БОРОВКОВ А. А., КОРШУНОВ Д. А.[1]

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА. ЧАСТЬ III. ДОСТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ[2]

Аннотация

Работа является продолжением статей [1] и [2]. Рассматривается однородная во времени цепь Маркова $\{X(n)\}$ со значениями на вещественной прямой и со скачками, не имеющими конечные экспоненциальные моменты. Изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{X(n)\geqslant x\}$ при $x\to\infty$ как при фиксированных, так и при растущих значениях времени n.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, асимптотика вероятностей больших уклонений, субэкспоненциальное распределение, инвариантная мера, второй хвост распределения.

§ 1. Введение

Пусть $X(n)=X(y,n)$, $n=0,\ 1,\ \ldots$, — однородная во времени цепь Маркова со значениями на вещественной прямой $\mathbf{R}$ и с начальным значением $y \equiv X(y,0)$. Переходную вероятность цепи обозначаем $P(y,B) = \mathbf{P}\{X(y,1) \in B\}$, где B — борелевское множество в $\mathbf{R}$.

Пусть $\xi(y)$ — приращение за один шаг цепи X в точке $y \in \mathbf{R}$, т. е. $\xi(y) = X(y,1) - y$.

В настоящей работе изучаются, в частности, *асимптотически однородные* в пространстве цепи, т. е. цепи, для которых распределение $\xi(y)$ слабо сходится при $y \to \infty$ к распределению некоторой случайной величины ξ (мы обозначаем это символом $\xi(y) \Rightarrow \xi$). Всюду предполагается, что $m = \mathbf{E}\xi < 0$ и $\mathbf{P}(\xi > 0) > 0$. Изучается также и более широкий класс цепей с асимптотически однородным сносом, т. е. цепей, относительно которых предполагается лишь, что $\mathbf{E}\xi(y) \to m$ при $y \to \infty$.

В [2] была проведена классификация асимптотически однородных цепей в зависимости от поведения преобразования Лапласа $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$. В терминах этой классификации в настоящей работе работе рассматривается третий раздел (в), когда $\varphi(\lambda) = \infty$ при любом $\lambda > 0$, но «хвосты» $\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\}$ распределения ξ правильно меняются при $x \to \infty$. Это последнее свойство было отчасти определено в [1], [2]. Чтобы напомнить его, мы должны напомнить также следующие два определения.

---

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск, Россия

[2]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01939) и CRDF Cooperative Grants Program (Award # RM1-226)

Положительная функция g называется *локально степенной*, если для всякого фиксированного t предел при $u \to \infty$ отношения $g(u+t)/g(u)$ равен 1. Говорим, что *распределение G локально степенное*, если его хвост $G(x) \equiv G([x,\infty))$ — локально степенная функция.

Отметим, что для любой случайной величины ξ с локально степенным распределением для любого $\lambda > 0$ выполняется $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} = \infty$.

Мы будем говорить ([5]), что распределение G в $\mathbf{R}^+$ с неограниченным носителем принадлежит классу $\mathscr{S}$ (является *субэкспоненциальным*), если свёртка распределения G с самим собой удовлетворяет эквивалентности $G{*}G(x) \sim 2G(x)$ при $x \to \infty$.

В [5] показано, что субэкспоненциальное распределение G с необходимостью является локально степенным. Достаточные условия принадлежности распределения классу субэкспоненциальных можно найти в [5, 8]. В частности, класс $\mathscr{S}$ включает в себя распределения вида $G(x) = x^{-\alpha}\,\varepsilon(x)$, где $\alpha > 0$, $\varepsilon(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \to \infty$. Более того, класс $\mathscr{S}$ включает в себя так называемые *надстепенные* распределения, т. е. такие локально степенные распределения, для которых $\sup_x G(x/2)/G(x) < \infty$.

Пусть G — распределение в $\mathbf{R}$ с неограниченным справа носителем и конечным средним значением. Для любого $t \in (0,\infty]$ введём в рассмотрение распределение G_t в $\mathbf{R}^+$ такое, что

$$G_t(x) \equiv \min\left(1, \int_x^{x+t} G(u)du\right), \quad x > 0. \tag{1.1}$$

Отметим, что локально степенное распределение G для любого фиксированного $s > 0$ с необходимостью удовлетворяет соотношению

$$G_s(x) = o(G_t(x)) \quad \text{ при } t, x \to \infty. \tag{1.2}$$

Будем говорить (см. [3]), что субэкспоненциальное распределение G в $\mathbf{R}^+$ является *сильно субэкспоненциальным* (и писать $G \in \mathscr{S}_*$), если свёртка распределения G_t с самим собой удовлетворяет эквивалентности $G_t{*}G_t(x) \sim 2G_t(x)$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \in [1,\infty]$.

Критерии принадлежности распределения классу $\mathscr{S}_*$ приведены в [3]. Класс $\mathscr{S}_*$ включает в себя, в частности, следующие распределения:

(а) надстепенные распределения;

(б) логнормальное распределение с плотностью $e^{-(\ln x - \ln\alpha)^2/2\sigma^2}/x\sigma\sqrt{2\pi}$, $x > 0$, где σ, $\alpha > 0$;

(в) распределение Вейбула с хвостом $G([x,\infty)) = e^{-x^\alpha}$, $x \geqslant 0$, где $\alpha \in (0,1)$.

В первой части [1] настоящей работы предполагалось, что цепь X обладает инвариантной мерой π, т. е. мерой, доставляющей решение урав-

нению
$$\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{R}} \pi(du)\, P(u,\cdot), \quad \pi(\mathbf{R}) = 1. \tag{1.3}$$
Там был доказан следующий результат об асимптотике хвоста $\pi(x)$ инвариантной меры π.

Теорема 1. *Пусть цепь X асимптотически однородная в пространстве, причём семейство скачков $\{\xi(u)\}$ интегрируемо равномерно по u. Пусть $m = \mathbf{E}\xi < 0$ и распределение F случайной величины ξ таково, что распределение F_∞ (см. определение* (1.1)) *надстепенное. Если для некоторой ограниченной сверху функции $c(u)$ имеет место равномерная по u сходимость*
$$\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant t\}/\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\} \to c(u) \quad \text{при } t \to \infty,$$
то
$$\pi(x) \sim \frac{F_\infty(x)}{|m|} \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi(du) \quad \text{при } x \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. К сожалению, в формулировке соответствующей теоремы 6 в [1] условие ограниченности сверху функции $c(u)$ было пропущено.

В третьей (настоящей) части работы изучается асимптотическое поведение хвоста $\pi_n(x)$ распределения π_n величины $X(n) : \pi_n(x) = \mathbf{P}(X(n) \geqslant x)$ при $x \to \infty$ как при фиксированном значении временно́го параметра n, так и при неограниченно возрастающем n.

Положим $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ и $M_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$, где ξ_k независимы и распределены как ξ. Известно (см. например, [4, гл. VI, § 9]), что распределение однородной в пространстве (см. [1]) цепи $X(n) = (X(n+1) + \xi_n)^+$ с нулевым начальным условием $X(0) = 0$ совпадает с распределением M_n, т. е.
$$\mathbf{P}\{X(0,n) \geqslant x\} = \mathbf{P}\{M_n \geqslant x\}. \tag{1.4}$$

Ниже нам понадобится следующая теорема, доказанная в [3].

Теорема 2. *Пусть $m < 0$ и распределение случайной величины $\xi\mathbf{I}\{\xi \geqslant 0\}$ сильно субэкспоненциальное. Тогда имеет место равномерная по всем значениям $n \geqslant 1$ асимптотическая эквивалентность*
$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant x\} \sim F_{n|m|}(x)/|m| \quad \text{при } x \to \infty.$$

Как уже отмечалось, одним из основных объектов изучения в настоящей работе будут цепи с асимптотически однородным сносом. Для таких цепей в § 2 получены оценки снизу для вероятности $\pi_n(x) = \mathbf{P}\{X(n) \geqslant x\}$. В § 3 приводятся оценки сверху для этих вероятностей. На основании этих результатов в § 4 доказывается теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для асимптотически однородных в пространстве цепей X.

§ 2. Оценка снизу вероятностей больших уклонений для достационарной цепи

В настоящем параграфе приводится асимптотически правильная оценка снизу для вероятности $\pi_n(x)$ при больших значениях n и x. Предварительно устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения.

2.1. Утверждения типа усиленного закона больших чисел для марковской последовательности. Рассмотрим неоднородную во времени цепь Маркова $Y = \{Y_n\}$. Начальное распределение цепи полагаем произвольным. Пусть $\eta_{n+1}(u)$ — случайная величина, отвечающая скачку цепи Y в момент времени n из состояния u, т. е. такая случайная величина, что

$$\mathbf{P}\{Y_{n+1} \in \cdot\,|Y_n = u\} = \mathbf{P}\{u+\eta_{n+1}(u) \in \cdot\,\}.$$

Лемма 1. *Пусть снос цепи Маркова Y_n в любой момент времени $n \geqslant 1$ и в любом состоянии $u \in \mathbf{R}$. ограничен снизу числом $\widehat{a}$: $\mathbf{E}\eta_n(u) \geqslant \widehat{a}$. Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{|\eta_n(u)|, n \geqslant 1, u \in \mathbf{R}\}$ найдётся интегрируемая мажоранта, т. е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что $|\eta_n(u)| \leqslant_{\rm st} \eta$ для любых n и u. Тогда для любого начального распределения Y_0 почти наверное*

$$\liminf_{n\to\infty}\,(Y_n - Y_0)/n \geqslant \widehat{a}.$$

Доказательство. Пусть $A > 0$. Определим «срезку» скачка $\eta_n(u)$ на уровне An следующим образом:

$$\eta_n^{[An]}(u) \equiv \eta_n(u)\mathbf{I}\{|\eta_n(u)| < An\}.$$

Рассмотрим неоднородную во времени цепь Маркова Z_n, $Z_0 = Y_0$, со скачками $\eta_n^{[An]}(u)$:

$$\mathbf{P}\{Z_{n+1} \in \cdot\,|Z_n = u\} = \mathbf{P}\{u+\eta_n^{[An]}(u) \in \cdot\,\}.$$

По построению Z_n вероятность несовпадения траекторий Z_n и Y_n можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\sup_n |Z_n - Y_n| \neq 0\,\} &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{|Y_{n+1}-Y_n| \geqslant An\} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\eta| \geqslant An\} \leqslant \mathbf{E}|\eta|/A. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Положим $\Delta_n^0 = \mathbf{E}\{Z_n - Z_{n-1} | Z_{n-1}\}$ и $\Delta_n^1 = Z_n - Z_{n-1} - \Delta_n^0$, так что

$$Z_n - Z_0 = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^1 \equiv Z_n^0 + Z_n^1.$$

Для любого u имеем в силу условий леммы на скачки $\eta_n(u)$ соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\Delta_n^0 | Z_{n-1} = u\} &= \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(u) = \\ &= \mathbf{E}\eta_n(u) - \mathbf{E}\{\eta_n(u); |\eta_n(u)| \geqslant An\} \geqslant \\ &\geqslant \widehat{a} - \mathbf{E}\{|\eta|; |\eta| \geqslant An\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^0 \geqslant \widehat{a} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\{|\eta|; |\eta| \geqslant Ak\}.$$

Ввиду конечности $\mathbf{E}|\eta|$ получаем отсюда, что равномерно по всем элементарным исходам

$$\liminf_{n\to\infty}\ Z_n^0/n \geqslant \widehat{a}. \tag{2.2}$$

Поскольку $\mathbf{E}\{\Delta_n^1 | Z_n\} = 0$, процесс Z_n^1 образует мартингал относительно потока σ-алгебр $\sigma(Z_0, \ldots, Z_{n-1})$. Докажем, что приращения этого мартингала удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(\Delta_n^1)^2}{n^2} < \infty. \tag{2.3}$$

Для любого u по построению Δ_n^1 и ввиду условий леммы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{(\Delta_n^1)^2 | Z_{n-1} = u\} &= \mathbf{E}(\eta_n^{[An]}(u) - \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(u))^2 \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{E}(\eta_n^{[An]}(u))^2 \leqslant \mathbf{E}\{\eta^2; |\eta| < An\}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(\Delta_n^1)^2}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^2; |\eta| < An\}}{n^2}.$$

Последний ряд сходится при любом значении A, так как

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^2; |\eta| < An\}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^2}\mathbf{E}\{(\eta/A)^2; |\eta/A| < n\} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}\{k-1 \leqslant |\eta/A| < k\} =\end{aligned}$$

$$= A^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbf{P}\{k-1 \leqslant |\eta/A| < k\} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

в силу эквивалентности $\sum_{n=k}^{\infty} 1/n^2 \sim 1/k$ и существования $\mathbf{E}|\eta|$.

Итак, мартингал Z_n^1 действительно удовлетворяет условию (2.3) и можно воспользоваться следствием 2 из [6, стр. 534], в силу которого для него выполнен усиленный закон больших чисел:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n^1/n = 0 \text{ почти наверное.} \tag{2.4}$$

Соотношения (2.2) и (2.4) влекут неравенство

$$\liminf_{n\to\infty} (Z_n - Z_0)/n \geqslant \widehat{a} \text{ почти наверное.}$$

Утверждение леммы вытекает теперь из (2.1) в силу произвольности выбора числа A.

Лемма 2. *Пусть цепь Маркова Y_n такова, что ее снос, начиная с некоторого пространственного уровня U, ограничен снизу числом $\widehat{a}$: $\mathbf{E}\eta_n(u) \geqslant \widehat{a}$ для любых $n \geqslant 1$ и $u \geqslant U$. Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{|\eta_n(u)|, n \geqslant 1, u \geqslant U\}$ найдётся интегрируемая мажоранта, т. е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что $|\eta_n(u)| \leqslant_{\mathrm{st}} \eta$ для любых n и $u \geqslant U$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\mathbf{P}\{Y_k \geqslant u - n(\widehat{a}+\varepsilon) \text{ при всех } k \leqslant n | Y_0 = u\} \to 1,$$

равномерно по $u \geqslant U + n(\widehat{a}+\varepsilon)$.

Доказательство состоит в рассмотрении вспомогательной, также неоднородной во времени цепи Маркова $\widetilde{Y}_n$, у которой скачки $\widetilde{\eta}_n(u)$ совпадают с $\eta_n(u)$ при $u \geqslant U$ и равны $\widehat{a}$ при $u < U$, с дальнейшим применением леммы 1.

2.2. Оценка снизу вероятностей больших уклонений. Начальное распределение π_0 цепи X полагаем произвольным. Пусть f — положительная невозрастающая локально степенная функция. Пусть функция $\underline{c}(u) \geqslant 0$ такова, что для любого $U > 0$

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant x\}}{f(x)} \geqslant \underline{c}(u) + o(1)$$

при $x \to \infty$ равномерно по $|u| \leqslant U$. Обозначим

$$c_\infty \equiv \lim_{U\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{-U}^{U} \underline{c}(u) \pi_n(du) \in [0, \infty].$$

В частности, если распределение π_n сходится к некоторой (с необходимостью инвариантной) мере π в метрике полной вариации, т. е. если имеет место сходимость

$$\sup_B |\pi_n(B) - \pi(B)| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{2.5}$$

где супремум берётся по всем борелевским множествам на прямой, то $c_\infty = \int_{\mathbf{R}} \underline{c}(u)\pi(du)$. Если функция $\underline{c}(u)$ непрерывна, то последнее равенство остаётся в силе и в случае лишь слабой сходимости $\pi_n \Rightarrow \pi$.

Положим

$$\underline{a} \equiv \liminf_{u\to\infty} \mathbf{E}\xi(u).$$

В лемме 1 из [2] было установлено, что в условиях существования инвариантной меры и конечности $\sup_u \mathbf{E}|\xi(u)|$ с необходимостью $\underline{a} \leqslant 0$. В настоящем же разделе нет ограничений на знак числа $\underline{a}$.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть $a = -\underline{a}$, если $\underline{a} < 0$, и a — произвольное фиксированное положительное число, если $\underline{a} \geqslant 0$. Пусть найдётся уровень U такой, что семейство $\{|\xi(u)|, u \geqslant U\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Тогда имеет место оценка*

$$\liminf_{n,x\to\infty} \frac{\pi_n(x)}{\displaystyle\int_x^{x+na} f(y)dy} \geqslant \frac{c_\infty}{a}.$$

Доказательство достаточно провести лишь для $c_\infty > 0$. Пусть $c' < c'' < c_\infty$. Определения функции $\underline{c}(u)$ и числа c_∞ влекут существование $U' > 0$ такого, что

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant x\}}{f(x)} \pi_n(du) \geqslant c'',$$

равномерно по всем достаточно большим x. Так как функция $f(x)$ локально степенная и не возрастает, $f(x-u)/f(x) \to 1$ при $x \to \infty$ равномерно по $|u| \leqslant U'$. Следовательно, найдутся N и x_0 такие, что

$$\int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant x\}}{f(x)} \pi_n(du) \geqslant c', \tag{2.6}$$

равномерно по $n \geqslant N$ и $x \geqslant x_0$.

Рассмотрим событие $A_{i,n} \equiv A_{i,n}(x)$, $i \in [1, n]$, состоящее в том, что $X(i-1) < x$ и $X(j) \geqslant x$ для любого $j \in [i, n]$. Во-первых, события $A_{i,n}$, $i \in [1, n]$, не пересекаются. Во-вторых, $\bigcup_{i=1}^n A_{i,n} = \{X(n) \geqslant x\}$. Следовательно,

$$\pi_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_{i,n}\}. \tag{2.7}$$

Для $v \in [x, \infty)$ введём вероятность $p_i(v)$ равенством

$$p_i(v) = \mathbf{P}\{X(v,j) \geqslant x \text{ для любого } j \leqslant i\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $b = a+\varepsilon$. Так как событие

$$A_{i,n}(U') \equiv \{X(i-1) \in [-U', U'), X(i) \geqslant x+(n-i)b \quad X(j) \geqslant x \text{ при } j \in [i+1, n]\}$$

влечет событие $A_{i,n}$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}\} \geqslant \int_{-U'}^{U'} \pi_{i-1}(du) \int_{x+(n-i)b}^{\infty} \mathbf{P}\{u+\xi(u) \in dv\} p_{n-i}(v).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}\} \geqslant \int_{-U'}^{U'} \pi_{i-1}(du) \mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant x+(n-i)b\} \min_{v \geqslant x+(n-i)b} p_{n-i}(v). \quad (2.8)$$

По определению чисел a и b имеем неравенство $\mathbf{E}\xi(v) \geqslant -b+\varepsilon/2$ для всех достаточно больших v. Поэтому в силу леммы 2 при x, $n-i \to \infty$

$$\min_{v \geqslant x+(n-i)b} p_{n-i}(v) \to 1.$$

Подставляя эту сходимость в (2.8), получаем неравенство

$$\liminf_{n-i, x \to \infty} \frac{\mathbf{P}\{A_{i,n}\}}{f(x+(n-i)b)} \geqslant \int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant x+(n-i)b\}}{f(x+(n-i)b)} \pi_{i-1}(du) \geqslant c',$$

ввиду (2.6). Используя последнее неравенство, выводим из (2.7) оценку

$$\pi_n(x) \geqslant (c' - \varepsilon) \sum_{i=N}^{n-I} f(x+(n-i)b),$$

верную для сколь угодно медленно растущего I и всех достаточно больших x. Так как функция f локально степенная и не возрастает, то для любого фиксированного I

$$\sum_{i=N}^{n-I} f(x+(n-i)b) \sim \frac{1}{b} \int_x^{x+nb} f(y)dy \quad \text{при } x \to \infty.$$

Следовательно,

$$\liminf_{n, x \to \infty} \frac{\pi_n(x)}{\displaystyle\int_x^{x+nb} f(y)dy} \geqslant \frac{c' - \varepsilon}{b}.$$

Поскольку $b = a+\varepsilon$, $c' < c_\infty$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно, лемма доказана.

§ 3. Оценки сверху вероятностей больших уклонений для достационарных и стационарных цепей

3.1. Оценка сверху с «неправильным» постоянным множителем. Справедливо следующее обобщение леммы 2 из [1] в части, относящейся к субэкспоненциальным распределениям.

Лемма 4. *Пусть неограниченная сверху случайная величина* ζ *с распределением* G *такова, что* $\mathbf{E}\zeta < 0$. *Пусть найдётся уровень* U *такой, что*

$$\xi(u) \leqslant_{\rm st} \zeta \quad \text{при } u \geqslant U \tag{3.1}$$

и

$$\mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant t\} \leqslant G(t) \quad \text{при } u < U, \tag{3.2}$$

для всех $t \geqslant U$. *Тогда*

(а) *если распределение* G_∞ (*см. определение* (1.1)) *субэкспоненциальное и цепь* X *допускает* (*вообще говоря, не единственную*) *инвариантную меру* π, *то имеет место оценка*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{G_\infty(x)} \leqslant \frac{1}{|\mathbf{E}\zeta|}; \tag{3.3}$$

(б) *если распределение* G *сильно субэкспоненциальное, то для любого ограниченного сверху начального распределения* $X(0)$ *имеет место оценка*

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \frac{\pi_n(x)}{G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)} \leqslant \frac{1}{|\mathbf{E}\zeta|}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $X(0) \leqslant 0$ и U=0. Рассмотрим однородную цепь $\{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определённую равенством $Y_{n+1} = (Y_n+\zeta_{n+1})^+$, где случайные величины ζ_n суть независимые копии ζ. В силу условий (3.1) и (3.2) цепь Маркова Y_n мажорирует сверху цепь $X(n)$ и, следовательно,

$$\pi(x) \leqslant \pi^Y(x), \tag{3.5}$$

где π^Y — инвариантная мера цепи Y.

Поскольку распределение G_∞ субэкспоненциальное, то в силу теоремы 2(B) из [9] $\pi^Y(x) \sim G_\infty(x)/|\mathbf{E}\zeta|$ при $x \to \infty$, что в сочетании с (3.5) даёт (3.3).

Неравенство (3.4) вытекает также из мажоризации цепи $X(n)$ цепью Y_n, в силу которой для любых n и x справедлива оценка $\pi_n(x) \leqslant \pi_n^Y(x) = \mathbf{P}\{Y_n \geqslant x\}$. Остаётся воспользоваться теоремой 2. Лемма доказана.

3.2. Вспомогательные леммы. Пусть ζ_1, ζ_2, ..., — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geqslant 0 \text{ для любого } k \leqslant n\}$$

сходится.

Доказательство. Рассмотрим однородную в пространстве цепь, определённую равенством $Y_{n+1} = (Y_n + \zeta_{n+1})^+$, с начальным значением $Y_0 = 1$. Имеем неравенство и равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geqslant 0 \text{ для любого } k \leqslant n\} \leqslant \mathbf{P}\{Y_k > 0 \text{ для любого } k \leqslant n | Y_0 = 1\}$$
$$= \mathbf{P}\{\eta > n\},$$

где η — момент первого достижения цепью $\{Y_n\}$ состояния 0. Поскольку $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$, цепь $\{Y_n\}$ является положительно возвратной, т. е. $\mathbf{E}\eta < \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta > n\}$ сходится и лемма доказана.

В следующей лемме изучается локальное поведение функции, мажорируемой сверху локально степенной функцией. Пусть положительная невозрастающая интегрируемая на бесконечности функция $f(x)$ является локально степенной. Поскольку функция f не возрастает, то она является локально степенной тогда и только тогда, когда существует последовательность $\Delta(x) \to \infty$ такая, что $f(x)/f(x - \Delta(x)) \to 1$ при $x \to \infty$. Пусть c — произвольная константа. Положим $f_n(x) = \int_x^{x+cn} f(y)dy$. Имеем равномерную по всем значениям n эквивалентность

$$f_n(x - \Delta(x)) \sim f_n(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{3.6}$$

Пусть неотрицательная функция $h_n(x)$ такова, что при каждом n она не возрастает по x.

Лемма 6. *Пусть* $h_n(x) \leqslant f_n(x)$ *для любых* n *и* x. *Тогда существует последовательность отрезков* $[x_n^-, x_n^+] \subseteq [x - \Delta(x), x]$ *таких, что* $x_n^+ - x_n^- \to \infty$ *и* $h_n(x_n^-) - h_n(x_n^+) = o(f_n(x))$ *при* n, $x \to \infty$.

Доказательство. Пусть последовательность $u(x) \to \infty$ такова, что $u(x) = o(\Delta(x))$ при $x \to \infty$ и $l(x) = \Delta(x)/u(x)$ — целое число; по выбору $u(x)$ имеем $l(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

В силу (3.6) для доказательства леммы достаточно показать, что для любых n и x существует точка $x_n^- \in [x - \Delta(x), x - u(x)]$, для которой

$$h_n(x_n^-) - h_n(x_n^- + u(x)) = o(f_n(x_n^-)) \quad \text{при } n, x \to \infty$$

(и положить $x_n^+ = x_n^- + u(x)$). Предположим, что, напротив, последнее соотношение не имеет места. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность индексов $n_k \to \infty$ и $x_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такие, что для любого $y \in [x_k - \Delta(x_k), x_k - u(x_k)]$ выполняется

$$h_{n_k}(y) - h_{n_k}(y + u(x_k)) \geqslant \varepsilon f_{n_k}(y). \tag{3.7}$$

В частности, ввиду неравенства $h_{n_k} \leqslant f_{n_k}$,

$$h_{n_k}(y + u(x_k)) \leqslant h_{n_k}(y) - \varepsilon f_{n_k}(y) \leqslant (1-\varepsilon) h_{n_k}(y).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x_k - u(x_k)) &\leqslant (1-\varepsilon)^{l(x_k)-1} h_{n_k}(x_k - \Delta(x_k)) \leqslant (1-\varepsilon)^{l(x_k)-1} f_{n_k}(x_k - \Delta(x_k)) \\ &= o(f_{n_k}(x_k - u(x_k))) \quad \text{при } k \to \infty, \end{aligned}$$

в силу $l(x_k) \to \infty$ и (3.6). Противоречие с (3.7) при $y = x_k - u(x_k)$. Лемма доказана.

3.3. Оценка сверху с «правильным» постоянным множителем. Предполагаем, что начальное распределения π_0 сосредоточено на множестве, ограниченном сверху.

Лемма 7. *Пусть неограниченная сверху случайная величина ζ с распределением G такова, что распределение случайной величины $\zeta \mathbf{I}\{\zeta \geqslant 0\}$ сильно субэкспоненциальное и $\mathbf{E}\zeta < 0$. Пусть найдется уровень U такой, что выполняется* (3.1). *Пусть, кроме того, для некоторой функции $c(v) \leqslant 1$ выполняется при $u \geqslant U$ неравенство*

$$\mathbf{P}\{\xi(u) \geqslant t\} \leqslant c(u) G(t) \tag{3.8}$$

для всех $t \geqslant U$, а при $u < U$ неравенство

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geqslant t\} \leqslant c(u) G(t) \tag{3.9}$$

для всех $t \geqslant U$. Если, кроме того, имеет место сходимость по вариации (2.5), *то при $x \to \infty$ справедлива равномерная по всем значениям $n \geqslant 1$ оценка*

$$\pi_n(x) \leqslant (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} G(x + (n-k)|\mathbf{E}\zeta|), \tag{3.10}$$

где

$$c_k \equiv \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi_k(du) \geqslant 0.$$

В частности,

$$\limsup_{n, x \to \infty} \frac{\pi_n(x)}{G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)} \leqslant \frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\zeta|} \tag{3.11}$$

при n, $x \to \infty$, где

$$c_\infty \equiv \lim_{k \to \infty} c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi(du) \geqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку временной параметр n принимает лишь счётное число значений, распределение G локально степенное и $c_n \to c_\infty$, то достаточно проверить по-отдельности следующие два соотношения: для любого *фиксированного* n

$$\pi_n(x) \leqslant (1+o(1))G(x)\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \quad \text{при } x \to \infty \tag{3.12}$$

и (3.11). Проверим сначала первое из них по индукции. Для любого $U' \in (U, x)$ имеем равенство

$$\pi_{n+1}(x) = \left(\int_{-\infty}^{U'} + \int_{U'}^{x-U'} + \int_{x-U'}^{\infty}\right)\mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant x\}\pi_n(du) \equiv I_1+I_2+I_3.$$

Ввиду условий (3.8) и (3.9) для любого фиксированного значения U' имеем оценку

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{I_1}{G(x)} \leqslant \int_{-\infty}^{U'} c(u)\pi_n(du) \leqslant c_n.$$

Ввиду $c(v) \leqslant 1$ и условия (3.8) второе слагаемое I_2 допускает оценку:

$$I_2 \leqslant \int_{U'}^{x-U'} G(x-u)\pi_n(du).$$

Интегрируя по частям, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant -G(x-u)\pi_n(u)\Big|_{U'}^{x-U'} + \int_{U'}^{x-U'} \pi_n(x-u)G(du) \leqslant \\ &\leqslant G(x-U')\pi_n(U') + \int_{U'}^{x-U'} \pi_n(x-u)G(du). \end{aligned}$$

Используя здесь индукционное предположение, получаем оценку

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{I_2}{G(x)} \leqslant cG(U') + c\limsup_{x\to\infty} \int_{U'}^{x-U'} \frac{G(x-u)}{G(x)} G(du).$$

Поскольку распределение G является субэкспоненциальным, то в силу соотношения (2) из [7] значение верхнего предела в правой части оценки можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое значение U'. Таким образом,

$$\lim_{U'\to\infty} \limsup_{x\to\infty} I_2/G(x) = 0.$$

Третье слагаемое I_3 не превосходит $\pi_n(x-U')$. Поэтому по индукционному предположению и ввиду того, что распределение G локально степенное, для любого фиксированного U' справедлива оценка

$$\limsup_{x\to\infty} I_3/G(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}.$$

Собирая оценки для I_1, I_2 и I_3, убеждаемся в справедливости индукционного перехода $n \to n{+}1$.

Докажем соотношение (3.11). Не ограничивая общности считаем, что $X(0) \leqslant 0$ и $U{=}0$. Пусть последовательность точек x_k, $k = 1, 2, \ldots$, такова, что $x_{k+1} - x_k \to \infty$ и $G(x_{k+1}) \sim G(x_k)$ при $k \to \infty$. В частности, $G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_{k+1}) \sim G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_k)$ при $k \to \infty$ равномерно по всем значениям n. Поэтому соотношение (3.11) эквивалентно соотношению

$$\limsup_{n,k\to\infty} \frac{\pi_n(x_k)}{G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_k)} \leqslant \frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\zeta|} \tag{3.13}$$

В силу леммы 4 для любого фиксированного i функция $h_n(x) \equiv \pi_{n-i}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6 при $f(x) \equiv \mathrm{const}\cdot G(x)$ и $c = |\mathbf{E}\zeta|$. Поэтому найдутся последовательности x_{kn}^- и x_{kn}^+ такие, что $[x_{kn}^-, x_{kn}^+] \subseteq [x_k, x_{k+1}]$, $x_{kn}^+ - x_{kn}^- \to \infty$ и $\pi_{n-i}(x_{kn}^-) - \pi_{n-i}(x_{kn}^+) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_{k+1}))$ при n, $k \to \infty$. На основании этих рассуждений не будет ограничением общности предполагать для удобства существование (для любого фиксированного i) функции x_n^- такой, что $x_n^- \in [0, x]$, $x - x_n^- \to \infty$ и

$$\pi_{n-i}([x_n^-, x_n^+)) = \pi_{n-i}(x_n^-) - \pi_{n-i}(x) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \text{ при } n, x \to \infty \tag{3.14}$$

Из условия (3.9) вытекает выполнение (3.2). Рассмотрим однородную цепь $\{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определённую в ходе доказательства леммы 4. Поскольку цепь $\{Y_n\}$ мажорирует цепь $\{X(n)\}$, то в случае $X(0) = Y_0$ цепи $\{X(n)\}$ и $\{Y_n\}$ можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что при любом n с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$X(n) \leqslant Y_n. \tag{3.15}$$

В дальнейшем различные характеристики, отвечающие цепи $\{X(n)\}$, помечаем верхним индексом X, а цепи $\{Y_n\}$ — верхним индексом Y.

События $A_{i,n}$ и вероятности $p_i(v)$ определены в ходе доказательства леммы 3. Обратимся снова к тождеству (2.7). Из оценки (3.4) и из (1.2) для любого фиксированного i вытекают соотношения

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} \leqslant \mathbf{P}\{X(i) \geqslant x\} = \pi_i(x) = O(G_{i|\mathbf{E}\zeta|}(x)) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))$$

при n, $x \to \infty$. Следовательно, найдётся неограниченно возрастающая последовательность $I = I(n, x)$ такая, что

$$\pi_n(x) = \sum_{i=I}^{n} \mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} + o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \to \infty. \tag{3.16}$$

На самом деле любое конечное число последних слагаемых в этой сумме есть также величина порядка $o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))$. Это более тонкое наблюдение проверяется в конце доказательства.

Для вероятности события $A^X_{i,n}$ имеем равенство

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} = \int_{-\infty}^{x} \pi^X_{i-1}(du) \int_x^{\infty} P^X(u,dv)p^X_{n-i}(v).$$

Используя (3.15) при $X(0){=}Y_0{=}v$, получаем $p^X_{n-i}(v) \leqslant p^Y_{n-i}(v)$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} \leqslant \int_{-\infty}^{x} \pi^X_{i-1}(du) \int_x^{\infty} P^X(u,dv)p^Y_{n-i}(v). \tag{3.17}$$

Цепь Y_n, будучи однородной, стохастически возрастает. Поэтому функция $p^Y_{n-i}(v)$ не убывает с ростом v и, следовательно, является функцией ограниченной вариации. Интегрируя по частям, можно преобразовать внутренний интеграл последней оценки следующим образом:

$$\int_x^{\infty} P^X(u,dv)p^Y_{n-i}(v) = P^X(u,[x,\infty))p^Y_{n-i}(x) + \int_x^{\infty} P^X(u,[v,\infty))dp^Y_{n-i}(v).$$

Оценивая $P^X(u,[v,\infty))$ в правой части последнего неравенства с помощью условия (3.9) и производя обратное интегрирование по частям, получаем последовательно для любого $u \in (-\infty, U)$ оценку и равенство

$$\int_x^{\infty} P^X(u,dv)p^Y_{n-i}(v) \leqslant c(u)\left(G(x)p^Y_{n-i}(x) + \int_x^{\infty} G(v)dp^Y_{n-i}(v)\right) =$$
$$= c(u)\int_x^{\infty} G(dv)p^Y_{n-i}(v). \tag{3.18}$$

Ровно также ввиду условия (3.8) и неравенства $c(u) \leqslant 1$ получаем для любого $u \in [U,x)$

$$\int_x^{\infty} P^X(u,dv))p^Y_{n-i}(v) \leqslant c(u)\int_x^{\infty} G(dv-u)p^Y_{n-i}(v) \tag{3.19}$$
$$\leqslant \int_x^{\infty} G(dv-u)p^Y_{n-i}(v). \tag{3.20}$$

Так как функция $G(t)$ локально степенная, то найдется неограниченно растущий уровень (при $x{\to}\infty$) V такой, что $G(v{-}u) \sim G(v)$ при $u \in [U,V)$ и $v{\geqslant}x$. При этом неравенство (3.19) при $u \in [U,V)$ принимает вид

$$\int_x^{\infty} P^X(u,dv))p^Y_{n-i}(v) \leqslant (c(u){+}o(1))\int_x^{\infty} G(dv)p^Y_{n-i}(v), \quad x \to \infty. \tag{3.21}$$

Подставляя (3.18), (3.20) и (3.21) в (3.17), приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\{A^X_{i,n}\} \leqslant (1+o(1))\int_{-\infty}^{V} \pi^X_{i-1}(du)c(u)\int_x^{\infty} G(dv)p^Y_{n-i}(v) +$$

$$+\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)\int_x^\infty G(dv-u)p_{n-i}^Y(v).$$

Вспоминая определение констант c_i, получаем

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^X\}\leqslant(c_{i-1}+o(1))\int_x^\infty G(dv)p_{n-i}^Y(v)+\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)\int_x^\infty G(dv-u)p_{n-i}^Y(v)$$

при $x\to\infty$, равномерно по $i\in[1,n]$. Суммируя эти неравенства по i от $I(n,x)$ до n и учитывая при этом сходимость $c_i\to c_\infty$ при $i\to\infty$, получаем из (3.16) при n, $x\to\infty$ соотношение

$$\pi_n^X(x)\leqslant(c_\infty+o(1))\int_x^\infty G(dv)\sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v)$$
$$+\sum_{i=I}^n\int_V^x \pi_{i-1}^X(du)\int_x^\infty G(dv-u)p_{n-i}^Y(v)+o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x).\quad(3.22)$$

Для однородной цепи Y имеем неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\}\geqslant\int_0^V \pi_{i-1}^Y(du)\int_x^\infty P^Y(u,dv)p_{n-i}^Y(v)$$
$$=\int_0^V \pi_{i-1}^Y(du)\int_x^\infty G(dv-u)p_{n-i}^Y(v).$$

В силу выбора уровня V имеем

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\}\geqslant\int_0^V \pi_{i-1}^Y(du)\int_x^\infty G(dv)p_{n-i}^Y(v)=\pi_{i-1}^Y([0,V))\int_x^\infty G(dv)p_{n-i}^Y(v).$$

Поскольку $V\to\infty$, то при $x\to\infty$ равномерно по $i\in[1,n]$

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\}\geqslant(1+o(1))\int_x^\infty G(dv)p_{n-i}^Y(v).$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до n, выводим из (2.7) соотношение

$$\pi_n^Y(x)=\sum_{i=1}^n\mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\}\geqslant(1+o(1))\int_x^\infty G(dv)\sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v).$$

Из (1.4) и теоремы 2 вытекает, что при $x\to\infty$ равномерно по $n\geqslant 1$

$$\pi_n^Y(x)\leqslant(1+o(1))G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)/|\mathbf{E}\zeta|.$$

Два последние неравенства влекут оценку

$$\int_x^\infty G(dv)\sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v)\leqslant(1+o(1))G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)/|\mathbf{E}\zeta|\ \text{ при } x\to\infty.$$

Подставляя её в (3.22), приходим при n, $x \to \infty$ к соотношению

$$\pi_n^X(x) \leqslant \frac{c_\infty + o(1)}{|\mathbf{E}\zeta|} G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x) + \sum_{i=I}^{n} \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u), \tag{3.23}$$

где $q_{n-i}(u) = \displaystyle\int_x^\infty G(dv-u) p_{n-i}^Y(v)$.

Ввиду предыдущих рассмотрений имеем также для цепи Y равномерную по $n \geqslant 1$ оценку, верную при $x \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) \int_x^\infty G(dv-u) p_{n-i}^Y(v) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)). \tag{3.24}$$

Осталось оценить общее слагаемое в сумме из (3.23). Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) = -\pi_{i-1}^X(u) q_{n-i}(u) \Big|_V^x + \int_V^x \pi_{i-1}^X(u) dq_{n-i}(u).$$

Ввиду леммы 4 и теоремы 2, $\pi_{i-1}^X(u) \leqslant \pi_{i-1}^Y(u)$ при некотором $c < \infty$ для всех u и i. Поэтому

$$\int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \leqslant c\pi_{i-1}^Y(V) q_{n-i}(V) + c\int_V^x \pi_{i-1}^Y(u) dq_{n-i}(u).$$

Повторно интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) &\leqslant c\pi_{i-1}^Y(V) q_{n-i}(V) + \pi_{i-1}^Y(u) q_{n-i}(u) \Big|_V^x + c\int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u) \\ &\leqslant \pi_{i-1}^Y(x) q_{n-i}(x) + c\int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ровно также получаем оценку

$$\begin{aligned}\int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) &= \left(\int_V^{x_n^-} + \int_{x_n^-}^x \right) \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \\ &\leqslant \pi_{i-1}^Y(x_n^-) q_{n-i}(x_n^-) + c\int_V^{x_n^-} \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u) + \pi_{i-1}^X([x_n^-, x)). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Пусть J — фиксированное натуральное число. Применяя при $i \in [I, n-J]$ оценку (3.25), а при $i \in [n-J+1, n]$ — (3.26), выводим неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{i=I}^{n} \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) &\leqslant c\sum_{i=I}^{n-J} \pi_{i-1}^Y(x) q_{n-i}(x) + c\sum_{i=n-J+1}^{n} \pi_{i-1}^Y(x_n^-) q_{n-i}(x_n^-) \\ &\quad + c\sum_{i=I}^{n} \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u) + \sum_{i=n-J+1}^{n} \pi_{i-1}^X([x_n^-, x)). \end{aligned}$$

В силу (3.24) третья сумма в правой части оценки есть величина порядка $o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))$; четвертая сумма того же порядка при любом фиксированном J в силу (3.14). Следовательно, при достаточно медленно растущем уровне $J \equiv J_n(x) \to \infty$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\sum_{i=I}^{n} \int_{V}^{x} \pi_{i-1}^{X}(du) q_{n-i}(u) \leqslant{} & c \sum_{i=I}^{n-J} \pi_{i-1}^{Y}(x) q_{n-i}(x) + c \sum_{i=n-J+1}^{n} \pi_{i-1}^{Y}(x_n^-) q_{n-i}(x_n^-) \\ & + o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \\ \equiv{} & c\Sigma_1 + c\Sigma_2 + o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \to \infty. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} q_{n-i}(x) &= \int_{x}^{\infty} G(dv-x) p_{n-i}^{Y}(v) \\ &= \int_{x}^{\infty} G(dv-x) \mathbf{P}\{Y_k \geqslant x \text{ для любого } k \in [2, n-i+1] | Y_1 = v\} \\ &= \mathbf{P}\{Y_k \geqslant x \text{ для любого } k \in [1, n-i+1] | Y_0 = x\}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i=I}^{n-J} \pi_{i-1}^{Y}(x) \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geqslant 0 \text{ для любого } k \leqslant n-i+1\} \\ &= O(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \sum_{i=I}^{n-J} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geqslant 0 \text{ для любого } k \leqslant n-i+1\}. \end{aligned}$$

Поскольку $J \to \infty$, по лемме 5

$$\sum_{i=I}^{n-J} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geqslant 0 \text{ для любого } k \leqslant n-i+1\} \to 0.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \to \infty. \qquad (3.28)$$

Докажем теперь, что

$$\Sigma_2 = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \to \infty. \qquad (3.29)$$

Поскольку последовательность $J_n(x)$ может возрастать сколь угодно медленно, для этого достаточно проверить, что для любого фиксированного i выполняется

$$\pi_{n-i}^{Y}(x_n^-) q_{i-1}(x_n^-) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \to \infty.$$

Ввиду (3.14) и леммы 4 имеем

$$\pi_{n-i}^{Y}(x_n^-) = \pi_{n-i}^{Y}(x) + o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) = O(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\pi^Y_{n-i}(x_n^-)q_{i-1}(x_n^-) &= O(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))q_{i-1}(x_n^-)\\ &\leqslant O(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x))P(x_n^-,[x,\infty)) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)),\end{aligned}$$

так как $x - x_n^- \to \infty$ и $P(x_n^-,[x,\infty)) \to 0$. Таким образом, соотношение (3.29) доказано.

Подставляя (3.28) и (3.29) в (3.27), приходим к соотношению

$$\sum_{i=I}^{n}\int_V^x \pi^X_{i-1}(du)q_{n-i}(u) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)) \quad \text{при } n,x\to\infty.$$

Учитывая последнее соотношение в (3.23), приходим к оценке (3.11), а вместе с тем и к утверждению леммы.

§ 4. Равномерная по временно́му параметру теорема о вероятностях больших уклонений

Мы рассматриваем здесь асимптотически однородную в пространстве цепь, т. е. предполагаем при $u\to\infty$ слабую сходимость $\xi(u)\Rightarrow\xi$, причём $\mathbf{E}\xi<0$. В настоящем параграфе предполагаем также, что начальное распределения π_0 сосредоточено на множестве, ограниченном сверху, и имеет место сходимость по вариации (2.5).

Пусть ζ — неограниченная сверху случайная величина с распределением G и отрицательным средним значением. Предполагаем, что распределение случайной величины $\zeta\mathbf{I}\{\zeta\geqslant 0\}$ сильно субэкспоненциальное.

Теорема 3. *Пусть найдётся уровень U такой, что семейство случайных величин $\{|\xi(u)|, u\geqslant U\}$ обладает интегрируемой мажорантой и выполнено условие*

$$\mathbf{P}\{u+\xi(u)\geqslant t\}\leqslant G(t) \text{ при } u<U, \quad \xi(u)\leqslant_{\mathrm{st}}\zeta \text{ при } u\geqslant U,$$

для $t\geqslant U$. Пусть для некоторой функции $c(u)\leqslant 1$ имеет место равномерная по u сходимость

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{\xi(u)\geqslant t\}}{G(t)}\to c(u) \quad \text{при } t\to\infty.$$

Тогда при $x\to\infty$ имеет место равномерное по $n\geqslant 1$ соотношение

$$\pi_n(x) = (1+o(1))\sum_{k=1}^{n}c_{k-1}G(x+(n-k)|\mathbf{E}\xi|),$$

где постоянные c_k определяются равенствами

$$c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi_k(du).$$

В частности,

$$\pi_n(x) = (c_\infty/|\mathbf{E}\xi| + o(1))G_{n|\mathbf{E}\xi|}(x)$$

при n, $x \to \infty$, *где*

$$c_\infty \equiv \lim_{k\to\infty} c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u)\pi(du).$$

З а м е ч а н и е 2. В случае правильно меняющего на бесконечности хвоста распределения G из теоремы вытекает, что асимптотика при $n/x \to \infty$ вероятности $\pi_n(x)$ имеет вид (если $c_\infty > 0$)

$$\pi_n(x) \sim c_\infty G_\infty(x)/|\mathbf{E}\xi|$$

и, в частности, совпадает с асимптотикой хвоста инвариантной меры: $\pi_n(x) \sim \pi(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. В силу условий теоремы для любого $\varepsilon > 0$ найдутся случайная величина ζ_ε с распределением G_ε и уровень U_ε такие, что $\mathbf{E}\zeta_\varepsilon \leqslant \mathbf{E}\xi + \varepsilon$, $\mathbf{P}\{\zeta_\varepsilon \geqslant t\} = \mathbf{P}\{\zeta \geqslant t\}$ для всех достаточно больших значениях t и

$$\mathbf{P}\{u+\xi(u) \geqslant t\} \leqslant G_\varepsilon(t) \text{ при } u < U_\varepsilon, \quad \xi(u) \leqslant_{\mathrm{st}} \zeta_\varepsilon \text{ при } u \geqslant U_\varepsilon,$$

для $t \geqslant U_\varepsilon$. Из леммы 7 вытекает оценка сверху, верная при $x \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 1$:

$$\pi_n(x) \leqslant (1+o(1)) \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} G(x+(n-k)(|\mathbf{E}\xi| - \varepsilon)).$$

Так как функция $G(y)$ локально степенная, отсюда в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ следует оценка сверху

$$\pi_n(x) \leqslant (1+o(1)) \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} G(x+(n-k)|\mathbf{E}\xi|).$$

Поскольку временной параметр n принимает лишь счётное число значений, то соответствующая оценка снизу вытекает из леммы 3, а также из следующего соотношения: для любого *фиксированного* n

$$\pi_n(x) \geqslant (1+o(1))G(x) \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Последнее соотношение проверяется по индукции также, как и соотношение (3.12). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения. Теория

вероятн. и её примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.

2. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае. Теория вероятн. и её примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 437–468.
3. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением Теория вероятн. и её примен., 2001, т. 46, в. 2, с. ?–?.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 738 с.
5. *Чистяков В. П.* Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и её приложения к ветвящимся процессам. Теория вероятн. и её примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.
6. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
7. *Embrechts P., Goldie C. M.* On convolution tails. Stoch. Processes Appl., 1982, v. 13, № 3, p. 263–278.
8. *Teugels J. L.* The class of subexponential distributions. Ann. Probab., 1975, v. 3, № 6, p. 1000–1011.
9. *Veraverbeke N.* Asymptotic behavior of Wiener-Hopf factors of a random walk. Stochastic Process. Appl., 1977, v. 5, № 1, p. 27–37.