(x)) - h(s(x)) = o(f(t_n))$ при $x \rightarrow \infty$. Так как функция f не возрастает, то $f(T_{n-1}) \geq f(t_n) \geq f(N(x)) \geq f(x) \geq f(T_{n+1})$. Отсюда ввиду условия (5.2) вытекают требуемые свойства функций $N(x)$, $t(x)$ и $s(x)$. Лемма доказана.

6 Теоремы о вероятностях больших уклонений в случае $\beta = 0$

Пусть $\underline{G}(y)$ — положительная невозрастающая функция, $\underline{G}(y) \downarrow 0$; функция $G_y(t)$ определена в (3.1). Положим

$$\underline{c}(y) \equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{G_y(t)}{\underline{G}(t)}, \quad \underline{c} \equiv \int_0^\infty \underline{c}(y) \pi(dy), \quad (6.1)$$

$$\underline{a}(y) \equiv \inf_{z > y} \mathbf{E}\xi(z), \quad \underline{a} \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} \underline{a}(y). \quad (6.2)$$

Справедлива следующая оценка снизу вероятностей больших уклонений инвариантного распределения.

Теорема 8. Пусть $\sup_y \mathbf{E}|\xi(y)| < \infty$. Тогда

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\underline{G}(x)} \geq \frac{\underline{c}}{-\underline{a}}$$

(здесь принято $0/0 = 0$ и $\infty/\infty = 0$).

Как показывают примеры (см. теорему 1(с), следствие 1(с)), константа в правой части неравенства в случае «степенных» хвостов распределения правильная. Чтобы неравенство было максимально информативно, следует в качестве \underline{G} выбирать самый «толстый хвост» среди G_y .

Доказательство теоремы. Выберем произвольно $0, 0 < \underline{c}$, и $a_0, a_0 < \underline{a}$. Ввиду определений (6.1) и (6.2), а также леммы Фату существует $x_0 < \infty$ для которого $\underline{a}(x_0) > a_0$ и

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^{x_0} \frac{G_y(t)}{\underline{G}(t)} \pi(dy) \geq c_0.$$

По лемме 1 при $x > x_0$ справедлива оценка

$$\frac{\pi(x)}{\underline{G}(x)} \geq \frac{1}{-\underline{a}(x_0)} \int_0^{x_0} \frac{G_y(t)}{\underline{G}(t)} \pi(dy).$$

Следовательно,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\underline{G}(x)} \geq \frac{c_0}{-a_0}.$$

В силу произвольности выбора чисел $c_0 < c$ и $a_0 < a$ теорема доказана.

В следующей теореме приводится верхняя оценка для вероятностей больших отклонений инвариантной меры более точная, нежели в лемме 2. Будем предполагать, что функция $\bar{G}(t)$ является достаточно регулярной. Именно, в дальнейшем предполагаем, что $\bar{G}(t) = \int_t^\infty g(u) du$, где функция g положительна и не возрастает. Предполагаем также, что функция $\bar{G}(t)$ является надстепенной (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)). Положим

$$\bar{c}(y) \equiv \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{G_y(t)}{\bar{G}(t)}, \quad \bar{c} \equiv \int_0^\infty \bar{c}(y) \pi(dy), \quad (6.3)$$

$$\bar{a}(y) \equiv \sup_{z > y} \mathbf{E}\xi(z), \quad \bar{a} \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{a}(y). \quad (6.4)$$

Теорема 9. Пусть скачки $\{\xi(y)\}$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y . Пусть далее существуют числа N , $\hat{c} < \infty$ и случайная величина $\bar{\xi}$, $\mathbf{E}\bar{\xi} < 0$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\} \leq \hat{c}g(t) \quad \text{при } y, t \geq 0, \quad (6.5)$$

$$\xi(y) \leq_{st} \bar{\xi} \quad \text{при } y \geq N. \quad (6.6)$$

Тогда, если функция \bar{G} удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4), то справедливо соотношение

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\bar{G}(x)} \leq \frac{\bar{c}}{-\bar{a}}.$$

З а м е ч а н и е 7. Ввиду условия (6.5) $\bar{c}(y) \leq \hat{c}$ для любого $y \geq 0$; следовательно, $\bar{c} \leq \hat{c}$. Ввиду условия (6.6) $\bar{a} < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из леммы 2 при $q(y) = \hat{c}g(y)$, $Q(y) = \hat{c}\bar{G}(y)$ следует существование c_* такого, что

$$\pi(x) \leq c_*\bar{G}(x). \quad (6.7)$$

Следовательно, поскольку $\bar{G}(x)$ есть локально степенная функция и не возрастает, то выполнены условия леммы 4 для $f(x) = c_*\bar{G}(x)$ и $h(x) = \pi(x)$. Поэтому существуют функции $t(x)$ и $s(x)$ такие, что $[t(x), s(x)] \subseteq [0, x]$,

$$s(x) - t(x) \rightarrow \infty, \quad (6.8)$$

$$\bar{G}(N(x))/\bar{G}(x) \rightarrow 1, \quad (6.9)$$

$$\pi([t(x), s(x)]) = o(\bar{G}(x)), \quad (6.10)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $N(x)$ — середина отрезка $[t(x), s(x)]$.

Рассмотрим укрупнённую цепь Маркова $\{X^{(N(x))}(n)\}$ со значениями в фазовом пространстве $[N(x), \infty)$ (см. (2.6)). Из тождества равновесия (3.5) получаем

$$0 = \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(N(x))\pi([0, N(x)]) + \int_{N(x)+0}^\infty \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \pi(dy),$$

где, согласно (3.8),

$$\mathbf{E}\xi^{(N(x))}(N(x))\pi([0, N(x)]) = \int_0^{N(x)} G_y(N(x) - y) \pi(dy).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv - \int_{s(x)+0}^{\infty} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \pi(dy) = \\ &= \int_{N(x)+0}^{s(x)} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \pi(dy) + \left(\int_0^{N(x)/2} + \int_{N(x)/2+0}^{t(x)} + \int_{t(x)+0}^{N(x)} \right) G_y(N(x) - y) \pi(dy) \equiv \\ &\equiv I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned} \quad (6.11)$$

(предполагаем, не ограничивая общности, что $N(x)/2 < t(x)$).

Так как скачки $\xi(y)$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y и $s(x) - N(x) \rightarrow \infty$, то

$$\sup_{y>s(x)} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \rightarrow \bar{a} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Поэтому $I_1 \geq (-\bar{a} + o(1))\pi((s(x), \infty))$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, ввиду неравенства $s(x) \leq x$ и (6.7),

$$I_1 \geq -\bar{a}\pi(x) + o(\bar{G}(x)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.12)$$

Оценим I_2 . Поскольку

$$\sup_{y>N(x)} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \leq \sup_{y>N(x)} \mathbf{E}|\xi(y)| \leq \sup_{y \geq 0} \mathbf{E}|\xi(y)| < \infty,$$

то в силу (6.10)

$$\begin{aligned} I_2 &= O(\pi((N(x), s(x)])) = \\ &= o(\bar{G}(x)), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Оценим значение $I_3/\bar{G}(x)$. Если $y \leq N(x)/2$, то по условию (2.4)

$$\frac{G_y(N(x) - y)}{\bar{G}(N(x))} \leq c_0.$$

Кроме того, по определению (6.3) для любого y

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{G_y(N(x) - y)}{\bar{G}(N(x))} = \bar{c}(y).$$

Следовательно, ввиду (6.9) и леммы Фату,

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{I_3}{\bar{G}(N(x))} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{I_3}{\bar{G}(x)} \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \bar{c}(y) \pi(dy) \equiv \bar{c}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Используя последовательно условие (6.5), неравенство (6.7), (6.9) и то, что функция \overline{G} удовлетворяет условию (2.4), оценим $I_4/\overline{G}(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{I_4}{\overline{G}(x)} &\leq \int_{N(x)/2}^{t(x)} \frac{G_y(N(x) - t(x))}{\overline{G}(x)} \pi(dy) \leq \\
&\leq \widehat{c} \frac{\overline{G}(N(x) - t(x))}{\overline{G}(x)} \pi([N(x)/2, \infty)) \leq \\
&\leq \widehat{c} c_* \frac{\overline{G}(N(x) - t(x)) \overline{G}(N(x)/2)}{\overline{G}(x)} = \\
&= O(\overline{G}(N(x) - t(x))) \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

при $x \rightarrow \infty$, так как $N(x) - t(x) \rightarrow \infty$. Оценим $I_5/\overline{G}(x)$: по условию (6.5)

$$\frac{I_5}{\overline{G}(x)} \leq \frac{\widehat{c} \overline{G}(0)}{\overline{G}(x)} \pi([t(x), N(x)]) \rightarrow 0 \tag{6.16}$$

при $x \rightarrow \infty$, в силу (6.10). Подставив соотношения (6.12)–(6.16) в (6.11), получим утверждение теоремы.

Из теорем 8 и 9 вытекает

Теорема 10. Пусть скачки $\{\xi(y)\}$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y и

$$\mathbf{E}\xi(y) \rightarrow a < 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \tag{6.17}$$

Пусть для некоторых числа N и случайной величины $\bar{\xi}$, $\mathbf{E}\bar{\xi} < 0$, выполняется

$$\xi(y) \leq_{st} \bar{\xi} \quad \text{при } y \geq N \tag{6.18}$$

и невозрастающая функция $g(t)$ такова, что

$$\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\} \leq g(t) \quad \text{для любых } y, t \geq 0. \tag{6.19}$$

Пусть существует $G_*(t) = \int_t^\infty g(u) du$ и функция G_* является надстепенной (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)). Тогда, если для любого y существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G_y(t)}{G_*(t)} \equiv c(y),$$

то имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{G_*(x)} = \frac{1}{-a} \int_0^\infty c(y) \pi(dy).$$

Из последней теоремы следует теорема 6 о точной асимптотике вероятностей больших отклонений для асимптотически однородных цепей в случае $\beta = 0$. Из теорем 8 и 9 вытекает также теорема 7 о грубой асимптотике в том же случае $\beta = 0$.

7 Асимптотика распределений свёрток мер

Пусть μ есть вероятностная мера в \mathbf{R} , а μ_1 и μ_2 — две произвольные меры в \mathbf{R} (знакопеременные, вообще говоря), вариация которых допускает оценку

$$\mathbf{Var}_{[x,\infty)} \mu_1 \leq c e^{\beta|x|/2}, \quad \mathbf{Var}_{[x,\infty)} \mu_2 \leq c e^{\beta|x|/2} \quad (7.1)$$

для некоторых $c < \infty$ и $\beta \geq 0$. Обозначим $\mu(x) \equiv \mu([x, \infty))$ и $\mu_k(x) \equiv \mu_k([x, \infty))$, $k = 1, 2$. Предполагаем, что

$$\mu_k(x) = (\rho_k + o(1))\mu(x), \quad k = 1, 2, \quad (7.2)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $\rho_k \in \mathbf{R}$, а также, что

$$b \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\beta y} \mu(dy) < \infty. \quad (7.3)$$

Тогда существуют интегралы $b_1 \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\beta y} \mu_1(dy)$ и $b_2 \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\beta y} \mu_2(dy)$.

Лемма 5. *Если $e^{\beta x} \mu(x)$ — надстепенная функция (т. е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3)), то при $x \rightarrow \infty$ справедливо соотношение*

$$(\mu_2 * \mu_1)([x, \infty)) = \mu(x)(\rho_2 b_1 + \rho_1 b_2 + o(1)).$$

Доказательство. Имеем равенства

$$\begin{aligned} (\mu_2 * \mu_1)([x, \infty)) &= - \left(\int_{-\infty}^{x/2} + \int_{x/2}^{\infty} \right) \mu_1(x-t) d\mu_2(t) = \\ &= - \int_{-\infty}^{x/2} \mu_1(x-t) d\mu_2(t) - \mu_1(x-t)\mu_2(t) \Big|_{x/2}^{\infty} + \int_{x/2}^{\infty} \mu_2(t) d\mu_1(x-t). \end{aligned}$$

Из условия (7.1) имеем $\mu_1(x-t) = O(e^{\beta t/2})$ при $t \rightarrow \infty$ для всякого фиксированного x , а из условий (7.2) и (7.3) вытекает, что $\mu_2(t) = o(e^{-\beta t})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{(\mu_2 * \mu_1)([x, \infty))}{\mu(x)} &= \\ &= - \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_1(x-t)}{\mu(x)} d\mu_2(t) + \frac{\mu_1(x/2)\mu_2(x/2)}{\mu(x)} - \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)} d\mu_1(t) \equiv \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (7.4)$$

По условиям (7.2) и (2.3), а также в силу соотношения $\mu(x/2) = o(e^{-\beta x/2})$ имеем

$$\begin{aligned} \mu_1(x/2)\mu_2(x/2) &= O(\mu(x/2)\mu(x/2)) = \\ &= \mu(x)O(e^{\beta x/2})\mu(x/2) = o(\mu(x)), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Вычислим предел I_1 . Так как $\mu_1(x-t)/\mu(x-t) \rightarrow \rho_1$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \leq x/2$, то

$$I_1 = (-\rho_1 + o(1)) \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} d\mu_2(t) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

По условию (2.2) при всяком фиксированном t

$$\frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} \rightarrow e^{\beta t} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при $0 \leq t \leq x/2$ по условию (2.3) $\mu(x-t)/\mu(x) \leq e^{\beta t} c_0$, а при $t < 0$ выполняется $\mu(x-t)/\mu(x) \leq 1$. Таким образом, ввиду условия (7.3) подинтегральное выражение в (7.6) допускает интегрируемую мажоранту. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$I_1 \rightarrow -\rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t} d\mu_2(t) = \rho_1 b_2 \quad (7.7)$$

при $x \rightarrow \infty$. Поскольку меры μ_1 и μ_2 входят в (7.4) симметричным образом, то $I_3 \rightarrow \rho_2 b_1$ при $x \rightarrow \infty$. Подставляя значения пределов I_1 и I_3 в (7.4) и учитывая (7.5), получаем утверждение леммы.

Докажем следующую лемму для k -ой свёртки меры μ .

Лемма 6. *Если $e^{\beta x} \mu(x)$ — надстепенная функция, то для любого $k = 1, 2, \dots$ при $x \rightarrow \infty$*

$$\mu^{*(k)}([x, \infty)) = \mu(x)(kb^{k-1} + o(1)).$$

Кроме того, имеет место оценка: для любого $\delta > 0$ существуют $c < \infty$ и $x_0 < \infty$ такие, что при $x \geq x_0$ и любом $k = 1, 2, \dots$

$$\mu^{*(k)}([x, \infty)) \leq c\mu(x)(b + \delta)^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение вытекает из леммы 5. Докажем второе утверждение, аккуратно оценив каждое из трёх слагаемых в (7.4) для $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu^{*(k-1)}$. Как отмечалось выше, при $x \rightarrow \infty$

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} d\mu(t) \rightarrow -\int e^{t\beta} d\mu(t) \equiv b.$$

Следовательно, существует $x_0 = x_0(\delta)$ такое, что при всех $x \geq x_0$

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} d\mu(t) \leq (b + \delta). \quad (7.8)$$

Обозначим

$$A_k \equiv \sup_{x \geq x_0} \mu^{*(k)}([x, \infty))/\mu([x, \infty)).$$

Оценим сверху A_k через A_{k-1} . По условию (2.3) и неравенству Чебышева имеем

$$\frac{\mu(x/2)\mu_2(x/2)}{\mu(x)} \leq \frac{c_0 e^{x\beta/2} \mu(x) b^{k-1} e^{-x\beta/2}}{\mu(x)} = c_0 b^{k-1}. \quad (7.9)$$

По определению A_{k-1} и $x_0(\delta)$ имеем при $x \geq 2x_0(\delta)$ неравенства

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)} d\mu(t) &\leq -A_{k-1} \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} d\mu(t) \leq \\ &\leq A_{k-1}(b+\delta), \end{aligned}$$

ввиду (7.8). При $x_0 \leq x \leq 2x_0$ из неравенства Чебышева получаем

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)} d\mu(t) &\leq - \int_{-\infty}^{x/2} \frac{b^{k-1} e^{-\beta(x-t)}}{\mu(x)} d\mu(t) \leq \\ &\leq b^{k-1}/\mu(x) \leq c_1 b^{k-1}, \end{aligned}$$

где $c_1 \equiv 1/\mu(2x_0) < \infty$. Из двух последних оценок следует, что для любого $x \geq x_0(\delta)$

$$- \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)} d\mu(t) \leq A_{k-1}(b+\delta) + c_1 b^{k-1}. \quad (7.10)$$

Ввиду условия (2.3) для любого $x \geq 0$

$$- \int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} d\mu_2(t) \leq -c_0 \int_{-\infty}^{x/2} e^{\beta t} d\mu_2(t) \leq c_0 b^{k-1}. \quad (7.11)$$

Подставляя оценки (7.9), (7.10) и (7.11) в равенство (7.4) (в котором в качестве распределения μ_1 взято μ , а в качестве $\mu_2 - \mu^{*(k-1)}$), выводим неравенство

$$A_k \leq c_2 b^{k-1} + A_{k-1}(b+\delta).$$

Отсюда следует, что $A_k \leq c_2 k(b+\delta)^{k-1}$. Последнее неравенство эквивалентно оценке леммы.

8 Точная асимптотика вероятностей больших отклонений для асимптотически однородных цепей в случае $\varphi(\beta) < 1$

В настоящем параграфе мы докажем теорему 5. Предварительно покажем справедливость замечания 2. Как замечено в [2, стр. 168], для локально степенной функции $\tilde{F}(t)$ при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших t выполняется $\frac{\tilde{F}(t+n)}{\tilde{F}(t)} = \frac{\tilde{F}(t+1)}{\tilde{F}(t)} \frac{\tilde{F}(t+2)}{\tilde{F}(t+1)} \dots \frac{\tilde{F}(t+n)}{\tilde{F}(t+n-1)} < e^{\varepsilon n}$. Таким образом, в отношении

$$\frac{G(t)}{\mathbf{P}\{\xi \geq t\}} = e^{\beta t} \frac{G(t)}{\tilde{F}(t)} = \int_t^\infty e^{-\beta(y-t)} \frac{\tilde{F}(y)}{\tilde{F}(t)} dy = \int_0^\infty e^{-\beta u} \frac{\tilde{F}(t+u)}{\tilde{F}(t)} du$$

подинтегральное выражение имеет предел $e^{-\beta u}$ при $t \rightarrow \infty$ и допускает оценку сверху $\widehat{c}e^{(-\beta+\varepsilon)u}$. Отсюда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует справедливость замечания 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Мы используем обозначения $F_y(t) = \mathbf{P}\{\xi(y) \geq t\}$, $F(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\}$, $\varphi_y(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi(y)}$ и $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$. Уравнение Колмогорова – Чепмэна (1.1) для стационарной меры π эквивалентно следующему уравнению для преобразований Лапласа:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\lambda y} \pi(dy) &= \int_0^\infty \varphi_y(\lambda) e^{\lambda y} \pi(dy) = \\ &= \int_0^\infty (\varphi(\lambda) + \varphi_y(\lambda) - \varphi(\lambda)) e^{\lambda y} \pi(dy). \end{aligned}$$

Таким образом, при $0 \leq \lambda \leq \beta$

$$\int_0^\infty e^{\lambda y} \pi(dy) = \frac{\int_0^\infty (\varphi_y(\lambda) - \varphi(\lambda)) e^{\lambda y} \pi(dy)}{1 - \varphi(\lambda)} \equiv \frac{1}{1 - \varphi(\lambda)} \psi(\lambda). \quad (8.1)$$

Пусть $H(t) \equiv \sum_{k=0}^\infty F^{*(k)}([t, \infty))$ есть функция восстановления распределения F ; в частности,

$$\frac{1}{1 - \varphi(\lambda)} = - \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u} dH(u).$$

В силу условия $\varphi(\beta) < 1$ и леммы 6 ряд

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{F^{*(k)}([t, \infty))}{F(t)}$$

сходится равномерно по t в области (x_0, ∞) (для любого $x_0 \in \mathbf{R}$). Поэтому в силу той же леммы

$$\frac{H(t)}{F(t)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{F^{*(k)}([t, \infty))}{F(t)} \rightarrow \sum_{k=0}^\infty k\varphi^{k-1}(\beta) = \frac{1}{(1 - \varphi(\beta))^2}$$

при $t \rightarrow \infty$, т. е.

$$H(t) = \frac{1 + o(1)}{(1 - \varphi(\beta))^2} F(t). \quad (8.2)$$

При $0 \leq \lambda \leq \beta$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &\equiv \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda(t+y)} d_t(F(t) - F_y(t)) \right) \pi(dy) = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda t} d_t(F(t-y) - F_y(t-y)) \right) \pi(dy) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda t} d_t \left(\int_0^\infty (F(t-y) - F_y(t-y)) \pi(dy) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\psi(\lambda)$ есть преобразование Лапласа меры

$$\mu_2(dt) = d_t \int_0^\infty (F(t-y) - F_y(t-y)) \pi(dy) \quad (8.3)$$

в \mathbf{R} . Докажем, что

$$\mu_2([t, \infty)) = (\rho_* + o(1))F(t) \quad (8.4)$$

при $t \rightarrow \infty$ для некоторого $\rho_* \in \mathbf{R}$. Имеем

$$\frac{\mu_2([t, \infty))}{F(t)} \equiv \int_0^\infty g(t, y) \pi(dy), \quad (8.5)$$

где

$$g(t, y) = \frac{\mathbf{P}\{\xi(y) \geq t - y\} - \mathbf{P}\{\xi \geq t - y\}}{\mathbf{P}\{\xi \geq t\}}.$$

Ввиду условий (2.2) и (2.12) при всяком фиксированном $y \geq 0$ подинтегральное выражение имеет предел при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, y) = c(y)e^{\beta y} - e^{\beta y}. \quad (8.6)$$

Кроме того, в силу условия (2.11) действует оценка

$$|g(t, y)| \leq \delta(y)\mathbf{P}\{\xi \geq t - y\}/\mathbf{P}\{\xi \geq t\}. \quad (8.7)$$

Если $0 \leq y \leq t/2$, то ввиду последнего неравенства и условия (2.3) функция g допускает оценку

$$|g(t, y)| \leq \delta(0)e^{\beta y}c_0.$$

Следовательно, в силу сходимости (8.6) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{t/2} g(t, y) \pi(dy) = \int_0^\infty (c(y) - 1)e^{\beta y} \pi(dy). \quad (8.8)$$

Ввиду леммы 2 и замечания 2 $\pi(y) \leq F(y)$. Поэтому из неравенства (8.7) и леммы 5 (для $\mu_1 = \mu_2 = F$) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{t/2}^\infty g(t, y) \pi(dy) \right| &\leq \delta(t/2) \int_0^\infty \frac{F(t-y)}{F(t)} \pi(dy) \leq \\ &\leq c\delta(t/2) \int_0^\infty \frac{F(t-y)}{F(t)} dF(y) = \\ &= O(\delta(t/2)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8.8) вытекает, что соотношение (8.4) действительно имеет место при

$$\rho_* = \int_0^\infty (c(y) - 1)e^{\beta y} \pi(dy).$$

Таким образом, ввиду (8.2) и (8.4) выполнены условия леммы 5 для мер μ , порождённой случайной величиной ξ , μ_1 , порождённой функцией восстановления H ,

μ_2 , определённой в (8.3), и для $\rho_1 = (1 - \varphi(\beta))^{-2}$, $\rho_2 = \rho_*$. Следовательно, из равенства (8.1) вытекает соотношение

$$\pi(x) = F(x) \left((1 - \varphi(\beta))^{-2} b_2 + \rho_* b_1 + o(1) \right), \quad (8.9)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $b_1 = (1 - \varphi(\beta))^{-1}$, $b_2 = \psi(\beta)$. Вычислим b_2 , используя определение (8.1) функции ψ :

$$\begin{aligned} b_2 = \psi(\beta) &= \int_0^\infty (e^{\beta\xi(y)} - \varphi(\beta)) e^{\beta y} \pi(dy) = \\ &= \int_0^\infty (e^{\beta(y+\xi(y))} - e^{\beta y}) \pi(dy) + (1 - \varphi(\beta)) \int_0^\infty e^{\beta y} \pi(dy). \end{aligned}$$

Ввиду теоремы о среднем сноссе (для функции $e^{\beta y}$; см. [5, равенство (14)]) первый интеграл равен нулю. Следовательно,

$$b_2 = (1 - \varphi(\beta)) \int_0^\infty e^{\beta y} \pi(dy).$$

Подставляя найденное значение в (8.9) и учитывая замечание 2, получаем утверждение теоремы об асимптотике $\pi(x)$.

9 Оценка второго члена асимптотики $\pi(x)$ в крамеровском случае

Простоты ради рассмотрим цепь $\{X(n)\}$, принимающую значения в \mathbf{Z}^+ . Везде ниже $x, y \in \mathbf{Z}^+$. Предполагаем, что цепь асимптотически однородна, т. е. $\xi(y) \Rightarrow \xi$, $y \rightarrow \infty$, и существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) \equiv \mathbf{E}e^{\beta\xi} = 1$.

Теорема 11. (а) Пусть целое $k \geq 1$ таково, что

$$\varphi^{(k+1)}(\beta) = \mathbf{E}\xi^{k+1}e^{\beta\xi} < \infty, \quad (9.1)$$

$$\sup_y \mathbf{E}\xi^{k+1}(y)e^{\beta\xi(y)} < \infty, \quad (9.2)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\beta t} |\mathbf{P}\{\xi(y) < t\} - \mathbf{P}\{\xi < t\}| dt \leq \frac{c_1}{y^{k+1}}. \quad (9.3)$$

Тогда $\pi(x) = ce^{-\beta x} + O(x^{-k}e^{-\beta x})$ при $x \rightarrow \infty$, где $0 \leq c < \infty$. Если $k > 1$, то $c > 0$.

(б) Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что

$$\sup_y \mathbf{E}e^{(\beta+\varepsilon)\xi(y)} < \infty, \quad (9.4)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\beta t} |\mathbf{P}\{\xi(y) < t\} - \mathbf{P}\{\xi < t\}| dt \leq c_2 e^{-\varepsilon y}. \quad (9.5)$$

Тогда для некоторого $\delta > 0$ выполняется $\pi(x) = ce^{-\beta x} + o(e^{-(\beta+\delta)x})$, $x \rightarrow \infty$, причём $c > 0$.

Доказательство. (а) Из условия (9.3) вытекает, что

$$\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)} \geq \mathbf{E}e^{\beta\xi} - c_1/x^{k+1} = 1 - c_1/x^{k+1},$$

и поскольку ряд $\sum x \ln x/x^{k+1}$ сходится при $k > 1$, то при таких значениях k положительность константы c следует из теоремы 4.

Пусть $\tilde{\xi}$ — случайная величина с распределением $\tilde{F}(dt) = \mathbf{P}\{\tilde{\xi} \in dt\} = e^{\beta t} \mathbf{P}\{\xi \in dt\}$, $\tilde{a} \equiv \mathbf{E}\tilde{\xi} = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty$, $\tilde{H}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}^{*(j)}((-\infty, y))$ — функция восстановления для случайной величины $\tilde{\xi}$.

При доказательстве теоремы 5 в [3, §23] показано, что

$$\left| \int_{z-1}^z e^{\beta x} \pi(x) dx - \frac{1}{\tilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dR(y) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} r(z-y) |dR(y)|, \quad (9.6)$$

где $r(z) = |\tilde{H}(z) - \tilde{H}(z-1) - 1/\tilde{a}|$ и

$$dR(y) = e^{\beta y} \sum_{x=0}^{\infty} (F_x(y-x) - F(y-x)) \pi_x dy, \quad \pi_x = \pi(\{x\}).$$

Там же было показано, что полная вариация функции R конечна. Оценим полную вариацию функции R на множестве $[N, \infty)$. По теореме 4 имеем $e^{\beta x} \pi_x \leq c_3$ равномерно по x и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} |dR(y)| &\leq \int_N^{\infty} e^{\beta y} \sum_{x=0}^{\infty} |F_x(y-x) - F(y-x)| \pi_x dy = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\beta x} \pi_x \int_N^{\infty} e^{\beta(y-x)} |F_x(y-x) - F(y-x)| dy \leq \\ &\leq \sum_{x=0}^{\infty} c_3 \int_{N-x}^{\infty} e^{\beta t} |F_x(t) - F(t)| dt = \\ &= \left(\sum_{x=0}^{N/2} + \sum_{x=N/2}^{\infty} \right) c_3 \int_{N-x}^{\infty} e^{\beta t} |F_x(t) - F(t)| dt = \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Оценим Σ_1 . По неравенству типа Чебышева и ввиду условий (9.1), (9.2) имеем

$$\int_y^{\infty} e^{\beta t} F_x(t) dt = \frac{1}{\beta} e^{\beta t} F_x(t) \Big|_y^{\infty} - \frac{1}{\beta} \int_y^{\infty} e^{\beta t} dF_x(t) \leq c_4 y^{-(k+1)},$$

$$\int_y^{\infty} e^{\beta t} F(t) dt \leq c_5 y^{-(k+1)}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \leq c_3(c_4 + c_5) \sum_{x=0}^{N/2} \frac{1}{(N-x)^{k+1}} = O(N^{-k}).$$

Оценим Σ_2 , используя условие (9.3):

$$\Sigma_2 \leq c_3 \sum_{x=N/2}^{\infty} \frac{c_1}{x^{k+1}} = O(N^{-k}).$$

Таким образом,

$$\mathbf{Var}_{[N, \infty)} R(y) \equiv \int_N^{\infty} |dR(y)| = O(N^{-k}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (9.7)$$

Ввиду условия (9.1) существует $(k+1)$ -ый момент случайной величины $\tilde{\xi}$. Поэтому по следствию 1 из [15] справедлива оценка

$$r(x) \equiv |\tilde{H}(x) - \tilde{H}(x-1) - 1/\tilde{a}| \leq c_6 x^{-k},$$

причём $\sup_x r(x) = c_7 < \infty$. Подставляя оценки для r в (9.6), получаем

$$\begin{aligned} \left| \pi_N e^{\beta N} \frac{1-1/e}{\beta} - \frac{1}{\tilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dR(y) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} r(N-y) |dR(y)| = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{N/2} + \int_{N/2}^{\infty} \right) r(N-y) |dR(y)| \leq \\ &\leq c_6 (N/2)^{-k} \int_{-\infty}^{N/2} |dR(y)| + c_7 \int_{N/2}^{\infty} |dR(y)| = \\ &= O(N^{-k}), \end{aligned}$$

в силу конечности полной вариации функции R и (9.7). Отсюда вытекает утверждение (а) теоремы.

(б) Если выполнены условия (9.4) и (9.5) теоремы, то

$$\mathbf{Var}_{[N, \infty)} R(y) = O(e^{-\varepsilon N/2}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (9.8)$$

В силу (9.4) $\mathbf{E}e^{\varepsilon_0 \tilde{\xi}} < \infty$ для любого $\varepsilon_0 < \varepsilon$. Кроме того, $\mathbf{E}\tilde{\xi}^2 = \mathbf{E}\xi^2 e^{\beta \xi} < \infty$. Поэтому по теореме из [16] для некоторого $\varepsilon_1 > 0$

$$r(x) \equiv |\tilde{H}(x) - \tilde{H}(x-1) - 1/\tilde{a}| = o(e^{-\varepsilon_1 x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (9.9)$$

Из (9.8) и (9.9) вытекает утверждение (б) теоремы при $\delta = \min(\varepsilon/2, \varepsilon_1)$. Отметим, что, как следует из [16], существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\mathbf{E}e^{z\tilde{\xi}} = \mathbf{E}e^{(\beta+z)\xi} \neq 1$ для всех z из полосы $0 < \operatorname{Re} z \leq \varepsilon_2$; в качестве ε_1 можно взять любое число ε_1 из интервала $(0, \varepsilon_2)$.

Список литературы

- [1] Боровков А. А. Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания. Теория вероятн. и её примен., 1980, Т. XXV, с. 663–665.

- [2] Боровков А. А. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. М.: Наука, 1972.
- [3] Боровков А. А. *Эргодичность и устойчивость случайных процессов*. М.: ТВП, 1995 (в печати).
- [4] Боровков А. А. *Математическая статистика*. 2-е изд. (в печати).
- [5] Borovkov A. A., Korshunov D. Ergodicity in a sense of weak convergence, equilibrium-type identities and large deviations for Markov chains. *Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of 6-th Intern. Vilnius Conf. on Probability and Statistics*. Vilnius, 1994, p. 89–98.
- [6] Csörgö S., Deheuvels P., Mason D. M. Kernel estimates of the tail index of a distribution. *Ann. Statist.*, 1985, V. 13, P. 1050–1077.
- [7] Embrechts P., Goldie C. M. On convolution tails. *Stoch. Proc. Appl.*, 1982, V. 13, P. 263–278.
- [8] Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1982, V. 1, P. 55–72.
- [9] Haeusler E., Teugels J. L. On asymptotic normality of Hill’s estimator for the exponent of regular variation. *Ann. Statist.*, 1985, V. 13, P. 743–756.
- [10] Карлин С. *Основы теории случайных процессов*. М.: Мир, 1971.
- [11] Korshunov D. A. Transition phenomena for real-valued Markov chains. *Siberian Adv. Math.*, 1993, V. 3, P. 53–100.
- [12] Korshunov D. A. On distribution tail of the maximum of a random walk. (submitted).
- [13] Meyn S.P., Tweedie R. L. *Markov Chains and Stochastic Stability*. London, Berlin, etc.: Springer–Verlag, 1993.
- [14] Новак С. Ю., Утев С. А. Об асимптотике распределения отношения сумм случайных величин. *Сиб. мат. журн.*, 1990, Т. 31, N. 5, С. 92–101.
- [15] Stone C. On characteristic functions and renewal theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, V. 120, p. 327–342.
- [16] Stone C. On moment generating functions and renewal theory. *Ann. Math. Statist.*, 1965, V. 36, p. 1298–1301.
- [17] Varadhan S. R. S. *Large Deviations and Applications*. Philadelphia: Soc. for industr. and appl. math., 1984.
- [18] Veraverbeke N. Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk. *Stoch. Proc. Appl.*, 1977, V. 5, P. 27–38.