БОРОВКОВ А. А., КОРШУНОВ Д. А.[1]

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА. ЧАСТЬ II. ДОСТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ[2]

Аннотация

Работа является продолжением статьи [5]. Рассматривается однородная во времени и асимптотически однородная в пространстве цепь Маркова $\{X(n)\}$ со значениями на вещественной прямой и со скачками, обладающими некоторым экспоненциальным моментом. Изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{X(n)\geqslant x\}$ при $x\to\infty$ как при фиксированных, так и при растущих значениях времени n. В частности, выделяются зоны значений времени n, в которых эта вероятность асимптотически эквивалентна хвосту стационарного распределения $\pi(x)$ (последнее весьма полно изучено в [5], [12, § 27]).

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, грубая и точная асимптотики вероятностей больших уклонений, переходные явления, инвариантная мера.

§ 1. Введение

Пусть $X(n)=X(y,n)\in\mathbf{R}$, $n=0,\ 1,\ \ldots$, — однородная во времени цепь Маркова со значениями на вещественной прямой $\mathbf{R}$ и с начальным значением $y\equiv X(y,0)$. Переходную вероятность цепи обозначим $\mathbf{P}(y,B)=\mathbf{P}(X(y,1)\in B)$, где B — борелевское множество в $\mathbf{R}$.

Пусть $\xi(y)$ — приращение за один шаг цепи X в точке $y\in\mathbf{R}$, т. е. $\xi(y)=X(y,1)-y$. В настоящей работе изучается *асимптотически однородная* (*в пространстве*) цепь, т. е. цепь, для которой распределение $\xi(y)$ слабо сходится при $y\to\infty$ к распределению F некоторой случайной величины ξ. Всюду предполагается, что $m=\mathbf{E}\xi<0$ (значение $m=-\infty$ из рассмотрения не исключается) и $\mathbf{P}\{\xi>0\}>0$.

Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda)\equiv\mathbf{E}e^{\lambda\xi}$ случайной величины ξ есть функция выпуклая, поэтому множество $\{\lambda:\varphi(\lambda)\leqslant 1\}$ представляет собой отрезок вида $[0,\beta]$, где $\beta=\sup\{\lambda:\varphi(\lambda)\leqslant 1\}$. Поскольку $\mathbf{P}\{\xi>0\}>0$, число β конечно. Возможны три случая:

(а) $\beta>0$, $\varphi(\beta)=1$ — этот случай назовём *крамеровским*;

(б) $\beta>0$, $\varphi(\beta)<1$ — этот случай назовём *промежуточным*;

(в) $\beta=0$ — к этому случаю относятся, в частности, распределения с правильно меняющимися на бесконечности хвостами.

В первой части работы предполагалось, что цепь X обладает инвариантной мерой π, т. е. мерой, доставляющей решение уравнению

$$\pi(\cdot)=\int_{\mathbf{R}}\pi(dy)\,P(y,\cdot),\quad \pi(\mathbf{R})=1. \tag{1.1}$$

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск, Россия

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01939), CRDF Cooperative Grants Program (Award # RM1-226) и INTAS (Project No. 93-10820)

Весьма полно была изучена асимптотика $\pi(x) = \pi([x,\infty))$ при $x\to\infty$ во всех трёх случаях (а), (б) и (в). При этом рассматривался в основном случай асимптотически однородной цепи.

Во второй (настоящей) части работы изучается асимптотическое поведение $\pi_n(x) = \mathbf{P}\{X(n)\geqslant x\}$ при $x\to\infty$ в крамеровском и промежуточном случаях. При этом нас будут интересовать как фиксированные значения временного параметра n, так и случай неограниченно возрастающего n. Случай $\beta = 0$ будет рассмотрен в третьей части работы.

Пусть $\{\xi_n\}$ — набор независимых копий величины ξ. Следуя [5], цепь Маркова X в $\mathbf{R}^+ = [0,\infty)$, определяемую соотношениями

$$X(n+1) = (X(n)+\xi_n)^+,$$

мы будем называть *однородной в пространстве.*

Положим $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1+\dots+\xi_k$ и $M_n = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} S_k$. Хорошо известно (см., например, [10, гл. VI, § 9]), что распределение однородной цепи $X(0,n)$ совпадает с распределением M_n, т. е. для любого x

$$\mathbf{P}\{X(0,n)\geqslant 0\} = \mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}. \tag{1.2}$$

Следуя [5], будем говорить, что цепь X является *N-частично однородной в пространстве* (или просто *частично однородной*), если для любого борелевского множества $B\subseteq (N,\infty)$ переходная вероятность $P(y,B)$ совпадает с вероятностью $\mathbf{P}\{y+\xi\in B\}$, когда y пробегает множество (N,∞). Другими словами, в области (N,∞) поведение цепи X совпадает с процессом суммирования независимых случайных величин, имеющих общее распределение F. Очевидно, что однородная цепь является 0-частично однородной.

В § 2 приводятся необходимые нам уточнения известных теорем о вероятностях больших уклонений сумм независимых одинаково распределённых случайных величин при условии существования у них показательных моментов.

В § 3 формулируется и доказывается грубая теорема о вероятностях больших уклонений в крамеровском случае для асимптотически однородной цепи.

В § 4 исследуются цепи также в крамеровском случае, но класс рассматриваемых цепей сужается (по сравнению с § 3 и [5]) до частично однородных в пространстве цепей, удовлетворяющих условию Харриса. Для таких цепей удается описать асимптотику вероятности $\pi_n(x)$ для широкого спектра растущих значений n. В частности, найдена зона значений времени n, в которой вероятность $\pi_n(x)$ эквивалентна хвосту $\pi(x)$ инвариантного распределения π.

В § 5 исследуется асимптотически однородная цепь в промежуточном случае. При широких условиях на начальное распределение π_0 доказывается, что $\pi_n(x)\sim\pi(x)$ [3] при любой скорости сходимости n и x к бесконечности. Кроме того, приводится существенное обобщение теоремы 5 из [5] о вероятностях больших уклонений стационарного распределения π.

[3]Мы пишем $a_n(x)\sim b_n(x)$ при n, $x\to\infty$, если $\lim\limits_{n,x\to\infty} a_n(x)/b_n(x) = 1$

§ 2. Вероятности больших уклонений сумм случайных величин

2.1. Функция уклонений. В настоящем разделе напоминается понятие функции уклонений, а также её некоторые свойства (см., например, § 8, гл. 8 в [2] или § 1, раздел 7 в [6]). Нам понадобятся следующие обозначения: $m = \mathbf{E}\xi$, $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$, $\lambda_+ = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$ (здесь и всюду далее предполагаем, что $\lambda_+ > 0$),

$$\alpha_+ = \lim_{\lambda\to\lambda_+} \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_+} d\ln\varphi(\lambda)/d\lambda.$$

Если случайная величина ξ ограничена сверху, то $\lambda_+ = \infty$ и α_+ совпадает с существенным супремумом множества значений ξ, т. е. с $\sup\{x : F(x){<}1\}$. Если случайная величина ξ не ограничена сверху и $\lambda_+ = \infty$, то $\alpha_+ = \infty$. Если же случайная величина ξ не ограничена сверху и λ_+ конечно, то α_+ может принимать a priori любое значение из интервала $(m, \infty]$, в том числе и отрицательное.

Хорошо известно (см., например, [10, гл. XVI, § 7]), что функция $\ln\varphi(\lambda)$ строго выпуклая. Поэтому для $\alpha \in [m, \alpha_+)$ максимум по λ разности $\alpha\lambda - \ln\varphi(\lambda)$ достигается в той единственной точке $\lambda(\alpha)$, в которой касательная к функции $\ln\varphi(\lambda)$ паралельна прямой $\alpha\lambda$, т. е. в которой $d\ln\varphi(\lambda)/d\lambda = \alpha$. Функция $\lambda(\alpha)$ возрастает; $\lambda(m){=}0$. Функция

$$\Lambda(\alpha) \equiv \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda - \ln\varphi(\lambda)\} = \alpha\lambda(\alpha) - \ln\varphi(\lambda(\alpha)), \quad \alpha \in [m, \alpha_+), \tag{2.1}$$

называется *функцией уклонений*. Дифференцирование последнего равенства приводит к соотношению $\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha)$; следовательно, функция Λ строго выпуклая. Имеем $\Lambda(m){=}\Lambda'(m){=}0$.

В случае, когда $\alpha_+ < \infty$ и $\lambda_+ < \infty$, доопределим функцию $\Lambda(\alpha)$ при $\alpha \geqslant \alpha_+$ линейным образом $\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+{-}0) + (\alpha{-}\alpha_+)\lambda_+$, положив при этом $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_+{-}0)$. Если $\alpha_+{<}\infty$ и $\lambda_+ = \infty$, т. е. если случайная величина ξ ограничена сверху (с необходимостью числом α_+), положим $\Lambda(\alpha_+) = -\ln\mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\}$ и $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha > \alpha_+$ в случае $\mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\} > 0$; $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha \geqslant \alpha_+$ в случае $\mathbf{P}\{\xi{=}\alpha_+\} = 0$. Отметим, что к таким значениям функции уклонений при $\alpha > \alpha_+$ приводит формальный поиск супремума в (2.1).

Если случайная величина ξ неограничена сверху, то функция $\Lambda(\alpha)$ конечна и непрерывно дифференцируема при всех $\alpha \geqslant 0$. Если случайная величина ξ ограничена сверху (т. е. если $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+{<}\infty$), то функция $\Lambda(\alpha)$ терпит единственный разрыв в точке $\alpha = \alpha_+$.

2.2. Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений сумм. Известен (см., например, [6, § 1, лемма 7]) принцип больших уклонений для сумм независимых случайных величин, согласно которому для любого фиксированного $\alpha \geqslant m$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$n^{-1}\ln\mathbf{P}\{S_n/n \geqslant \alpha\} \to -\Lambda(\alpha). \tag{2.2}$$

Этот принцип остаётся верным и в следующей более сильной форме. Пусть $\alpha_1 > m$ — произвольное число такое, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Тогда при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$n^{-1}\ln\mathbf{P}\{S_n/n \geqslant \alpha\} = -\Lambda(\alpha) + o(1), \tag{2.3}$$

равномерно по $\alpha \in [m, \alpha_1]$. Левая часть в (2.3) равна $-\infty$, если $\Lambda(\alpha) = \infty$. Утверждение в равномерной форме вытекает из (2.2) ввиду равномерной непрерывности функции $\Lambda(\alpha)$ на компакте $[m, \alpha_1]$ и монотонности по α левой части (2.3).

В следующих двух вспомогательных разделах приводятся равномерные по параметру уточнения центральной предельной теоремы для сумм решётчатых и нерешётчатых слагаемых.

2.3. Равномерная по параметру локальная центральная предельная теорема (решётчатый случай). В этом разделе ξ_k будут предполагаться решётчатыми, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi < \infty$. Пусть числа b и h таковы, что $\mathbf{P}\{\xi = b + kh,\ k \in \mathbf{Z}\} = 1$, причём решётка с шагом h — минимальная, обладающая этим свойством. Известна [8, § 43] локальная теорема для распределения сумм S_n, согласно которой

$$\mathbf{P}\left\{S_n = nb + kh\right\} - \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-(nb+kh-nm_1)^2/2n\sigma^2} = o(1/\sqrt{n})$$

при $n \to \infty$ равномерно для всех $k \in \mathbf{Z}$. В формулируемой ниже лемме приводятся условия, при которых это утверждение справедливо равномерно по параметру, от которого зависит распределение ξ. Именно, рассматриваются решётчатые случайные величины $\xi_k^{[r]}$, распределение которых зависит от некоторого параметра r из произвольного параметрического множества и при каждом r является решётчатым с минимальной решёткой $\{b+kh,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Лемма 1. *Пусть семейство (по r) случайных величин $\{\xi^{[r]2}\}$ равномерно интегрируемо и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\sup_r \sup_{\mu \in [\varepsilon, 2\pi/h-\varepsilon]} |\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}| < 1. \tag{2.4}$$

(здесь i — мнимая единица). Тогда равномерно по k и r имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\left\{S_n^{[r]} = nb + kh\right\} - \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{[r]}} e^{-(nb+kh-nm_1^{[r]})^2/2n\sigma^{[r]2}} = o(1/\sqrt{n}). \tag{2.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Так как при любом r распределение $\xi^{[r]}$ решётчатое с минимальным шагом решётки равным h, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $|\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}| < 1$ равномерно по $\mu \in [\varepsilon, 2\pi/h-\varepsilon]$ и условие (2.4) является лишь равномерным по r аналогом этого соотношения.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. Из условия равномерной интегрируемости квадратов случайных величин вытекает, что в окрестности точки $\mu = 0$ имеет место разложение

$$\mathbf{E}e^{i\mu(\xi^{[r]}-m_1^{[r]})} = 1 - \sigma^{[r]2}\mu^2/2 + o(\mu^2),$$

причём равномерно по параметру r. В частности, характеристические функции $\mathbf{E}e^{i\mu(S_n^{[r]}-nm_1^{[r]})/\sqrt{n}\sigma^{[r]}}$ сходятся к характеристической функции $e^{-\mu^2/2}$ стандартного нормального закона равномерно по μ из любого компакта и равномерно по r. Эти обстоятельства и условие (2.4) позволяют нам далее дословно воспользоваться доказательством локальной теоремы из [8, § 43].

Из леммы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть семейство (по r)случайных величин $\{\xi^{[r]2}\}$ равномерно интегрируемо. Кроме того, пусть конечное множество $K \subset \mathbf{Z}$ таково, что наибольший общий делитель чисел из K равен единице и для любых $k \in K$, r выполняется* *неравенство* $\mathbf{P}\{\xi^{[r]} = b+kh\} \geqslant \varepsilon$, *при некотором* $\varepsilon > 0$. *Тогда равномерно по* k *и* r *имеет место соотношение* (2.5).

2.4. Равномерное по параметру разложение в центральной предельной теореме (нерешётчатый случай). Пусть теперь ξ_k нерешётчаты с нулевым средним значением и конечным третьим моментом $m_3 = \mathbf{E}\xi^3$. Известно (см., например, теорему 1 в [10, гл. XVI, § 4]) следующее разложение для распределения суммы $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, уточняющее центральную предельную теорему: при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n\mathbf{D}\xi_1}} < u\right\} - \Phi(u) - \frac{m_3}{6\,\sigma^3\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u) = o(1/\sqrt{n})$$

равномерно для всех u, где $\Phi(u)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В этом вспомогательном разделе приводится обобщение этого разложения на случай, когда распределение ξ зависит от некоторого параметра r из произвольного параметрического множества. Именно, рассматриваются случайные величины $\xi_k^{[r]}$, каждая из которых имеет нерешётчатое распределение с нулевым средним значением, единичной дисперсией и конечным третьим моментом $m_3^{[r]} = \mathbf{E}(\xi^{[r]})^3$.

Лемма 2. *Пусть для любого компакта* $K \subset \mathbf{R}$, *не содержащего нуль, выполняется*

$$\sup_r \sup_{\mu\in K} |\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}| < 1 \tag{2.6}$$

(*здесь* i — *мнимая единица*). *Кроме того, пусть семейство* (*по* r) *случайных величин* $\{\xi^{[r]3}\}$ *равномерно интегрируемо. Тогда функция распределения* $F_n^{[r]}(u)$ *случайной величины* $S_n^{[r]}/\sqrt{n}$ *удовлетворяет при* $n \to \infty$ *равномерному по* $u \in \mathbf{R}$ *и* r *соотношению*

$$F_n^{[r]}(u) - \Phi(u) - \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u) = o(1/\sqrt{n}).$$

З а м е ч а н и е 2. Так как при любом r распределение $\xi^{[r]}$ нерешётчатое, то для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$, не содержащего нуль, выполняется $\sup_{\mu\in K}|\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}| < 1$ и условие (2.6) является лишь равномерным аналогом этого соотношения.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует рассуждениям из [10, гл. XVI, § 4] и основано на приведённой там оценке (4.4): для любого $\varepsilon > 0$

$$\left|F_n^{[r]}(u) - \Psi(u)\right| \leqslant \int_{-a\sqrt{n}}^{a\sqrt{n}} \left|\frac{(\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}/\sqrt{n}})^n - \gamma(\mu)}{\mu}\right| d\mu + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \tag{2.7}$$

где функция ограниченной вариации

$$\Psi(u) = \Phi(u) + \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u),$$

имеет преобразование Фурье

$$\psi(\mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu u} d\Psi(u) = e^{-\mu^2/2}\left[1 + \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(i\mu)^3\right],$$

а постоянная a выбрана столь большой, что $24|\Psi'(u)| < \varepsilon a$ при всех u и r. Такой выбор a возможен ввиду равномерной ограниченности третьих моментов.

Разобьём интервал интегрирования в (2.7) на две части. В силу условия (2.6) максимум $|\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}|$ по области $0<\delta\leqslant|\mu|\leqslant a<\infty$ строго меньше единицы. Как отмечается в [10, гл. XVI, § 4], отсюда вытекает, что интеграл по области $|\mu|\in[\delta\sqrt{n}, a\sqrt{n}]$ стремится к нулю быстрее любой степени числа $1/n$. Далее, ввиду равномерной интегрируемости кубов случайных величин, третьи производные функций $\ln\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}$ непрерывны в некоторой окрестности нуля равномерно по r. Тогда в соответствии с [10, гл. XVI, § 2] найдётся $\delta>0$ такое, что при $|\mu|\leqslant\delta\sqrt{n}$ подынтегральное выражение в (2.7) допускает оценку

$$\left|\frac{(\mathbf{E}e^{i\mu\xi^{[r]}/\sqrt{n}})^n-\psi(\mu)}{\mu}\right|\leqslant e^{-\mu^2/4}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|\mu|+\frac{m_3^{[r]2}}{72n}|\mu|^5\right),$$

и поэтому при больших n правая часть в (2.7) меньше $1000\varepsilon/\sqrt{n}$. Ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon>0$ лемма доказана.

2.5. Точная асимптотика вероятностей больших уклонений сумм.

Определение 1. Распределение F_λ называем *преобразованием Крамера распределения F в точке λ*, если $F_\lambda(du)=e^{\lambda u}F(du)/\varphi(\lambda)$, в случае существования преобразования Лапласа для распределения F в точке λ.

Распределение F_λ при $\lambda=\lambda(\alpha)$ называем *преобразованием Крамера $F^{(\alpha)}$ с параметром α над распределением F*, а случайную величину с распределением $F^{(\alpha)}$ обозначаем $\xi^{(\alpha)}$. Отметим, что $\xi^{(\alpha)}=\xi$ при $\alpha=m$. По определению $\mathbf{E}\xi^{(\alpha)}=\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)}=\alpha$,

$$\sigma^{(\alpha)2}=\mathbf{D}\xi^{(\alpha)}=\varphi''(\lambda)/\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)}-\alpha^2=(\ln\varphi(\lambda))''\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)}.$$

Дифференцируя тождество $\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)}=\alpha$ по переменной α и учитывая равенство $\Lambda'(\alpha)=\lambda(\alpha)$, приходим к соотношению

$$\sigma^{(\alpha)2}=1/\Lambda''(\alpha). \tag{2.8}$$

В частности, $\Lambda''(m)=1/\mathbf{D}\xi$.

В следующих двух леммах приводятся обобщения теоремы A из [14] и утверждений из [9] . Обозначаем $\gamma=\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)\sqrt{n}$.

Лемма 3. *Пусть распределение F нерешётчатое, а числа α_1 и α_2 таковы, что $m\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_+$; если $\alpha_1=m$, то дополнительно предполагаем конечность $\mathbf{E}|\xi|^3$. Тогда при $n\to\infty$ равномерно по $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ имеет место равенство*

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\}=e^{-n\Lambda(\alpha)}e^{\gamma^2/2}(1-\Phi(\gamma))(1+o(1)).$$

З а м е ч а н и е 3. В ходе доказательства будет установлено более сильное соотношение, уточняющее порядок малости остатка $o(1)$ (см. (2.10)).

Предложенное в лемме асимптотическое равенство является универсальным в том отношении, что оно содержит в себе аппроксимацию распределения сумм как в области нормальных, так и в области больших уклонений. Например, поскольку $1-\Phi(\gamma)\sim e^{-\gamma^2/2}/\sqrt{2\pi}\gamma$ при $\gamma\to\infty$, то получаем следующее

Следствие 2. *Если* $\mathbf{E}\xi<\alpha_1$*, то при* $n\to\infty$ *равномерно по* $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)}e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

Кроме того, если $\mathbf{E}|\xi|^3<\infty$ *и* $y(n)\to\infty$, $y(n)=o(\sqrt{n})$*, то последняя асимптотика имеет место при* $n\to\infty$ *равномерно по* $\alpha\in[\mathbf{E}\xi+y(n)/\sqrt{n},\alpha_2]$.

С другой стороны, в окрестности точки $\alpha=m$ справедливо разложение $\Lambda(\alpha)=\gamma^2/2n+O(|\alpha-m|^3)$, из которого вытекает

Следствие 3. *Если* $\mathbf{E}|\xi|^3<\infty$*, то при* $n\to\infty$ *равномерно в области* $\alpha\in[m,m+o(n^{-1/3})]$ *имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\}\sim1-\Phi(\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)\sqrt{n})\sim1-\Phi((\alpha-\mathbf{E}\xi)\sqrt{n}).$$

Доказательство леммы 3. Пусть $\{\xi_k^{(\alpha)}\}$ — набор независимых копий величины $\xi^{(\alpha)}$; $\zeta_k^{(\alpha)}=(\xi_k^{(\alpha)}-\alpha)/\sigma^{(\alpha)}$. Положим

$$S_n^{(\alpha)}=\xi_1^{(\alpha)}+\dots+\xi_n^{(\alpha)},\qquad F_n^{(\alpha)}(u)=\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1^{(\alpha)}+\dots+\zeta_n^{(\alpha)}}{\sqrt{n}}<u\right\}.\tag{2.9}$$

Справедлива “формула обращения”(см., например, [2], § 8, гл. 8)

$$\mathbf{P}\{S_n\in du\}=\varphi^n(\lambda(\alpha))e^{-\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)}\in du\}$$

и, соответственно,

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\}=\varphi^n(\lambda(\alpha))\int_x^\infty e^{-\lambda(\alpha)u}\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)}\in du\}=$$
$$=\varphi^n(\lambda(\alpha))e^{-\lambda(\alpha)\alpha n}\int_0^\infty e^{-\lambda(\alpha)\sigma^{(\alpha)}\sqrt{n}u}dF_n^{(\alpha)}(u).$$

Вспоминая определение функции Λ и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\}=e^{-n\Lambda(\alpha)}\gamma\int_0^\infty e^{-\gamma u}(F_n^{(\alpha)}(u)-F_n^{(\alpha)}(0))du.$$

Набор случайных величин $\{\zeta_1^{(\alpha)},\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2\}$ удовлетворяет условиям леммы 2. Применяя её к оценке разности $F_n^{(\alpha)}(u)-F_n^{(\alpha)}(0)$ в последнем равенстве, приходим к соотношению

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\}=e^{-n\Lambda(\alpha)}\gamma\Bigg[\int_0^\infty e^{-\gamma u}(\Phi(u)-\Phi(0))du+$$
$$+\frac{m_3^{(r)}}{6\sigma^{(\alpha)3}\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-\gamma u}\left((1-u^2)\Phi'(u)-\Phi'(0)\right)du+o(1/\sqrt{n})\int_0^\infty e^{-\gamma u}du\Bigg].$$

Отметим теперь, что справедливо тождество $\int_0^\infty e^{-\gamma u}e^{-u^2/2}du=e^{\gamma^2/2}(1-\Phi(\gamma))\sqrt{2\pi}$ (оно получается, если выделить полный квадрат в показателе экспоненты). Дифференцирование этого тождества по γ позволяет найти значения интегралов $\int_0^\infty u^ke^{-\gamma u}e^{-u^2/2}du$,

$k=1,2,3$. Поступая таким образом, приходим к равенству

$$\int_0^\infty e^{-\gamma u}(\Phi(u)-\Phi(0))du = e^{\gamma^2/2}(1-\Phi(\gamma))/\gamma,$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma u}((1-u^2)\Phi'(u)-\Phi'(0))du = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} - \gamma^2 e^{\gamma^2/2}(1-\Phi(\gamma)) - \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{S_n/n \geqslant \alpha\} = e^{-n\Lambda(\alpha)}e^{\gamma^2/2}(1-\Phi(\gamma)) + \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}}\left(O\left(\frac{1}{1+\gamma^2}\right)+o(1)\right). \quad (2.10)$$

Последнее соотношение влечёт утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть распределение F решётчатое с минимальной решёткой $\{b+kh, k\in\mathbf{Z}\}$, а числа α_1 и α_2 таковы, что $m\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_+$; если $\alpha_1=m$, то дополнительно предполагаем конечность $\mathbf{E}\xi^2$. Тогда при $x=nb+kh$, $n\to\infty$*

$$\mathbf{P}\{S_n=x\} \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}}e^{-n\Lambda(x/n)},$$

равномерно по x таким, что $\alpha=x/n\in[\alpha_1,\alpha_2]$.

Доказательство. В решётчатом случае формула обращения принимает вид

$$\mathbf{P}\{S_n=x\} = \varphi^n(\lambda(\alpha))e^{-\lambda(\alpha)\alpha n}\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)}=x\}.$$

Семейство случайных величин $\{\xi_1^{(\alpha)}, \alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]\}$ удовлетворяет условиям следствия 1. Поэтому $\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)}=x\}\sim h/\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}$; отсюда вытекает требуемая асимптотика.

Следствие 4. *Если $\alpha_1>m$, то при $n\to\infty$ равномерно по $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ таким, что $(\alpha-b)n/h$ — целое число,*

$$\mathbf{P}\{S_n/n\geqslant\alpha\} \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\alpha)}(1-e^{\lambda(\alpha)h})}e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

2.6. Асимптотика табу-вероятностей больших уклонений сумм. Положим $M_-^{(\alpha)} = \min\limits_{k>0} S_k^{(\alpha)}$, $b(v,\alpha)=\mathbf{P}\{M_-^{(\alpha)}\geqslant v\}$. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение об асимптотике вероятности

$$q_n(v,x)\equiv\mathbf{P}\{S_k\geqslant v \text{ при всех } k<n, S_n\geqslant x\}.$$

Лемма 5. *Пусть α_1 и α_2 — произвольные числа такие, что $0<\alpha_1<\alpha_2$ и $\Lambda(\alpha_2)<\infty$; $v_0\in\mathbf{R}$. Тогда при $x\to\infty$ равномерно по v и n таким, что $v\leqslant v_0$ и $x/n\in[\alpha_1,\alpha_2]$, имеет место соотношение*

$$n^{-1}\ln q_n(v,x) \geqslant -\Lambda(x/n)+o(1).$$

Если, кроме того, $\alpha_2<\alpha_+$, то имеет место эквивалентность

$$q_n(v,x)\sim b(v,x/n)\mathbf{P}\{S_n\geqslant x\}.$$

Доказательство второго утверждения фактически содержится в [3, 4]. Единственное затруднение состоит в том, что в [3, 4] используется дополнительное условие

Крамера на характеристическую функцию распределения F. Однако это дополнительное условие используется лишь для корректной ссылки на предшествующие результаты, содержащие равномерные асимптотики вероятностей больших уклонений. В нашем же изложении эти равномерные асимптотики (следствие 2 и лемма 4) получены без использования условия Крамера на характеристическую функцию.

Первое утверждение леммы можно вывести из второго, применяя метод срезок подобно тому, как это проделано при доказательстве леммы 7 в [6, § 1]. Лемма доказана.

2.7. Некоторые результаты, касающиеся сумм вероятностей $\mathbf{P}\{S_k \geqslant x\}$. Пусть $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ и $\varphi'(\beta) < \infty$; в частности, $\alpha_+ \geqslant \varphi'(\beta) > 0$. Положим $\alpha_0 \equiv \varphi'(\beta)/\varphi(\beta) = \varphi'(\beta)$. Имеем $\alpha_0 \in (0, \alpha_+]$, $\lambda(\alpha_0) = \beta$ и $\Lambda(\alpha_0) = \beta\alpha_0$.

Для функции восстановления, построенной по суммам S_k, при $x \to \infty$ справедливо равенство

$$H(x) \equiv \sum_{k \geqslant 1} \mathbf{P}\{S_k \geqslant x\} = (c_H + o(1))e^{-\beta x}. \tag{2.11}$$

Если случайная величина ξ нерешётчатая, то $c_H = 1/\beta\alpha_0$. Если ξ решётчатая с минимальной решёткой $\{kh,\ k \in \mathbf{Z}\}$, то $c_H = h/(1-e^{-\beta h})\alpha_0$, а x следует брать кратным h.

Чтобы проверить (2.11), рассмотрим функцию восстановления $H^{(\alpha_0)}$, построенную по суммам $S_k^{(\alpha_0)}$ с положительным средним сносом. Тогда справедлива формула обращения

$$H(x) = e^{-\beta x} \int_x^\infty e^{-\beta(u-x)} H^{(\alpha_0)}(du).$$

Применение локальной теоремы восстановления для $H^{(\alpha_0)}$ приводит к (2.11) (ср. также с [7], где асимптотика $H(x)$ изучена более полно).

Всюду в дальнейшем $n_0 = n_0(x) = x/\alpha_0$. Асимптотика частичных сумм вероятностей $\mathbf{P}\{S_k \geqslant x\}$ описывается в следующей лемме.

Лемма 6. *Пусть $\varphi(\lambda)<\infty$ при некотором $\lambda>\beta$, т. е. $\lambda_+>\beta$, и функция $y(x) \to \infty$ такова, что $y(x) = o(x^{1/6})$ при $x \to \infty$. Тогда имеет место равномерное по $y \geqslant -y(x)$ соотношение*

$$\sum_{k \leqslant y\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geqslant x\} = (c_H+o(1))e^{-\beta x}\Phi(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)}) \quad \text{при } x \to \infty;$$

в решётчатом случае следует брать x кратным шагу решётки.

Прежде, чем приступить к доказательству, введём ещё одну функцию. Обозначим

$$V(\alpha) = \Lambda(\alpha)/\alpha.$$

Поскольку

$$V'(\alpha) = \alpha^{-2}(\lambda(\alpha)\alpha - \Lambda(\alpha)) = \alpha^{-2} \ln \varphi(\lambda(\alpha)),$$

то $V'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (0, \alpha_0)$; $V'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_0$ и $V'(\alpha_0) = 0$. Таким образом, функция $V(\alpha)$ достигает в точке α_0 своего минимального значения на $(0, \infty)$, равного $\Lambda(\alpha_0)/\alpha_0 = \beta$. Имеем $V''(\alpha_0)=1/\alpha_0\sigma^{(\alpha_0)2}$.

Доказательство леммы 6. В силу следствий 2 и 4 равномерно по $|k| \leqslant 2y(x)\sqrt{x} = o(x^{2/3})$ справедлива асимптотика

$$\mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geqslant x\} \sim \frac{\alpha_0 c_H}{\sqrt{2\pi n_0}\sigma^{(\alpha_0)}} e^{-(n_0+k)\Lambda\left(\frac{x}{n_0+k}\right)} = \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi x}\sigma^{(\alpha_0)}} e^{-xV\left(\frac{x}{n_0+k}\right)}. \qquad (2.12)$$

Ввиду равенств $V(\alpha_0)=\beta$ и $V'(\alpha_0)=0$ имеем разложение $V\left(\frac{x}{n_0+k}\right) = \beta + \frac{V''(\theta)}{2}\left(\frac{x}{n_0+k} - \alpha_0\right)^2$, где θ находится между α_0 и $x/(n_0+k)$; в частности, $\theta \to \alpha_0$. Поскольку

$$x/(n_0+k) - \alpha_0 = \alpha_0/(1+k/n_0) - \alpha_0 = -(\alpha_0^2 k/x)(1 + O(k/x))$$

и $V''(\theta)=V''(\alpha_0)+O(k/x)=1/\alpha_0\sigma^{(\alpha_0)2}(1+O(k/x))$ равномерно по $|k| \leqslant 2y(x)\sqrt{x}$, то при таких значениях k имеем

$$e^{-xV\left(\frac{x}{n_0+k}\right)} = e^{-\beta x} e^{-\alpha_0^3 (k/\sqrt{x})^2/2\sigma^{(\alpha_0)2} + o(1)}. \qquad (2.13)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Подставляя (2.13) в (2.12), получаем равномерно по всем y_1 и y_2 таким, что $y_2 - y_1 \geqslant \varepsilon$, $|y_1|$, $|y_2| \leqslant 2y(x)$ следующую эквивалентность:

$$\begin{aligned}\sum_{k=y_1\sqrt{x}}^{y_2\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geqslant x\} &\sim e^{-\beta x} \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi x}\sigma^{(\alpha_0)}} \sum_{k=y_1\sqrt{x}}^{y_2\sqrt{x}} e^{-\alpha_0^3 (k/\sqrt{x})^2/2\sigma^{(\alpha_0)2}} \sim \\ &\sim e^{-\beta x} \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(\alpha_0)}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\alpha_0^3 t^2/2\sigma^{(\alpha_0)2}}\, dt = \\ &= c_H e^{-\beta x}\left(\Phi\left(y_2 \frac{\alpha_0^{3/2}}{\sigma^{(\alpha_0)}}\right) - \Phi\left(y_1 \frac{\alpha_0^{3/2}}{\sigma^{(\alpha_0)}}\right)\right). \qquad (2.14)\end{aligned}$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева имеем $\mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geqslant x\} \leqslant e^{-\lambda x}\varphi^{n_0+k}(\lambda)$. Суммируя это неравенство по $k \leqslant -2y(x)\sqrt{x}$ и полагая $\lambda = \lambda(x/(n_0 - 2y(x)\sqrt{x}))$, получаем оценку

$$\sum_{k \leqslant -2y(x)\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geqslant x\} \leqslant n_0 e^{-\lambda x}\varphi^{n_0 - 2y(x)\sqrt{x}}(\lambda) = (x/\alpha_0) e^{-xV(x/(n_0 - 2y(x)\sqrt{x}))}.$$

Отсюда, ввиду (2.13),

$$\sum_{k \leqslant -2y(x)\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geqslant x\} \leqslant cxe^{-\beta x} e^{-2\alpha_0^3 y^2(x)/\sigma^{(\alpha_0)2}} = o\left(e^{-\beta x} e^{-\alpha_0^3 y^2(x)/2\sigma^{(\alpha_0)2}}\right). \qquad (2.15)$$

Соотношения (2.14) и (2.15) влекут утверждение леммы.

Следствие 5. *Пусть $\lambda_+ > \beta$, $v_0 \in \mathbf{R}$ и функция $y(x) \to \infty$ такова, что $y(x) = o(x^{1/6})$ при $x \to \infty$. Тогда равномерно по $y \geqslant -y(x)$ и $v \leqslant v_0$ при $x \to \infty$ имеет место соотношение (обозначение $q_n(v,x)$ — из леммы 5)*

$$\sum_{k \leqslant y\sqrt{x}} q_{n_0+k}(v,x) = b(v,\alpha_0)(c_H + o(1)) e^{-\beta x}\Phi(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)});$$

в решётчатом случае следует брать x кратным шагу решётки.

В частности, если последовательности целых чисел $k_1(x)$ и $k_2(x)$ таковы, что

$k_1(x)<k_2(x)$ и $k_2(x)-k_1(x)=o(\sqrt{x})$, то при $x\to\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{k\in[k_1(x),k_2(x)]} q_k(v,x)=o(e^{-\beta x}).$$

Доказательство. Основной вклад в сумму в лемме 6 вносят слагаемые, отвечающие значениям k порядка $o(x)$. При таких значениях k функция $b(v,x/(n_0+k))$ стремится к $b(v,\alpha_0)$. Поэтому следствие вытекает из лемм 5 и 6.

§ 3. Крамеровский случай: принцип больших уклонений для асимптотически однородной цепи

В настоящем и следующем параграфах исследуется крамеровский случай, когда $\beta>0$, $\varphi(\beta)=1$ и $\alpha_0=\varphi'(\beta)<\infty$.

3.1. Однородная цепь с нулевым начальным условием. В настоящем разделе приводятся некоторые свойства распределения максимума $M_n=\max\{0,S_1,\dots,S_n\}$. Отметим, что из (2.3) вытекает соотношение

$$x^{-1}\ln\mathbf{P}\{S_n\geqslant x\} = -V(x/n)+o(1) \tag{3.1}$$

при $x\to\infty$ равномерно по n таким, что $x/n\in(0,\alpha_1]$, где как и прежде

$$V(\alpha)=\Lambda(\alpha)/\alpha.$$

Здесь $\alpha_1>0$ — произвольное число такое, что $\Lambda(\alpha_1)<\infty$. Очевидно также, что обе части в (3.1) равны $-\infty$, если $\Lambda(\frac{x}{n})=\infty$.

Введём в рассмотрение непрерывные функции $\widetilde{V}(\alpha)$ и $\widetilde{\lambda}(\alpha)$:

$$\widetilde{V}(\alpha)\equiv\inf_{\alpha'\geqslant\alpha}V(\alpha')=\begin{cases}\beta & \text{при } \alpha\leqslant\alpha_0,\\ V(\alpha) & \text{при } \alpha\geqslant\alpha_0,\end{cases}\qquad \widetilde{\lambda}(\alpha)\equiv\begin{cases}\beta & \text{при } \alpha\leqslant\alpha_0,\\ \lambda(\alpha) & \text{при } \alpha\geqslant\alpha_0.\end{cases}$$

В следующей лемме формулируется принцип больших уклонений для M_n.

Лемма 7. *Пусть $\alpha_1>0$ таково, что $\Lambda(\alpha_1)<\infty$. Тогда при $x\to\infty$ имеет место соотношение*

$$x^{-1}\ln\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}=-\widetilde{V}(x/n)+o(1),$$

равномерно по n таким, что $x/n\in(0,\alpha_1]$; $\mathbf{P}(M_n\geqslant x)=-\infty$, если $\Lambda(\frac{x}{n})=\infty$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in[\beta,\lambda_+)$. Тогда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi}\geqslant 1$ и последовательность $e^{\lambda S_n}$ образует субмартингал. Поэтому по неравенству Дуба для неотрицательных субмартингалов для любого x действует оценка

$$\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}=\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\leqslant n}e^{\lambda S_k}\geqslant e^{\lambda x}\Big\}\leqslant e^{-\lambda x}\mathbf{E}e^{\lambda S_n}. \tag{3.2}$$

Правая часть последнего неравенства равна $e^{-\lambda x}\varphi^n(\lambda)=\exp\{-n(\lambda x/n-\ln\varphi(\lambda))\}$. Если $\alpha\equiv x/n\in[\alpha_0,\infty)$, то $\lambda(\alpha)\geqslant\beta$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}\leqslant e^{-\lambda(\alpha)x}\varphi^n(\lambda(\alpha))=e^{-n\Lambda(x/n)}=e^{-xV(x/n)}. \tag{3.3}$$

Кроме того, из (3.2) при $\lambda=\beta$ вытекает оценка Крамера

$$\mathbf{P}\{M_n\geqslant x\}\leqslant e^{-\beta x}, \tag{3.4}$$

верная для любых n и x. Объединяя последние две оценки, получаем при любых n и x неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \leqslant e^{-x\widetilde{V}(x/n)}. \tag{3.5}$$

Используя верное для любого $m\leqslant n$ неравенство $\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \geqslant \mathbf{P}\{S_m \geqslant x\}$ и полагая в (3.1) $m = n$ в случае $x/n \geqslant \alpha_0$ и $m = x/\alpha_0$ иначе, получаем при $x \to \infty$ следующую оценку снизу

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \geqslant -\widetilde{V}(x/n) + o(1). \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает утверждение леммы.

Отметим, что оценку сверху (3.5) можно получить также, пользуясь неравенством

$$\mathbf{P}(M_n \geqslant x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_k \geqslant x)$$

и очевидными оценками $\mathbf{P}(S_k \geqslant x) \leqslant e^{-k\,\Lambda(x/k)} = e^{-x\,V(x/k)}$.

В следующей лемме несколько обобщается теорема 10 из [1] в части, касающейся зоны значений времени n, в которой хвосты распределений M_n и M_∞ эквивалентны.

Лемма 8. *Пусть $y(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$ имеет место равномерная по $n \geqslant x/\alpha_0 + y(x)\sqrt{x}$ эквивалентность*

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \sim \mathbf{P}\{M_\infty \geqslant x\}.$$

Доказательство. Известна (см., например, [10, гл. XII, § 5]) оценка Крамера, согласно которой при $x \to \infty$ (в случае решётчатого распределения отдельного слагаемого x следует брать кратным шагу решётки)

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geqslant x\} \sim ce^{-\beta x}, \quad c \in (0,1). \tag{3.7}$$

Пусть $\lambda \in [0,\beta]$. Тогда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} \leqslant 1$ и последовательность $e^{\lambda S_n}$ образует супермартингал. Поэтому по неравенству Дуба для неотрицательных супермартингалов для любого x действует оценка

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\geqslant n+1} S_k \geqslant x\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\sup_{k\geqslant n+1} e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda x}\Big\} \leqslant e^{-\lambda x}\mathbf{E}e^{\lambda S_n+1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geqslant x\} - \mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \leqslant e^{-\lambda x}\mathbf{E}e^{\lambda S_{n+1}} = e^{-\lambda x}\varphi^{n+1}(\lambda) \leqslant e^{-n(\lambda x/n - \ln\varphi(\lambda))}.$$

Если $\alpha \equiv x/n < \alpha_0$, то $\lambda(\alpha) < \beta$ и, соответственно,

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geqslant x\} - \mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \leqslant e^{-n\Lambda(x/n)}.$$

Функция Λ строго выпуклая и её вторая производная на отрезке $[0,\alpha_0]$ отделена снизу от нуля некоторым числом $\delta > 0$; поэтому

$$\Lambda(\alpha) \geqslant \Lambda(\alpha_0)+\Lambda'(\alpha_0)(\alpha-\alpha_0)+\delta(\alpha-\alpha_0)^2/2 = \beta\alpha+\delta(\alpha-\alpha_0)^2/2.$$

Рассматриваемую зону значений времени n можно характеризовать неравенством $\alpha_0-\alpha \geqslant y(x)/\sqrt{n}$ (вообще говоря, изменив значения функции y в конечное число раз). В этой зоне вследствие двух последних неравенств имеем

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geqslant x\} - \mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \leqslant e^{-\beta x} e^{-\delta y^2(x)/2} = o(e^{-\beta x}) \ \text{ при } x \to \infty,$$

что в сочетании с (3.7) завершает доказательство.

3.2. Верхние оценки вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящем разделе предполагается, что вещественнозначная цепь Маркова X асимптотически однородна.

Лемма 9. *Пусть* $\lambda_1 \in [\beta, \lambda_+)$, *а если* $\lambda_+ < \infty$ *и* $\varphi'(\lambda_+) < \infty$, *то дополнительно допускаем возможность* $\lambda_1 = \lambda_+$. *Обозначим через* α_1 *конечное решение уравнения* $\lambda(\alpha)=\lambda_1$. *Пусть для любого* $\lambda \in [0, \lambda_1)$ *начальное распределение цепи имеет конечный экспоненциальный момент* $\mathbf{E}e^{\lambda X(0)} < \infty$, *а скачки цепи удовлетворяют условию*

$$\sup_{u<0} \mathbf{E}e^{\lambda(u+\xi(u))} < \infty, \qquad \sup_{u\geqslant 0} \mathbf{E}e^{\lambda\xi(u)} < \infty. \tag{3.8}$$

Тогда при $x \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \leqslant -\widetilde{V}_1(x/n) + o(1), \tag{3.9}$$

равномерно по всем значениям n *таким, что отношение* x/n *ограничено сверху. Здесь непрерывная функция* $\widetilde{V}_1(\alpha)$ *задается равенством*

$$\widetilde{V}_1(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \text{если } \alpha \leqslant \alpha_0, \\ \Lambda(\alpha)/\alpha, & \text{если } \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \\ (\Lambda(\alpha_1)+(\alpha-\alpha_1)\lambda_1)/\alpha, & \text{если } \alpha \geqslant \alpha_1. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 4. По определению функция $\widetilde{V}_1(\alpha)$ совпадает с функцией $\widetilde{V}(\alpha)$ на множестве $\alpha \leqslant \alpha_1$. Если $\lambda_+ < \infty$, $\varphi'(\lambda_+) < \infty$ и $\lambda_1 = \lambda_+$, то $\alpha_1 = \alpha_+ < \infty$ и $\widetilde{V}_1(\alpha) = \widetilde{V}(\alpha)$ при всех значениях α. В общем случае $\widetilde{V}_1 \leqslant \widetilde{V}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 9. Пусть λ_2 — произвольное число, меньшее λ_1, α_2 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_2$ и $\widetilde{V}_2(\alpha)$ — функция, построенная как $\widetilde{V}_1(\alpha)$ с заменой λ_1 и α_1 на λ_2 и α_2 соответственно.

Для любого $U > 0$ определим случайную величину $\Xi(U)$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\Xi(U) \geqslant y\} = \max\Big(\sup_{u<U} \mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant U+y\},\ \sup_{u\geqslant U} \mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant y\}\Big).$$

Из слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$ вытекает, что $\Xi(U)$ слабо сходится к ξ при $U \to \infty$, причём в силу условия (3.8) сходятся и экспоненциальные моменты: для любого $\lambda \in [0, \lambda_2]$

$$\mathbf{E}e^{\lambda\Xi(U)} \to \mathbf{E}e^{\lambda\xi} \text{ при } U \to \infty.$$

Обозначим $\varphi(U, \lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\Xi(U)}$, $\beta(U) = \sup\{\lambda : \varphi(U, \lambda) \leqslant 1\}$, $\alpha_0(U) = \varphi'(U, \beta(U))$, $\Lambda(U, \alpha)$ — функцию уклонений случайной величины $\Xi(U)$, $\lambda(U, \alpha) = \Lambda'(U, \alpha)$, $\alpha_2(U)$ — решение уравнения $\lambda(U, \alpha) = \lambda_2$ и

$$\widetilde{V}_2(U, \alpha) = \begin{cases} \beta(U), & \text{если } \alpha \leqslant \alpha_0(U), \\ \Lambda(U, \alpha)/\alpha, & \text{если } \alpha_0(U) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2(U), \\ (\Lambda(U, \alpha_2(U))+(\alpha-\alpha_2(U))\lambda_2)/\alpha, & \text{если } \alpha \geqslant \alpha_2(U). \end{cases}$$

Все эти величины определены при достаточно больших значениях U. На множестве $\alpha \leqslant \alpha_2$ (α_2 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_2$) функция уклонений $\Lambda(U, \alpha)$ сходится к

$\Lambda(\alpha)$ и, соответственно,

$$\widetilde{V}_2(U,\alpha) \to \widetilde{V}_2(\alpha) \text{ при } U \to \infty. \tag{3.10}$$

Рассмотрим однородную цепь Маркова $Y_n(U) = (Y_{n-1}(U)+\Xi_n(U))^+$, где $\Xi_n(U)$ — независимые копии случайной величины $\Xi(U)$. По построению для любых начальных состояний v и u, подчинённых условиям $v \leqslant u$ и $u \geqslant U$, выполняется неравенство $v+\xi(v) \leqslant_{\rm st} u+\Xi(U)$. Поэтому однородная цепь $U+Y_n(U)$ мажорирует по вероятности исходную цепь X_n. В частности,

$$\mathbf{P}\{X(n) \geqslant x\} \leqslant \mathbf{P}\{U+Y_n(U) \geqslant x\}.$$

Отсюда и из (3.5) получаем оценку

$$\mathbf{P}\{X(n) \geqslant x\} \leqslant e^{-(x-U)\widetilde{V}(U,(x-U)/n)}.$$

Утверждение леммы вытекает теперь из неравенства $\widetilde{V}_2(U,\alpha) \leqslant \widetilde{V}(U,\alpha)$, сходимости (3.10) и произвольности выбора числа λ_2, меньшего λ_1.

В случае, когда случайная величина ξ ограничена сверху, предельным переходом по λ_1, $\lambda_1 \to \infty$, (соответственно, $\alpha_1 \to \alpha_+$) получаем из леммы 9 следующее

Следствие 6. *Пусть $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+ < \infty$, т. е. случайная величина ξ ограничена сверху значением α_+. Пусть для любого $\lambda > 0$ выполнено условие (3.8) и $\mathbf{E}e^{\lambda X(0)}$ конечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x \to \infty$ имеют место соотношение*

$$x^{-1}\ln \pi_n(x) \leqslant -\widetilde{V}(x/n) + o(1)$$

равномерно по n таким, что $x/n \leqslant \alpha_+-\varepsilon$, и сходимость

$$x^{-1}\ln \pi_n(x) \to -\infty$$

равномерно по n таким, что $x/n \geqslant \alpha_++\varepsilon$.

3.3. Оценки снизу для вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящем разделе рассматривается асимптотически однородная цепь Маркова X со значениями в $\mathbf{R}$. Начальное распределение цепи полагается произвольным.

Лемма 10. *Пусть α_1 — произвольное число бо́льшее α_0 (в случае ограниченности случайной величины ξ предполагаем дополнительно, что $\alpha_1 < \alpha_+$). Пусть для любого уровня $u \in \mathbf{R}$ найдется $n_0 = n_0(u)$ такое, что*

$$\mathbf{P}\{X(n_0) \geqslant u\} > 0. \tag{3.11}$$

Тогда при $x \to \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1}\ln \pi_n(x) \geqslant -\widetilde{V}(x/n) + o(1),$$

равномерно по тем значениям n, для которых $\alpha_0 \leqslant x/n \leqslant \alpha_1$.

Если, кроме того, для любого $u \in \mathbf{R}$ найдётся n_0 такое, что

$$\inf_{n \geqslant n_0} \mathbf{P}\{X(n) \geqslant u\} > 0, \tag{3.12}$$

то при $x \to \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1}\ln \pi_n(x) \geqslant -\beta + o(1),$$

равномерно по тем значениям n, для которых $x/n \leqslant \alpha_0$.

Замечание 5. Ввиду слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$ и условия $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$ найдётся уровень U такой, что для любого $u \geqslant U$ выполняется неравенство $\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant \delta\} \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Поэтому для выполнения условия (3.11) необходимо и достаточно, чтобы при некотором n событие $\{X(n) \geqslant U\}$ имело положительную вероятность. Соответственно, условие (3.12) эквивалентно тому, что при некотором N вероятности событий $\{X(n) \geqslant U\}$ равномерно по $n \geqslant N$ отделены от нуля.

Замечание 6. Достаточным условием для выполнения (3.12) является слабая сходимость распределения (эргодичность) цепи $X(n)$ к распределению неограниченной сверху случайной величины $X(\infty)$.

Доказательство леммы. Для любого u рассмотрим случайную величину $\eta(u)$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta(u) \geqslant y\} = \inf_{v \geqslant u} \mathbf{P}\{\xi(v) \geqslant y\}.$$

По построению $\eta(u) \leqslant_{\mathrm{st}} \xi(v)$ для любых u и v, связанных неравенством $u \leqslant v$. В силу асимптотической однородности цепи $\eta(u) \Rightarrow \xi$ при $u \to \infty$. Обозначим через $T_i(u) = \eta_1(u) + \cdots + \eta_i(u)$ сумму i независимых копий случайной величины $\eta(u)$. По построению для любых $u \leqslant v \leqslant y$ и m справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X(v,k) \geqslant v \text{ при всех } k < m,\ X(v,m) \geqslant v + y\} \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}\{T_k(u) \geqslant 0 \text{ при всех } k < m,\ T_m(u) \geqslant y\}. \quad (3.13)\end{aligned}$$

Для любого момента времени $N < n$ вероятность для $X(n)$ превзойти уровень x можно оценить снизу следующим образом ($U \geqslant 0$):

$$\begin{aligned}\pi_n(x) &\geqslant \mathbf{P}\{X(N) \geqslant U,\ X(k) \geqslant X(N) \text{ при } N < k < n, X(n) - X(N) \geqslant x\} = \\ &= \mathbf{P}\{X(N) \geqslant U\}\mathbf{P}\{X(k) \geqslant X(N) \text{ при } N < k < n, X(n) - X(N) \geqslant x | X(N) \geqslant U\} \equiv \\ &\equiv p_1 p_2. \quad (3.14)\end{aligned}$$

Оценим снизу p_1 и p_2. В силу условия (3.11) для любого фиксированного U найдется N такое, что $p_1 > 0$. Используя (3.13) при $y = x$ и $m = n - N$, получаем следующую оценку для p_2:

$$p_2 \geqslant \mathbf{P}\{T_k(U) \geqslant 0 \text{ при всех } k < n - N,\ T_{n-N}(U) \geqslant x\}.$$

Подставляя полученные оценки в (3.14), приходим к неравенству

$$\pi_n(x) \geqslant p_1 \mathbf{P}\{T_k(U) \geqslant 0 \text{ при всех } k < n - N,\ T_{n-N}(U) \geqslant x\}. \quad (3.15)$$

Отсюда в силу леммы 5 получаем при $x \to \infty$ следующую оценку:

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \geqslant \widetilde{V}_{\eta(U)}(x/(n-N)) + o(1), \quad (3.16)$$

равномерно по n таким, что $\alpha_0 \leqslant x/(n-N) \leqslant \alpha_1$, где $\widetilde{V}_{\eta(U)}$ — функция $\widetilde{V}$, отвечающая случайной величине $\eta(U)$.

Так как семейство случайных величин $\eta(u)$ стохастически не убывает и слабо сходится к ξ, то $\widetilde{V}_{\eta(u)}(\alpha) \to \widetilde{V}(\alpha)$ при $u \to \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Поэтому из (3.16), ввиду произвольности выбора уровня U, вытекает первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения леммы положим $N = n - x/\alpha_0$ (с известной оговоркой о целочисленности N). Пусть U — произвольный уровень. В силу условия (3.12) найдётся n_0 такое, что при всех $N \geqslant n_0$ вероятность $p_1 = p_1(N)$ не меньше некоторого положительного числа δ. Неравенство (3.15) превращается в следующее

$$\pi_n(x) \geqslant \delta \mathbf{P}\{T_k(U) \geqslant 0 \text{ при всех } k < x/\alpha_0,\ T_{x/\alpha_0}(U) \geqslant x\}.$$

Оценивая последнюю вероятность с помощью леммы 5, получаем при $x \to \infty$ соотношение

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \geqslant \widetilde{V}_{\eta(U)}(\alpha_0) + o(1),$$

равномерно по тем значениям n, для которых $x/n \leqslant \alpha_0$, что, как и ранее, завершает доказательство.

3.4. Грубая (логарифмическая) асимптотика вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи. В настоящем разделе также предполагается, что цепь Маркова X принимает значения в $\mathbf{R}$ и является асимптотически однородной. Из доказанных выше лемм 9, 10 и следствия 6 вытекает следующая

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1 \in [\beta, \lambda_+)$ и α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Пусть для любого $\lambda \in (0, \lambda_1)$ начальное распределение цепи имеет конечный экспоненциальный момент $\mathbf{E}e^{\lambda X(0)}$, а скачки цепи удовлетворяют условию* (3.8)*. Пусть выполнено условие* (3.12)*. Тогда при $x \to \infty$ имеет место равенство*

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) = -\widetilde{V}(x/n) + o(1), \tag{3.17}$$

равномерно по n таким, что $x/n \leqslant \alpha_1$.

*Пусть теперь $\mathbf{E}e^{\lambda X(0)} < \infty$ для всех $\lambda < \lambda_+$ и справедливо (*3.8*). Тогда (*3.17*) имеет место, если $x \to \infty$, $n \to \infty$ так, что $\frac{x}{n} \to \alpha$, $\Lambda(\alpha + 0) < \infty$.*

Отметим, что условие на $X(0)$ может быть ослаблено в зависимости от того, как растут n и x.

§ 4. Крамеровский случай: точная асимптотика $\pi_n(x)$ для частично однородной цепи

Пусть X — U-частично однородная харрисовая цепь со значениями в $\mathbf{R}$ и $0 < \beta < \lambda_+$. Предполагаем, что мера π_n сходится к некоторой (с необходимостью инвариантной) неограниченной справа мере π в метрике полной вариации, т. е.

$$\sup_{B \subseteq \mathbf{R}} |\pi_n(B) - \pi(B)| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4.1}$$

где супремум берется по всем борелевским множествам B. Для счётной цепи X сходимость по вариации имеет место автоматически, если цепь неразложимая, непериодическая и допускает инвариантное распределение (при этом π есть инвариантное распределение); для вещественнозначных цепей условия сходимости по вариации можно найти, например, в [15, 12].

В настоящем параграфе предполагаем, что при некотором λ_1 из интервала (β, λ_+)

скачки цепи удовлетворяют условию

$$\sup_{u<U} \int_0^\infty e^{\lambda_1 v} P(u,dv) < \infty, \tag{4.2}$$

а начальное распределение π_0 имеет конечный экспоненциальный момент того же порядка:

$$\mathbf{E} e^{\lambda_1 X(0)} < \infty. \tag{4.3}$$

Пусть α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha){=}\lambda_1$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть распределение F нерешётчатое.*

(а) *Пусть $y = y_n(x){\in}\mathbf{R}$ таково, что $n = x/\alpha_0{+}y\sqrt{x}$; $z(x)$ — любая функция такая, что $z(x) \to \infty$, $z(x) = o(x^{1/6})$ при $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$ равномерно по всем значениям n таким, что $y_n(x) \geqslant -z(x)$, имеет место соотношение*

$$\pi_n(x) = (c(\alpha_0){+}o(1))e^{-\beta x}\Phi(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)}),$$

где $\Phi(v)$ — функция распределения стандартного нормального закона, константа $c(\alpha_0) > 0$ не зависит от начального распределения цепи X (см. (4.10)).

В частности, если $\widehat{y}(x) \to \infty$, то при $x \to \infty$ имеет место равномерная по $n \geqslant x/\alpha_0{+}\widehat{y}(x)\sqrt{x}$ асимптотика

$$\pi_n(x) \sim c(\alpha_0)e^{-\beta x}.$$

(б) *Если $x/n \to \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, то при $x \to \infty$*

$$\pi_n(x) \sim c(\alpha) n^{-1/2} e^{-xV(x/n)},$$

где непрерывная по α функция $c(\alpha)$, зависящая от начального распределения цепи X, задаётся при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ формулой (4.14).

Доказательство. Для упрощения обозначений будем использовать символ π_n также для обозначения распределения $X(n) : \pi_n(B) = \mathbf{P}(X(n) \in B)$, так что $\pi_n(x) \equiv \pi_n([x,\infty))$. Это нигде не приводит к недоразумениям. В основе последующих рассмотрений лежит формула полной вероятности по последнему попаданию цепи во множество $(-\infty, U]$:

$$\pi_n(x) = \int_U^\infty \pi_0(dv) q_n(U{-}v, x{-}v) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^\infty P(u,dv) q_{n-k-1}(U{-}v, x{-}v), \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned} q_k(U{-}v, x{-}v) &\equiv \mathbf{P}\{X(v,l) \geqslant U,\ l = 1,\dots,k{-}1;\ X(v,k) \geqslant x\} = \\ &= \mathbf{P}\{S_l \geqslant U{-}v,\ l = 1,\dots,k{-}1;\ S_k \geqslant x{-}v\}, \end{aligned}$$

в силу U-частичной однородности цепи. $\int_U^\infty$ в (4.4) понимается как $\int_{U+0}^\infty$. Обозначение $q_k(v,x)$ было введено в лемме 5.

Разбивая область интегрирования в интегралах по переменной v на две части

$(U, U_1]$ и (U_1, ∞), получаем неравенство

$$\left|\pi_n(x) - \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{U} \pi_k(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{U_1}^{\infty} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) + \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{u<U} \int_{U_1}^{\infty} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v). \tag{4.5}$$

Наша ближайшая цель — выбрать уровень $U_1 = U_1(x)$, растущий достаточно медленно, но так, чтобы оценка в правой части была бесконечно малой по сравнению с объявленной асимптотикой $\pi_n(x)$ во всем спектре уклонений.

Поскольку $q_k(U-v, x-v) \leqslant \mathbf{P}\{S_k \geqslant x-v\}$, то в силу экспоненциального неравенства Чебышева для любого $\lambda \geqslant \beta$ имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \leqslant e^{-(x-v)\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{n-k-1}(\lambda) \leqslant n e^{v\lambda} e^{-x\lambda} \varphi^n(\lambda),$$

так как $\varphi(\lambda) \geqslant 1$. Если $x/n \geqslant \alpha_0$, то полагая здесь $\lambda = \lambda(x/n)$, получаем при таких n неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \leqslant n e^{v\lambda(x/n)} e^{-xV(x/n)} \leqslant c_1 x e^{v\lambda(x/n)} e^{-xV(x/n)}.$$

Если же $x/n \leqslant \alpha_0$, то применим неравенство (2.11), в силу которого

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \leqslant c_2 e^{v\beta} e^{-\beta x}.$$

Итак, при любом значении n правая часть в (4.5) не превосходит

$$c_3 x e^{-x\widetilde{V}(x/n)} \left(\int_{U_1}^{\infty} \pi_0(dv) + \sup_{u<U} \int_{U_1}^{\infty} P(u, dv)\right) e^{-v\widetilde{\lambda}(x/n)} \leqslant c_4 x e^{-x\widetilde{V}(x/n)} e^{-U_1(\lambda_1 - \widetilde{\lambda}(x/n))},$$

ввиду условий (4.2) и (4.3).

В каждом из двух случаев (а) и (б) найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda_1 - \widetilde{\lambda}(x/n) > \varepsilon$ при всех достаточно больших x. Положим $U_1 = 2\varepsilon^{-1} \ln x$. Тогда правая часть последней оценки не превосходит ${}_4 e^{-x\widetilde{V}(x/n)}/x$. Учитывая это обстоятельство в (4.5), приходим при $x \to \infty$ к соотношению

$$\pi_n(x) = \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{U} \pi_k(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v) +$$

$$+ o(e^{-x\widetilde{V}(x/n)}/\sqrt{n}). \tag{4.6}$$

Дальнейший ход вычислений существенно различается в случаях (а) и (б) теоремы.

Случай (а). Разбивая сумму в равенстве (4.6) на две и учитывая неравенство $\widetilde{V}(x/n) \geqslant \beta$, получаем

$$\pi_n(x) = \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) +$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{\ln x}+\sum_{k=\ln x}^{n-1}\right)\int_{-\infty}^{U}\pi_k(du)\int_U^{U_1}P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v)+o(e^{-x\beta})\equiv$$
$$\equiv I_0+\Sigma_1+\Sigma_2+o(e^{-x\beta}). \tag{4.7}$$

Основной вклад в асимтотику вероятности $\pi_n(x)$ вносит вторая из сумм, в то время как вклад остальных слагаемых пренебрежимо мал. Проверим это.

Равномерно по $k>\ln x$ имеет место сходимость по вариации π_k к π при $x\to\infty$. Следовательно, имеет место эквивалентность

$$\Sigma_2\sim\int_{-\infty}^{U}\pi(du)\int_U^{U_1}P(u,dv)\sum_{k=\ln x}^{n-1}q_{n-k-1}(U-v,x-v)\sim$$
$$\sim\int_{-\infty}^{U}\pi(du)\int_U^{U_1}P(u,dv)b(U-v,\alpha_0)c_He^{-\beta(x-v)}\Phi\Big(y\alpha_0^{3/2}/\sigma^{(\alpha_0)}\Big), \tag{4.8}$$

ввиду следствия 5, где, как и ранее, $b(U-v,\alpha)=\mathbf{P}\{M_-^{(\alpha)}\geqslant U-v\}$.

Покажем относительную малость интеграла I_0 и суммы Σ_1. Последовательно используя второе утверждение следствия 5 и условия (4.3), (4.2), приходим к соотношениям

$$I_0+\Sigma_1=o(e^{-\beta x})\left(\int_U^{U_1}\pi_0(dv)e^{\beta v}+\sup_{u<U}\int_U^{U_1}P(u,dv)\right)e^{\beta v}=o(e^{-\beta x}). \tag{4.9}$$

Подставляя (4.9) и (4.8) в (4.7), получаем утверждение (а) теоремы с константой

$$c(\alpha_0)=\frac{1}{\beta\alpha_0}\int_{-\infty}^{U}\pi(du)\int_U^{\infty}b(U-v,\alpha_0)e^{\beta v}P(u,dv). \tag{4.10}$$

С л у ч а й (б). Разобъём сумму в равенстве (4.6) на две:

$$\pi_n(x)=\int_U^{U_1}\pi_0(dv)q_n(U-v,x-v)+$$
$$+\left(\sum_{k=0}^{n^{1/7}}+\sum_{k=n^{1/7}}^{n-1}\right)\int_{-\infty}^{U}\pi_k(du)\int_U^{U_1}P(u,dv)q_{n-k-1}(U-v,x-v)+o\Big(\frac{e^{-xV(x/n)}}{\sqrt{n}}\Big)$$
$$\equiv I_0+\Sigma_1+\Sigma_2+o\Big(e^{-xV(x/n)}/\sqrt{n}\Big). \tag{4.11}$$

Поскольку $x/n\to\alpha\in(\alpha_0,\alpha_1)$, по лемме 5 при $x\to\infty$ равномерно по $k=o(n)$ и $v=o(x)$ имеет место соотношение

$$q_{n-k}(U-v,x-v)=\mathbf{P}\{S_{n-k}\geqslant x-v\}(b(U-v,\alpha)+o(1)). \tag{4.12}$$

Кроме того, по следствию 2 имеем при $k=o(n)$ равномерно по $v\in[U,U_1)$ (соответственно, $v^2/n\leqslant U_1^2/n\to 0$) соотношения

$$\mathbf{P}\{S_{n-k}\geqslant x-v\}=\frac{\widehat{c}(\alpha)+o(1)}{\sqrt{n-k}}e^{-(n-k)\Lambda(\frac{x-v}{n-k})}=$$
$$=(\widehat{c}(\alpha)+o(1))n^{-1/2}e^{-(n-k)\Lambda(\frac{x}{n-k})+v\lambda(\frac{x}{n-k})+o(1)}\sim$$
$$\sim\widehat{c}(\alpha)n^{-1/2}e^{-xV(\frac{x}{n-k})+v\lambda(\alpha)+o(v)},$$

где функция $\widehat{c}(\alpha) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)$ непрерывна по α. Продолжая вычисления, выводим равномерное по $k \leqslant n^{1/7}$ и $v \leqslant U_1 = O(\ln n)$ соотношение

$$\mathbf{P}\{S_{n-k} \geqslant x-v\} \sim (\widehat{c}(\alpha)+o(1))n^{-1/2}e^{-xV(x/n)-\alpha^2 kV'(x/n)+v\lambda(\alpha)+o(v)}.$$

Как отмечалось в разделе 2.7, $V'(\alpha) = \alpha^{-2}\ln\varphi(\lambda(\alpha))$. Отсюда, учитывая (4.12), имеем асимптотику

$$I_0 + \Sigma_1 \sim c(\alpha)n^{-1/2}e^{-xV(x/n)}, \tag{4.13}$$

где

$$c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)}\left(\int_U^\infty \pi_0(dv) + \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\varphi^k(\lambda(\alpha))}\int_{-\infty}^U \pi_k(du)\int_U^\infty P(u,dv)\right)b(U-v,\alpha)e^{\lambda(\alpha)v}. \tag{4.14}$$

Покажем, что сумма Σ_2 в (4.11) пренебрежимо мала по сравнению с Σ_1. При $k \geqslant n^{1/7}$ и $v \leqslant U_1 = O(\ln n)$ для достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{x-v}{n-k} \geqslant \frac{x}{n}+\frac{n^{1/8}}{x}$. Так как $x/n \to \alpha > \alpha_0$, то, в частности, $\frac{x-v}{n-k} > \alpha_0$. Поэтому ввиду экспоненциального неравенства Чебышева и неравенства $V((x-v)/(n-k)) \geqslant V(x/n)+V'(x/n)\frac{n^{1/8}}{x}$ (верного ввиду выпуклости функции V) имеем при $k \geqslant n^{1/7}$ и $v \leqslant U_1$ оценки

$$\mathbf{P}\{S_{n-k} \geqslant x-v\} \leqslant e^{v\lambda((x-v)/(n-k))}e^{-xV((x-v)/(n-k))} \leqslant e^{v\lambda_1}e^{-xV(x/n)}e^{-n^{1/9}}.$$

Отсюда и из условия (4.2) вытекает, что $\Sigma_2 = o(e^{-xV(x/n)}/\sqrt{n})$. Подставляя эту оценку и асимптотику (4.13) в (4.11), получаем утверждение (б) теоремы.

Пусть распределение F решётчатое с минимальной решёткой $\{kh, k \in \mathbf{Z}\}$, а цепь X в области $[U,\infty)$ принимает значения тоже лишь из этой решётки. Тогда утверждения теоремы для вероятностей $\pi_n(x)$ остаются справедливыми, если ограничиться лишь значениями x из решётки, а константы $c(\alpha_0)$ и $c(\alpha)$ домножить на $\beta h/(1-e^{-\beta h})$ и $\lambda(\alpha)h/(1-e^{-\lambda(\alpha)h})$ соответственно.

§ 5. Промежуточный случай: точная асимптотика $\pi_n(x)$ для асимптотически однородной цепи

В настоящем параграфе исследуется асимптотически однородная в пространстве цепь Маркова в промежуточном случае. Здесь картина совершенно иная по сравнению с крамеровским случаем и асимптотика вероятностей больших уклонений найдена в явном виде при всех значениях времени n.

По сравнению с предыдущими параграфами здесь мы рассмотрим более общую ситуацию. Именно, всюду в этом параграфе предполагаем, что существует случайная величина η с распределением G и преобразованием Лапласа $\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\eta}$ такая, что для некоторого $V \in \mathbf{R}$ выполняется

$$v+\xi(v) \leqslant_{\rm st} V+\eta \ \text{ при } v < V, \quad \xi(v) \leqslant_{\rm st} \eta \ \text{ при } v \geqslant V. \tag{5.1}$$

Основные условия накладываются на η: $\mathbf{E}\eta < 0$ и $\psi(\beta) < 1$, где $\beta = \sup\{\lambda : \psi(\lambda) \leqslant 1\}$. Отметим, что *теперь параметр* β, играющий всюду важную роль, *относится к распределению* G *мажоранты* η, а не к распределению F величины ξ.

Напомним определения некоторых классов функций и распределений, играющих важную роль при исследовании вероятностей больших уклонений в промежуточном случае.

Следуя [5] положительную функцию g будем называть *локально степенной*, если для всякого фиксированного t предел при $u \to \infty$ отношения $g(u+t)/g(u)$ равен 1. Аналогично предыдущему положим для краткости $G(x) = G([x,\infty))$, $\pi(x) = \pi([x,\infty))$.

Определение 2. Говорим, что нерешётчатое распределение G в $\mathbf{R}$ принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, если

(а) функция $e^{\gamma u}G(u)$ локально степенная;

(б) $\psi(\gamma) \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\gamma u}G(du) < \infty$;

(в) свёртка распределения G с самим собой удовлетворяет соотношению асимптотической эквивалентности $G{*}G(u) \sim 2\psi(\gamma)G(u)$ при $u \to \infty$.

Говорим, что распределение G в $\mathbf{Z}$ принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, если свойства (а)–(в) выполняются для $u \in \mathbf{Z}$.

Класс $\mathscr{S}(\gamma)$ включает в себя, в частности, распределения с хвостами типа $e^{-\gamma u}g(u)$, где $g(u)$ — интегрируемая функция, правильно меняющаяся на бесконечности. Отметим, что если распределение случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$ и $\psi(\gamma) \leqslant 1$, то $\beta = \gamma$.

5.1. Оценки сверху для хвостов достационарного и стационарного распределений цепи. В этом разделе приводится некоторое обобщение леммы 2 из [5], касающееся оценки сверху хвоста распределения цепи со значениями в $\mathbf{R}$ в промежуточном случае.

Лемма 11. *Пусть распределение G случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Тогда, если цепь X допускает (вообще говоря, не единственную) инвариантную меру π, то*

$$\sup_x \frac{\pi(x)}{G(x)} < \infty. \tag{5.2}$$

Если начальное распределение π_0 цепи таково, что $\pi_0(x) \leqslant c'G(x)$ для некоторого c', то

$$\sup_{n,x} \frac{\pi_n(x)}{G(x)} < \infty. \tag{5.3}$$

Доказательство. Рассмотрим однородную в пространстве цепь $Y = \{Y(n)\}$ с неотрицательными значениями, определённую равенством $Y(n+1) = (Y(n)+\eta_{n+1})^+$, где случайные величины η_n суть независимые копии η. В силу условия (5.1) цепь Маркова $V{+}Y(n)$ мажорирует цепь $X(n)$ и, следовательно,

$$\pi(x) \leqslant \pi_Y(x-V), \tag{5.4}$$

где π_Y — инвариантная мера цепи Y. Поскольку $\mathbf{E}e^{\beta\eta} < 1$ и распределение случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$, то в силу теоремы 1 из [11] $\pi_Y(x) \sim {}_1\mathbf{P}\{\eta \geqslant x\}$ при $x \to \infty$ для некоторого c_1. Поскольку функция $e^{\beta t}G(t)$ локально степенная, $\pi_Y(x-V) \sim c_1 e^{\beta V}G(x)$. Подставляя полученную эквивалентность в (5.4), приходим к оценке (5.2).

Докажем (5.3). Пусть $Y(0) = 0$ и, стало быть, $Y(1) = \eta_1^+$. Ввиду условия $\pi_0(x) \leqslant c'G(x)$ и того, что функция $e^{\beta x}G(x)$ локально степенная, найдётся достаточно большой уровень V' такой, что $X(0) \leqslant_{\mathrm{st}} V'{+}Y(1)$. Отсюда в силу условия (5.1) $X(n) \leqslant_{\mathrm{st}}$

$V'+Y(n+1)$ для любого n и, соответственно,

$$\pi_n(x) \leqslant \mathbf{P}\{Y(n+1) \geqslant x-V'\}.$$

Последнее неравенство влечёт (5.3), поскольку, как известно, однородная цепь $Y(n)$ при нулевом начальном условии не убывает по распределению и, следовательно, $\mathbf{P}\{Y(n+1) \geqslant x-V'\} \leqslant \pi_Y(x-V')$ для любого n. Лемма доказана.

5.2. Точная асимптотика достационарных распределений.

Теорема 3. *Пусть распределение G случайной величины η нерешётчатое и принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Пусть выполнено условие* (5.1) *и для каждого $u \in \mathbf{R}$ существует $c(u)$ такое, что*

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant t\}}{G(t)} \to c(u) \tag{5.5}$$

при $t \to \infty$ равномерно по u из любого компакта. Кроме того, предполагаем выполненной сходимость (4.1). *Тогда*

(i) *если начальное распределение π_0 таково, что $\pi_0(x)/G(x) \to c_0 \geqslant 0$, то имеет место равномерное по $n \geqslant 0$ соотношение*

$$\pi_n(x) = (c_n + o(1))G(x) \quad \textit{при } x \to \infty, \tag{5.6}$$

где c_n при $n \geqslant 1$ определяется рекуррентным образом $c_n = \alpha_{n-1} + \varphi(\beta)c_{n-1}$,

$$\alpha_{n-1} = \int_{\mathbf{R}} c(u)e^{\beta u}\pi_{n-1}(du) \geqslant 0;$$

(ii) *если $\pi_0(x) \leqslant c'G(x)$, то при n, $x \to \infty$*

$$\pi_n(x) = (c_\infty + o(1))G(x), \tag{5.7}$$

где

$$c_\infty = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\alpha_\infty}{1-\varphi(\beta)}, \quad \alpha_\infty = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \int_{\mathbf{R}} c(u)e^{\beta u}\pi(du) \geqslant 0.$$

Замечание 7. Пусть распределение G сосредоточено на решётке целых чисел, причём данная решётка минимальна. Тогда утверждения теоремы остаются справедливыми, если значения цепи X выше некоторого уровня, а также параметров t и x в (5.5), (5.6) и (5.7) — целые.

Замечание 8. Поскольку $\varphi(\beta) \leqslant \psi(\beta) < 1$ и $c(u) \leqslant c$, то в силу леммы 11 все константы α_n конечны и, более того, последовательность $\{\alpha_n\}$, а вместе с ней и $\{_n\}$, равномерно ограничена.

Из теоремы, пункт (ii), вытекает, что при n, $x \to \infty$ асимптотика вероятности $\pi_n(x)$ совпадает с асимптотикой хвоста инвариантной меры: $\pi_n(x) = (1+o(1))\pi(x)$.

Пусть случайные величины ξ_n независимы и распределены одинаково с ξ, $\varphi(\beta) < 1$ и распределение случайной величины ξ принадлежит классу $\mathscr{S}(\beta)$. Пусть X — однородная цепь в $\mathbf{R}^+$, т. е. $X(n+1) = (X(n) + \xi_{n+1})^+$. Применяя теорему 3 в этом конкретном случае, получаем, что для однородных цепей

$$\pi_n(x) = (c_n + o(1))F(x), \quad F(x) = F([x,\infty))$$

при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 1$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k(\beta)\mathbf{E}e^{\beta X(n-1-k)}.$$

Ввиду (1.2) результаты настоящего параграфа для однородных цепей, относящиеся к случаю фиксированного n, повторяют результаты работы [16]; при этом мы даём другое выражение для коэффициентов c_n. Кроме того, мы доказываем, что

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\leqslant n} S_k \geqslant x\Big\} \sim \mathbf{P}\Big\{\sup_{k} S_k \geqslant x\Big\} \sim c_\infty F(x) \ \text{ при } n, x \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 проведём в нерешётчатом случае (в решётчатом случае следует внести лишь минимальные изменения, связанные с целочисленностью некоторых параметров). Поскольку временной параметр n принимает лишь счётное число значений, для доказательства теоремы достаточно проверить, что

(а) (5.6) выполнено при $x \to \infty$ для любого фиксированного n;

(б) выполнено (5.7).

Фиксируем $U > V$. Для любого $x > 2U$ имеем равенство

$$\begin{aligned}\frac{\pi_{n+1}(x)}{G(x)} &= \left(\int_{-\infty}^{-U} + \int_{-U}^{U} + \int_{U}^{x-U} + \int_{x-U}^{\infty}\right) \frac{\mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant x\}}{G(x)}\pi_n(du) \equiv \\ &\equiv I_1(U,n,x) + \cdots + I_4(U,n,x). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Рассмотрим отдельно каждое из этих четырёх слагаемых.

Поскольку функция $e^{\beta x}\mathbf{P}\{\eta \geqslant x\}$ локально степенная, то ввиду условия (5.5) имеем равномерную по $|u| \leqslant U$ сходимость

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant x-u\}}{G(x)} \to c(u)e^{\beta u} \ \text{ при } x{\to}\infty. \tag{5.9}$$

Следовательно, равномерно по n

$$I_2(U,n,x) \to \int_{-U}^{U} c(u)e^{\beta u}\pi_n(du) \ \text{ при } x{\to}\infty. \tag{5.10}$$

Докажем, что слагаемые $I_1(U,n,x)$ и $I_3(U,n,x)$ в известном смысле пренебрежимо малы. Ввиду условия (5.1) слагаемое $I_1(U,n,x)$ допускает оценку

$$I_1(U,n,x) \leqslant \frac{G(x-V)}{G(x)}(1-\pi_n(-U)).$$

Так как функция $e^{\beta x}G(x)$ локально степенная, а семейство распределений $\{\pi_n\}$ слабо компактно, из последней оценки имеем

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_1(U,n,x)\right) \leqslant e^{\beta V}\sup_n(1-\pi_n(-U)) \equiv I_1(U), \quad \lim_{U\to\infty} I_1(U) = 0. \tag{5.11}$$

Оценим слагаемое $I_3(U,n,x)$. Используя условие (5.1) и интегрируя по частям, получаем

$$I_3(U,n,x) \leqslant \int_U^{x-U} \frac{G(x-u)}{G(x)}\pi_n(du) =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left.\frac{\pi_n(u)G(x-u)}{G(x)}\right|_U^{x-U} + \int_U^{x-U} \frac{\pi_n(u)d_uG(x-u)}{G(x)} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\pi_n(U)G(x-U)}{G(x)} + \int_U^{x-U} \frac{\pi_n(x-v)G(dv)}{G(x)} \equiv \\
&\equiv I_{31}(U,n,x) + I_{32}(U,n,x). \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Для любого фиксированного U

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_{31}(U,n,x)\right) \leqslant \sup_n \pi_n(U)e^{\beta U},$$

и, следовательно, в силу леммы 11

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_{31}(U,n,x)\right) \leqslant \widehat{c}G(U)e^{\beta U} = I_{31}(U), \quad \lim_{U\to\infty} I_{31}(U) = 0. \qquad (5.13)$$

Повторно используя лемму 11, оценим слагаемое I_{32}:

$$I_{32}(U,n,x) \leqslant \widehat{c}\int_U^{x-U} \frac{G(x-v)G(dv)}{G(x)}.$$

Поэтому, как следует из [13] (см. формулу (2) там),

$$\lim_{U\to\infty}\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_{32}(U,n,x)\right) = 0. \qquad (5.14)$$

Подставляя (5.13) и (5.14) в (5.12), приходим к соотношениям

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_n I_3(U,n,x)\right) \leqslant I_3(U), \quad \lim_{U\to\infty} I_3(U) = 0. \qquad (5.15)$$

Оценим $I_4(U,n,x)$. Обозначим

$$\overline{c}_n = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi_n(x)}{G(x)}.$$

Согласно лемме 11 $\overline{c}_n < \infty$ для любого n. Так как условие слабой сходимости распределений скачков эквивалентно сходимости в метрике Леви — Прохорова, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $u_0 = u_0(\varepsilon)$ такое, что

$$F(v+\varepsilon) - \varepsilon \leqslant \mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant v\} \leqslant F(v-\varepsilon) + \varepsilon \qquad (5.16)$$

для любых $u \geqslant u_0$ и v. Поэтому при $u \geqslant u_0 + U$ слагаемое $I_4(U,n,x)$ в (5.8) можно оценить сверху следующим образом:

$$
\begin{aligned}
I_4(U,n,x) &\leqslant \int_{x-U}^{\infty} (F(x-u-\varepsilon)+\varepsilon)\frac{\pi_n(du)}{G(x)} = \\
&= \int_{-\infty}^{U-\varepsilon} F(v)\frac{d_v\pi_n(x-\varepsilon-v)}{G(x)} + \varepsilon\frac{\pi_n(x-U)}{G(x)} \equiv \\
&\equiv I_{41}(U,n,x) + I_{42}(U,n,x). \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Интегрируя по частям, оценим $I_{41}(U,n,x)$:

$$I_{41}(U,n,x) = \int_{-\infty}^{U-\varepsilon} \frac{\pi_n(x-\varepsilon-v)}{G(x)}dF(v) + \frac{F(U-\varepsilon)\pi_n(x-U)}{G(x)}.$$

Отсюда и из (5.17) в силу определения $\overline{c}_n$ имеем

$$\limsup_{x\to\infty} I_4(U,n,x) \leqslant \overline{c}_n e^{\beta\varepsilon} \int_{-\infty}^{U} e^{\beta v} F(dv) + O\left(F(U-\varepsilon)e^{\beta U}+\varepsilon\right). \tag{5.18}$$

Подставляя (5.11), (5.10), (5.15) и (5.18) в (5.8), приходим к соотношению

$$\overline{c}(n+1) \leqslant \int_{-U}^{U} c(u)e^{\beta u}\pi_n(du) + \overline{c}_n e^{\beta\varepsilon} \int_{-\infty}^{U} e^{\beta v} F(dv) + \\ +O\left(I_1(U)+I_3(U)+F(U-\varepsilon)e^{\beta U}+\varepsilon\right).$$

Отсюда ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\overline{c}(n+1) \leqslant \int_{-U}^{U} c(u)e^{\beta u}\pi_n(du) + \overline{c}_n \int_{-\infty}^{U} e^{\beta v} F(dv) + O\left(I_1(U)+I_3(U)+F(U)e^{\beta U}\right).$$

Устремляя $U \to \infty$ и используя (5.10), (5.11) и (5.15), выводим оценку $\overline{c}(n+1) \leqslant \alpha_n + \overline{c}_n\varphi(\beta)$. Отсюда по индукции заключаем, что верхний предел при $x \to \infty$ отношения $\pi_{n+1}(x)/G(x)$ не превосходит c_{n+1}. Ровно также доказывается, что нижний предел того же отношения не меньше c_{n+1}. Следовательно, пункт (а) доказан.

Для доказательства пункта (б) обозначим

$$\overline{c} = \limsup_{n,x\to\infty} \frac{\pi_n(x)}{G(x)};$$

$\overline{c} < \infty$, ввиду леммы 11. Вместо (5.18) получаем, ровно также, как и ранее, оценку

$$\limsup_{n,x\to\infty} I_4(U,n,x) \leqslant \overline{c} e^{\beta\varepsilon} \int_{-\infty}^{U} e^{\beta v} F(dv) + O\left(F(U-\varepsilon)e^{\beta U}+\varepsilon\right). \tag{5.19}$$

Подставляя (5.11), (5.10), (5.15) и (5.19) в (5.8), учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$ и устремляя $U \to \infty$, приходим к соотношению

$$\overline{c} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \alpha_n + \overline{c}\varphi(\beta) = \alpha_\infty + \overline{c}\varphi(\beta).$$

Следовательно, верхний предел при $n, x \to \infty$ отношения $\pi_{n+1}(x)/G(x)$ не превосходит $\alpha_\infty/(1-\varphi(\beta))$. Ровно также доказывается, что нижний предел того же отношения не меньше $\alpha_\infty/(1-\varphi(\beta))$. Пункт (б), а вместе с ним и теорема 3 доказаны.

5.3. Точная асимптотика стационарных распределений. В этом разделе предполагается, что цепь X допускает инвариантную меру π. Справедливо следующее усиление теоремы 5 из [5] о вероятностях больших уклонений стационарного распределения.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 (*кроме* (4.1)). *Тогда*

$$\pi(x) = \frac{\alpha_\infty + o(1)}{1-\varphi(\beta)} G(x)$$

при $x \to \infty$, *где*

$$\alpha_\infty \equiv \int_{\mathbf{R}} c(u)e^{\beta u}\pi(du) \geqslant 0.$$

Замечание 9. Сформулированная теорема обобщает теорему 5 из [5] в том, что класс распределений ξ расширяется от класса надстепенных распределений до класса $\mathscr{S}(\beta)$ и, что не менее важно, в следующем. В теореме 5 из [5] использовалось условие

$$|\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant t\} - \mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}| \leqslant \delta(u)\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\},$$

где $\delta(u) \downarrow 0$ при $u \to \infty$, которое влечёт сходимость распределений $\xi(u)$ и ξ в равномерной метрике. Если цепь X принимает значения на решётке, сходимость в равномерной метрике эквивалентна слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$. В общем случае, когда цепь X вещественнозначна, сходимость в равномерной метрике существенно сильнее, вообще говоря, чем слабая сходимость $\xi(u) \Rightarrow \xi$, предполагаемая нами.

Доказательство теоремы 4. По лемме 1 найдётся $\widehat{c}$ такое, что $\pi(x) \leqslant \widehat{c}G(x)$ для любого x. Остаётся воспользоваться теоремой 3 при $\pi_0 = \pi$.

Замечания к первой части работы

1. Как заметил Б. А. Рогозин, при исследовании распределений сверток мер в [5, § 7] использование теоремы Лебега в формуле (7.7) в доказательстве леммы 5 необоснованно ввиду того, что мера μ_2 знакопеременная. Таким образом, условия леммы 5 из [5] нуждаются в усилении, с тем, чтобы можно было применить теорему Лебега. Мы не приводим здесь необходимую модификацию формулировки этой леммы, поскольку лемма 5 приведена в [5] лишь с целью доказать теорему 5 в [5]. Но теорема 3 настоящей работы обобщает теорему 5 из [5] и снабжена независимым и более адекватным существу дела доказательством.

2. При оценке второго члена асимптотики $\pi(x)$ в крамеровском случае [5, § 9] используются оценки для функции восстановления, приведённые в работах Стоуна. В своих работах Стоун использует условие Крамера на характеристическую функцию одного слагаемого. Это условие пропущено в формулировке теоремы 11 из [5, § 9]. Эту формулировку следует дополнить условием:

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} |\mathbf{E}e^{i\lambda\widetilde{\xi}}| < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. Сибирский мат. журнал, 1962, Т. 3, № 5, С. 645–694.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
3. *Боровков А. А.* О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. Сибирский мат. журнал, 1995, Т. 36, № 3, С. 493–509.
4. *Боровков А. А.* Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями. Сибирский мат. журнал, 1996, Т. 37, № 4, С. 732–744.
5. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения. Теория вероятн. и её примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.
6. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Труды института математики СО РАН, Новосибирск: 1992, Т. 19. Перевод: Large

deviations and testing statistical hypotheses. I. Large deviations of sums of random vectors. Siberian Adv. in Math., 1992, V. 2, No. 3, p. 52–120.

7. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий. Сибирский мат. журнал, 1996, Т.37, № 4, С. 745–782.
8. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Наука, 1969, 400 с.
9. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. Теория вероятн. и её примен., 1965, т. X, в. 2, с. 310–322.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
11. *Bertoin J., Doney R. A.* Some asymptotic results for transient random walks. Adv. Appl. Prob., 1996, v. 28, p. 207–226.
12. *Borovkov A. A.* Ergodicity and Stability of Stochastic Processes. John Wiley & Sons, 1998, 585 p.
13. *Embrechts P., Goldie C. M.* On convolution tails. Stoch. Processes Appl., 1982, v. 13, № 3, p. 263–278.
14. *Höglund T.* A unified formulation of the Central Limit Theorem for small and large deviations from the mean. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 49, H. 1, S. 105–117.
15. *Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
16. *Sgibnev M. S.* On the distribution of the maxima of partial sums. Statistics & Probability Letters, 1996, v. 28, p. 235–238.