ПЛОТНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЕМЕЙСТВА ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ЦЕПЕЙ МАРКОВА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Коршунов Д.

Институт математики СО РАН, Новосибирск

Рассматривается семейство цепей Маркова с дискретным временем, принимающих значения в метрическом пространстве; переходные вероятности этих цепей зависят от некоторого параметра. В предположении, что каждая цепь имеет по крайней мере одну инвариантную меру, изучаются вопросы плотности и непрерывности семейства этих инвариантных мер. Выводятся критерии плотности семейства инвариантных мер в терминах условий на (a) пробные функции и (b) средние сносы цепей.

§ 1. Введение

Пусть S — метрическое пространство с метрикой ρ и σ-алгеброй борелевских множеств $\mathfrak{B}(S)$. Рассматривается семейство (относительно параметра δ, $\delta \in \mathbf{R}$) цепей Маркова $\{X_n^{(\delta)}\}_{n=0}^{\infty}$, однородных по времени n и со значениями в S. Обозначим через $P^{(\delta)}(x, B)$ переходную вероятность цепи $\{X_n^{(\delta)}\}$, т. е.

$$P^{(\delta)}(x, B) \equiv \mathbf{P}\{X_{n+1}^{(\delta)} \in B | X_n^{(\delta)} = x\}, \quad x \in S, B \in \mathfrak{B}(S).$$

Предполагаем, что каждая из цепей $\{X_n^{(\delta)}\}$ имеет при $\delta \neq 0$ хотя бы одно инвариантное распределение $\pi^{(\delta)}$, т. е. распределение, удовлетворяющее уравнению

$$\pi^{(\delta)}(\cdot) = \int_S P^{(\delta)}(x, \cdot)\pi^{(\delta)}(dx), \quad \pi^{(\delta)}(S) = 1.$$

Кроме того, предполагаем, что цепь $\{X_n^{(0)}\}$ имеет не более одного инвариантного распределения. Весьма широкие условия существования инвариантной меры можно найти в [1]. Отметим также, что мы не предполагаем неразложимость цепей $\{X_n^{(\delta)}\}$.

В § 2 мы приводим условия, при которых инвариантная мера $\pi^{(\delta)}$ непрерывно зависит от параметра $\delta \to 0$ (в смысле слабой сходимости). Эта задача решалась в разной степени общности в [2, 3], [4, гл. 8, § 3] (см. также списки литературы в них). В § 2 показано, как иногда можно свести задачу о непрерывной зависимости инвариантной меры от параметра к задаче о плотности семейства инвариантных мер. Поэтому в следующих параграфах 3–6 выясняются условия плотности семейства $\{\pi^{(\delta)}\}$, т. е. условия, когда для любого положительного ε существует компакт $K \subset S$ такой, что $\pi^{(\delta)}(K) \geq 1 - \varepsilon$ для любого δ.

Одним из наиболее удобных (с нашей точки зрения) методов доказательства плотности семейства инвариантных мер цепей Маркова является метод пробных функций (функций Ляпунова). В связи с этим сделаем несколько замечаний о пробных функциях.

Рассмотрим цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями в $\mathbf{R}^+$. Обозначим через ξ_x случайную величину, распределение которой соответствует распределению скачка цепи $\{X_n\}$ из состояния x, т. е. $\mathbf{P}\{x+\xi_x \in B\} = P(x, B)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^+)$. Обычно (например, при выяснении условий эргодичности цепи) мы хотим найти некоторую неотрицательную функцию $V : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такую, что для некоторых $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ выполнено

$$m(x) \equiv \mathbf{E}\{V(x+\xi_x) - V(x)\} \leq -\varepsilon < 0, \tag{1.1}$$

если $x \geq N$ и

$$\sup_{x\geq 0} m(x) < \infty. \tag{1.2}$$

Введем обозначения для повторных логарифмов

$$\ln^{(0)} x \equiv 1, \quad \ln^{(1)} x \equiv \ln x, \quad \ln^{(k+1)} x \equiv \ln(\ln^{(k)} x), \quad k \geq 1, \tag{1.3}$$

и их произведений

$$L^{(k)}(x) \equiv \prod_{i=0}^{k} \ln^{(i)} x, \quad k \geq 0. \tag{1.4}$$

Оказывается (см., например, [5, 6, 7]; некоторые наводящие соображения можно найти также в [8]), что при исследовании условий эргодичности цепей Маркова наиболее интересными пробными функциями являются функции, растущие не быстрее, чем $x^2 L^{(k)}(x)$ для какого-либо $k \geq 0$. Поясним это подробнее на следующем примере.

Рассмотрим пробную функцию $V(x) = x^3$. Пусть скачки цепи $\{X_n\}$ асимптотически не вырождены; более точно, пусть $\liminf_{x\to\infty} \mathbf{E}(\xi_x)^2 = b > 0$. Предположим, что средний снос пробной функции V из состояния x отрицателен при достаточно больших x

$$\mathbf{E}\{V(x+\xi_x) - V(x)\} = 3x^2\mathbf{E}\xi_x + 3x\mathbf{E}(\xi_x)^2 + \mathbf{E}(\xi_x)^3 < 0, \quad x > N.$$

Поскольку $\xi_x \geq -x$, то $\mathbf{E}(\xi_x)^3 \geq -x\mathbf{E}(\xi_x)^2$ и, следовательно, при $x > N$

$$3x^2\mathbf{E}\xi_x + 2x\mathbf{E}(\xi_x)^2 \leq 0.$$

Отсюда

$$2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2 \leq -\mathbf{E}(\xi_x)^2/3,$$

и ввиду предположения $\liminf_{x\to\infty} \mathbf{E}(\xi_x)^2 = b > 0$ при достаточно больших x выполняется

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{(x+\xi_x)^2 - x^2\} &= 2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2 \leq \\ &\leq -b/6 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, средний снос пробной функции x^2 также строго отрицателен при достаточно больших x.

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что, грубо говоря, нет необходимости рассматривать пробную функцию x^3, а можно изучать более медленно растущую пробную функцию x^2. Похожие рассуждения могут быть повторены для любой из функций типа $x^2 L^{(k)}(x)(\ln^{(k+1)} x)^2$. Это дает нам основание ограничиться изучением пробных функций, растущих не быстрее, чем функция $x^2 L^{(k)}(x)$ для какого-либо $k \geq 0$.

Пусть (1.1) и (1.2) выполнены для каждой из цепей $\{X_n^{(\delta)}\}$. Нас интересует, какое дополнительное условие следует наложить, чтобы семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}\}$ было плотным? В работах [3], [4, гл. 8, § 4] предполагается, в частности, что для некоторого положительного γ

$$\sup_{x\geq 0,\delta\in\mathbf{R}} \mathbf{E}|V(x+\xi_x^{(\delta)})-V(x)|^{1+\gamma}<\infty. \tag{1.5}$$

Это условие весьма естественно, если функция $V(x)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. если

$$\sup_{x,y>0}\frac{|V(x+y)-V(x)|}{y}<\infty.$$

Однако последнее условие весьма часто нарушено. Например, оно не выполнено для функций $x^{1+\gamma}$, $\gamma>0$. Для такого рода функций семейство (1.5), как правило, не является равномерно интегрируемым. Например, если пробная функция $V(x)$ равна x^2,

$$V(x+\xi_x)-V(x)=2x\xi_x+(\xi_x)^2\approx 2x\xi_x$$

при больших x. Ясно, что семейство случайных величин $\{x\xi_x, x\geq 0\}$ обычно не является равномерно интегрируемым.

В связи со сказанным более естественно предполагать равномерную интегрируемость семейства $\{V(|\xi_x^{(\delta)}|), x\geq 0, \delta\in\mathbf{R}\}$, а не условие (1.5). Именно этот подход используется в §§ 3–6.

§ 2. Условие непрерывности инвариантных распределений для цепей Маркова в метрическом пространстве

Пусть $\{X_n^{(\delta)}\}_{n=0}^{\infty}$ — цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве (S,ρ), переходные вероятности которой зависят от параметра $\delta\in\mathbf{R}$. Мы не предполагаем сепарабельность и полноту пространства S. Предполагаем, что цепь $\{X_n^{(\delta)}\}$ имеет при $\delta\neq 0$ хотя бы одно инвариантное распределение $\pi^{(\delta)}$, а цепь $\{X_n^{(0)}\}$ может иметь не более одного инвариантного распределения. Справедлив следующий критерий непрерывной зависимости (в смысле слабой сходимости) распределения $\pi^{(\delta)}$ от параметра δ, $\delta\to 0$.

Теорема 1. *Пусть переходные вероятности $P^{(\delta)}(x,\cdot)$ непрерывно зависят от параметров x и δ, $\delta\to 0$, т. е. для любого $x\in S$ имеет место слабая сходимость*

$$P^{(\delta)}(y,\cdot)\Rightarrow P^{(0)}(x,\cdot)\quad \text{при } y\to x \text{ и } \delta\to 0. \tag{2.1}$$

Пусть семейство мер $\{\pi^{(\delta)},\delta\neq 0\}$ в S плотно. Тогда существует инвариантное распределение $\pi^{(0)}$ цепи $\{X_n^{(0)}\}$ и имеет место слабая сходимость $\pi^{(\delta)}\Rightarrow\pi^{(0)}$ при $\delta\to 0$.

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма, в которой приводится условие, эквивалентное условию (2.1). Через $C(S)$ обозначаем класс непрерывных ограниченных функций на S со значениями в $\mathbf{R}$.

Лемма 1. *Условие* (2.1) *эквивалентно следующим двум условиям:*
(a) *для любых функции $f\in C(S)$ и компакта $K\subset S$ имеет место сходимость*

$$\int_S f(z)P^{(\delta)}(x,dz)\quad\to\quad\int_S f(z)P^{(0)}(x,dz) \tag{2.2}$$

при $\delta\to 0$ равномерно по $x\in K$;

(b) *переходная вероятность $P^{(0)}(x,\cdot)$ удовлетворяет условию Феллера (см., например,* [1]*), т. е. для любого $x\in S$*

$$P^{(0)}(y,\cdot)\quad\Rightarrow\quad P^{(0)}(x,\cdot)\quad \text{при } y\to x. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о прямой части леммы. Предположим, что, напротив, (2.2) не выполняется. Тогда существуют функция $f \in C(S)$, последовательность индексов δ_k, $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, и последовательность точек $x^{(\delta_k)} \in K$ такие, что при любом k

$$F^{(\delta_k)} \equiv \int_S f(z) \left[P^{(\delta_k)}(x^{(\delta_k)}, dz) - P^{(0)}(x^{(\delta_k)}, dz) \right] \geq \varepsilon \tag{2.4}$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Поскольку множество K компактно, можно не ограничивая общности считать, что последовательность точек $x^{(\delta_k)}$ имеет предел в K: $x^{(\delta_k)} \to x_0$, $x_0 \in K$, $\delta_k \to 0$. Справедлива оценка

$$F^{(\delta_k)} \leq \left| \int_S f(z) \left[P^{(\delta_k)}(x^{(\delta_k)}, dz) - P^{(0)}(x_0, dz) \right] \right| + \left| \int_S f(z) \left[P^{(0)}(x_0, dz) - P^{(0)}(x^{(\delta_k)}, dz) \right] \right|.$$

Каждое из слагаемых в правой части неравенства стремится к нулю при $\delta_k \to 0$ в силу условия (2.1). Это вступает в противоречие с (2.4). Следовательно, прямая часть леммы доказана.

Для доказательства обратной части леммы надо показать, что для любых элемента $x \in S$ и последовательности $y_n \in S$, сходящейся к x:

$$\rho(y_n, x) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \tag{2.5}$$

имеет место слабая сходимость

$$P^{(\delta)}(y_n, \cdot) \Rightarrow P^{(0)}(x, \cdot) \quad \text{при } n \to \infty \text{ и } \delta \to 0. \tag{2.6}$$

Пусть $f \in C(S)$. В силу (2.5) и условия (2.3) справедлива сходимость

$$\int_S f(z) P^{(0)}(y_n, dz) \to \int_S f(z) P^{(0)}(x, dz) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2.7}$$

Так как ввиду сходимости (2.5) множество $\{x, y_n, n = 1, 2, ...\} \subset S$ является компактом, то по условию (2.2)

$$\int_S f(z) P^{(\delta)}(y_n, dz) \to \int_S f(z) P^{(0)}(y_n, dz) \tag{2.8}$$

при $\delta \to 0$ равномерно по n. Из (2.7) и (2.8) следует сходимость

$$\int_S f(z) P^{(\delta)}(y_n, dz) \to \int_S f(z) P^{(0)}(x, dz)$$

при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Таким образом, слабая сходимость (2.6) доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Семейство мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \neq 0\}$ плотно, поэтому по прямой теореме Прохорова (см., например, [9, стр. 58]) это семейство слабо компактно. В частности, множество предельных (в смысле слабой сходимости) точек этого семейства не пусто. Пусть $\widetilde{\pi}$ — произвольная предельная точка, т. е.

$$\pi^{(\delta_k)} \Rightarrow \widetilde{\pi} \tag{2.9}$$

для некоторой последовательности индексов $\delta_k \to 0$, причем $\widetilde{\pi}(S) = 1$. Докажем, что $\widetilde{\pi}$ есть инвариантная мера для цепи $\{X_n^{(0)}\}$.

Пусть $f \in C(S)$. Обозначим $\psi^{(\delta)}(x) \equiv \mathbf{E}\{f(X_1^{(\delta)}) | X_0^{(\delta)} = x\}$. Из условия (2.1) следует, в частности, что

$$\psi^{(0)}(x) \in C(S). \tag{2.10}$$

Если цепь $\{X_n^{(\delta)}\}$ находится в стационарном состоянии (т. е. $X_n^{(\delta)}$ имеет распределение $\pi^{(\delta)}$ для любого n), то справедливо равенство $\mathbf{E}f(X_1^{(\delta)}) = \mathbf{E}f(X_0^{(\delta)})$. Переходя к условному математическому ожиданию, получаем

$$\begin{aligned}\int_S f(x)\pi^{(\delta)}(dx) &= \mathbf{E}f(X_1^{(\delta)}) = \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\{f(X_1^{(\delta)})|X_0^{(\delta)}\}\right\} = \int_S \psi^{(\delta)}(x)\pi^{(\delta)}(dx)\end{aligned}$$

для любого $\delta \neq 0$. Пусть K — произвольный компакт в S. Используя последнее равенство, выводим оценку

$$\begin{aligned}&\left|\int_S f(x)\widetilde{\pi}(dx) - \int_S \psi^{(0)}(x)\widetilde{\pi}(dx)\right| = \\ = &\left|\int_S f(x)\left[\widetilde{\pi}(dx) - \pi^{(\delta_k)}(dx)\right] - \left[\int_S \psi^{(0)}(x)\widetilde{\pi}(dx) - \int_S \psi^{(\delta_k)}(x)\pi^{(\delta_k)}(dx)\right]\right| \leq \\ \leq &\left|\int_S f(x)\left[\widetilde{\pi}(dx) - \pi^{(\delta_k)}(dx)\right]\right| + \\ &+\left|\int_K \left[\psi^{(\delta_k)}(x) - \psi^{(0)}(x)\right]\pi^{(\delta_k)}(dx)\right| + \left|\int_{S\setminus K}\left[\psi^{(\delta_k)}(x) - \psi^{(0)}(x)\right]\pi^{(\delta_k)}(dx)\right| + \\ &+\left|\int_S \psi^{(0)}(x)\left[\pi^{(\delta_k)}(dx) - \widetilde{\pi}(dx)\right]\right| \equiv \\ \equiv &\ I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых. $I_1 \to 0$ при $\delta_k \to 0$ в силу слабой сходимости (2.9). $I_2 \to 0$ при $\delta_k \to 0$ для любого фиксированного компакта K в силу леммы 1. Слагаемое I_3 можно сделать сколь угодно малым (равномерно по δ), выбрав подходящий компакт $K \subset S$ ввиду условия плотности семейства мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \neq 0\}$ и ограниченности функции $\psi^{(\delta)}(x)$:

$$\psi^{(\delta)}(x) \quad \leq \quad \sup_{x\in S}|f(x)| < \infty.$$

$I_4 \to 0$ при $\delta_k \to 0$ в силу слабой сходимости (2.9), а также непрерывности и ограниченности функции $\psi^{(0)}(x)$ (см. (2.10)).

Таким образом, собирая оценки, приходим к равенству

$$\int_S f(x)\widetilde{\pi}(dx) \quad = \quad \int_S \psi^{(0)}(x)\widetilde{\pi}(dx)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$. Следовательно, $\mathbf{E}f(X_0^{(0)}) = \mathbf{E}f(X_1^{(0)})$, если случайный элемент $X_0^{(0)}$ имеет распределение $\widetilde{\pi}$. Отсюда вытекает (см., например, [9, стр. 17]), что случайные элементы $X_0^{(0)}$ и $X_1^{(0)}$ имеют одно и то же распределение, т. е. $\widetilde{\pi}$ действительно есть инвариантная мера цепи $\{X_n^{(0)}\}$. Таким образом доказано, что цепь $\{X_n^{(0)}\}$ имеет инвариантное распределение $\pi^{(0)}$, $\pi^{(0)} \equiv \widetilde{\pi}$. По условию цепь $\{X_n^{(0)}\}$ не может иметь более одного инвариантного распределения. Поэтому всякий частичный предел семейства мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \neq 0\}$ совпадает с $\pi^{(0)}$, что и требовалось доказать.

Иногда возникает ситуация, когда цепь Маркова $\{X_n^{(\delta)}\}$ принимает значения не во всем S, а в некотором подмножестве $S^{(\delta)} \subset S$; более точно, переходные вероятности $P^{(\delta)}(x, \cdot)$ цепи $\{X_n^{(\delta)}\}$ определены лишь для $x \in S^{(\delta)}$. В этой ситуации справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть для любой последовательности точек $y^{(\delta)}$, $y^{(\delta)} \in S^{(\delta)}$, имеющей некоторый предел $x \in S$ имеет место слабая сходимость*

$$P^{(\delta)}(y^{(\delta)}, \cdot) \Rightarrow P^{(0)}(x, \cdot) \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{2.11}$$

Пусть выполнено условие (2.3) *и семейство мер* $\{\pi^{(\delta)}, \delta \neq 0\}$ *в* S *плотно. Тогда существует инвариантное распределение* $\pi^{(0)}$ *цепи* $\{X_n^{(0)}\}$ *и имеет место слабая сходимость* $\pi^{(\delta)} \Rightarrow \pi^{(0)}$ *при* $\delta \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим новую цепь Маркова $\{\widetilde{X}_n^{(\delta)}\}$, переходные вероятности которой определяются равенством

$$\widetilde{P}^{(\delta)}(y, \cdot) \quad = \quad \begin{cases} P^{(\delta)}(y, \cdot), & \text{если} \quad y \in S^{(\delta)}, \\ P^{(0)}(y, \cdot), & \text{если} \quad y \notin S^{(\delta)}. \end{cases}$$

Последовательность цепей Маркова $\{\widetilde{X}_n^{(\delta)}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $\pi^{(\delta)}$ — инвариантное распределение цепи $\{\widetilde{X}_n^{(\delta)}\}$. Следовательно, теорема 2 вытекает из теоремы 1.

Теоремы 1 и 2 сводят во многом задачу о непрерывной зависимости инвариантного распределения от параметра к задаче о плотности семейства инвариантных мер. В следующих параграфах предложены некоторые достаточные (близкие к необходимым) условия плотности семейства инвариантных мер в терминах среднего сноса цепи Маркова (§ 5) и в терминах пробных функций (§§ 3 и 6).

§ 3. Плотность семейства инвариантных мер для цепей Маркова в метрическом пространстве

В настоящем параграфе мы рассматриваем семейство (по δ) цепей Маркова $\{X_n^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ со значениями в метрическом пространстве (S, ρ). Множество параметров Δ произвольно. В этом и последующих параграфах предполагаем, что для любого $\delta \in \Delta$ существует (вообще говоря, не единственное) инвариантное распределение $\pi^{(\delta)}$ цепи $\{X_n^{(\delta)}\}$.

Пусть существуют неотрицательная пробная функция $V : S \to \mathbf{R}^+$ и числа c, ε, $T > 0$ такие, что

$$\mathbf{E}\{V(X_1^{(\delta)}) - V(x) | X_0^{(\delta)} = x\} \leq -\varepsilon < 0, \tag{3.1}$$

если $V(x) \geq T$ и

$$\mathbf{E}\{V(X_1^{(\delta)}) - V(x) | X_0^{(\delta)} = x\} \leq c < \infty \tag{3.2}$$

для любых $x \in S$ и $\delta \in \Delta$. Обозначим через $\eta_x^{(\delta)}$ случайную величину с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_x^{(\delta)} \in B\} = \mathbf{P}\{V(X_1^{(\delta)}) - V(x) \in B | X_0^{(\delta)} = x\}, \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}),$$

где $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbf{R}$. В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение о среднем сносе пробной функции.

Теорема 3. ([5]). *Пусть* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве* (S, ρ) *и* $V(x)$ *— неотрицательная функция:* $V : S \to \mathbf{R}^+$. *Пусть цепь* $\{Y_n\}$ *имеет инвариантное распределение* π. *Если*

$$\int_S \max(0, \mathbf{E}\{V(Y_1) - V(x) | Y_0 = x\}) \pi(dx) < \infty,$$

то справедливо неравенство

$$\int_S \mathbf{E}\{V(Y_1) - V(x) | Y_0 = x\} \pi(dx) \geq 0. \tag{3.3}$$

В частности, если

$$\sup_{x\in S}\mathbf{E}\{V(Y_1)-V(x)|Y_0=x\}<\infty,$$

то выполнено (3.3).

Условия (3.1) и (3.2) не влекут, вообще говоря, плотность семейства инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)},\delta\in\Delta\}$. В следующей теореме выясняется достататочное условие, позволяющее делать выводы о плотности семейства мер $\{\pi^{(\delta)},\delta\in\Delta\}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (3.1) *и* (3.2). *Кроме того, пусть семейство случайных величин* $\{\max(0,\eta_x^{(\delta)})\}$ *интегрируемо равномерно по* $x\in S$ *и* $\delta\in\Delta$, *т. е.*

$$\sup_{x,\delta}\mathbf{E}\{\eta_x^{(\delta)};\eta_x^{(\delta)}\geq N\}\to 0 \quad \text{\textit{при} } N\to\infty.$$

Тогда семейство мер $\{\pi^{(\delta)}(V^{-1}(\cdot)),\delta\in\Delta\}$ *на полупрямой* $\mathbf{R}^+$ *плотно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие равномерной интегрируемости семейства случайных величин $\{\max(0,\eta_x^{(\delta)})\}$ эквивалентно существованию гладкой неотрицательной вогнутой функции $Q(t):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ такой, что $Q(t)\uparrow\infty$ при $t\to\infty$,

$$Q'(t)\leq\widetilde{c}/t,\ \widetilde{c}<\infty, \tag{3.4}$$

$$\sup_{x\in S,\delta\in\Delta}\mathbf{E}\{\eta_x^{(\delta)}Q(\eta_x^{(\delta)});\eta_x^{(\delta)}\geq 0\}\leq\widehat{c}<\infty. \tag{3.5}$$

Рассмотрим пробную функцию $W(x)=V(x)Q(V(x))$, $x\in S$. Оценим сверху средний снос функции W из состояния x. Пусть событие A определяется как $A=\{V(X_1^{(\delta)})\geq V(X_0^{(\delta)})\}$, $\overline{A}=\Omega\setminus A$. Имеем равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{W(X_1^{(\delta)})-W(x)|X_0^{(\delta)}=x\} &= \mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})Q(V(X_1^{(\delta)}))-V(x)Q(V(x))\right]\mathbf{I}_{\overline{A}}|X_0^{(\delta)}=x\right\}+\\ &+\mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right]Q(V(X_1^{(\delta)}))\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\}+\\ &+\mathbf{E}\left\{V(x)\left[Q(V(X_1^{(\delta)}))-Q(V(x))\right]\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\}=\\ &= I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{3.6}$$

В силу возрастания функции Q слагаемое I_1 допускает оценку

$$I_1\leq\mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right]Q(V(x))\mathbf{I}_{\overline{A}}|X_0^{(\delta)}=x\right\}. \tag{3.7}$$

Функция Q вогнута, поэтому слагаемое I_2 можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned}I_2 &\leq \mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right]Q(V(x))\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\}+\\ &+\mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right]Q\left(V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right)\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\}=\\ &= Q(V(x))\mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right]\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\}+\\ &+\mathbf{E}\left\{\eta_x^{(\delta)}Q(\eta_x^{(\delta)});\eta_x^{(\delta)}\geq 0\right\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Опять используя вогнутость функции Q, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\left[Q(V(X_1^{(\delta)}))-Q(V(x))\right]\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\} &\leq Q'(V(x))\mathbf{E}\left\{\left[V(X_1^{(\delta)})-V(x)\right]\mathbf{I}_A|X_0^{(\delta)}=x\right\}\leq\\ &\leq Q'(V(x))c_1,\quad c_1<\infty,\end{aligned}$$

в силу условия (3.5). Следовательно, ввиду (3.4) справедлива следующая оценка для I_3:

$$I_3 \le c_1 Q'(V(x))V(x) \le \widetilde{c}c_1. \tag{3.9}$$

Подставляя оценки (3.7)–(3.9) в (3.6) и используя (3.5), (3.1) и (3.2), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{W(X_1^{(\delta)}) - W(x)|X_0^{(\delta)} = x\right\} &\le Q(V(x))\mathbf{E}\left\{V(X_1^{(\delta)}) - V(x)|X_0^{(\delta)} = x\right\} + \widehat{c} + \widetilde{c}c_1 \le \\ &\le \begin{cases} -\varepsilon Q(V(x)) + \widehat{c} + \widetilde{c}c_1, & \text{если} \quad V(x) \ge T, \\ cQ(T) + \widehat{c} + \widetilde{c}c_1, & \text{если} \quad V(x) < T. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.10}$$

В частности, средний снос пробной функции W ограничен равномерно по $x \in S$ и $\delta \in \Delta$:

$$\mathbf{E}\left\{W(X_1^{(\delta)}) - W(x)|X_0^{(\delta)} = x\right\} \le cQ(T) + \widehat{c} + \widetilde{c}c_1 \equiv \overline{c} < \infty.$$

Поэтому применима теорема 3 и, следовательно, справедливо неравенство

$$\int_S \mathbf{E}\left\{W(X_1^{(\delta)}) - W(x)|X_0^{(\delta)} = x\right\} \pi^{(\delta)}(dx) \ge 0.$$

Подставляя оценку (3.10), выводим

$$\int_{x:V(x)\ge T} (-\varepsilon Q(V(x)) + \widehat{c} + \widetilde{c}c_1)\pi^{(\delta)}(dx) + \int_{x:V(x)<T} \overline{c}\pi^{(\delta)}(dx) \ge 0,$$

откуда вытекает неравенство

$$\int_{x:V(x)\ge T} Q(V(x))\pi^{(\delta)}(dx) \le \overline{c}/\varepsilon$$

равномерно по $\delta \in \Delta$. Так как $Q(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$, то последнее неравенство влечет утверждение теоремы 4.

З а м е ч а н и е. Вместо теоремы 3 можно использовать теорему из [10].

Как отмечалось во введении, условие равномерной интегрируемости теоремы 4 выполнено далеко не всегда. Два наиболее важных случая, когда условие равномерной интегрируемости все-таки выполнено, выделены в следующих следствиях.

Следствие 1. *Пусть имеют место* (3.1) *и* (3.2). *Пусть, кроме того, семейство случайных величин* $\{r_x^{(\delta)}, x \in S, \delta \in \Delta\}$ *с распределением*

$$\mathbf{P}\{r_x^{(\delta)} < t\} = \mathbf{P}\{\rho(X_1^{(\delta)}, x) < t|X_0^{(\delta)} = x\}, \quad t \ge 0,$$

интегрируемо равномерно по $x \in S$ *и* $\delta \in \Delta$, *а функция* V *удовлетворяет условию Липшица, т. е.* $|V(x) - V(y)| \le c\rho(x, y)$ *для всех* x, $y \in S$, *где* $c < \infty$. *Тогда семейство мер* $\{\pi^{(\delta)}(V^{-1}(\cdot)), \delta \in \Delta\}$ *на полупрямой* $\mathbf{R}^+$ *плотно.*

В следующем следствии рассматривается многомерная цепь Маркова, т. е. $S = (\mathbf{R}^+)^d$. Для всяких вектора $x = (x_1, ..., x_d)$ и числа k, $1 \le k \le d$, обозначим $P_k(x) = x_k$.

Следствие 2. *Предположим, что* k*-я координата процесса* $X_n^{(\delta)} \equiv (X_{n,1}^{(\delta)}, ..., X_{n,d}^{(\delta)})$

(a) *имеет отрицательный снос, т. е. для некоторого* $T > 0$

$$\mathbf{E}\{X_{n,k}^{(\delta)} - P_k(x)|X_{n-1}^{(\delta)} = x\} \le -\varepsilon < 0,$$

если $P_k(x) \ge T$, *и*

(b) *интегрируема равномерно по* $\delta \in \Delta$, *т. е.*

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{(X_{n,k}^{(\delta)} - P_k(x))\mathbf{I}_{\{X_{n,k}^{(\delta)} - P_k(x) \ge N\}}|X_{n-1}^{(\delta)} = x\} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Тогда семейство мер $\{\pi^{(\delta)}(P_k^{-1}(\cdot)), \delta \in \Delta\}$ *на полупрямой* $\mathbf{R}^+$ *плотно.*

Область применимости теоремы 4 ограничена по-существу пробными функциями, удовлетворяющими условию Липшица. Если условие Липшица нарушено (например, если $V(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$), то требуются более точные теоремы. О них и пойдет речь в следующих параграфах.

§ 4. Связь среднего сноса пробной функции и моментов скачков вещественнозначной цепи Маркова

В этом и в последующих параграфах основное внимание уделяется пробным функциям, растущим быстрее линейной функции и, следовательно, не удовлетворяющим условию Липшица. При этом на пробную функцию приходится накладывать некоторые ограничения (см. (4.2), (4.3)), которые, вообще говоря, могут быть сформулированы лишь для фазового пространства $S = \mathbf{R}^+$. Итак, в §§ 4, 5 и частично в 6 рассматриваются вещественнозначные цепи Маркова. В § 6 сформулированы некоторые утверждения для цепей Маркова со значениями в метрическом пространстве.

Пусть $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — цепь Маркова со значениями в $\mathbf{R}^+$ и переходными вероятностями $P(x, \cdot)$. Обозначим через ξ_x случайную величину, соответствующую скачку цепи $\{X_n\}$ из состояния x, т. е. случайную величину, имеющую распределение

$$\mathbf{P}\{x + \xi_x \in B\} = P(x, B), \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^+).$$

Пусть неотрицательная пробная функция $V : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такова, что при $x \geq x_*$

$$\mathbf{E}\{V(x + \xi_x) - V(x)\} \leq -\varepsilon < 0 \tag{4.1}$$

для некоторых x_* и $\varepsilon > 0$. Нас интересует следующий вопрос. Какова «правильная» верхняя оценка для $\mathbf{E}\xi_x$, если выполнено условие (4.1)? Оказывается, что ответ на поставленный вопрос зависит от скорости роста функции V. Именно, выделяются две ситуации: (a) $V(x) = o(x^2)$ при $x \to \infty$ и (b) $V(x) \geq cx^2$, $c > 0$. В соответствии с этими двумя случаями мы формулируем леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (4.1) *и возрастающая функция V выпукла. Тогда при всех $x \geq x_*$*

$$\mathbf{E}\xi_x \leq -\varepsilon \frac{x}{V(2x)}.$$

Доказательство. Функция V выпукла, поэтому в каждой точке x существует опорная прямая к функции V. Обозначим через $d_V(x)$ угол наклона этой опорной прямой (если опорная прямая не единственна, то выбираем любую из них). Поскольку V выпукла, приращения функции V удовлетворяют неравенству $V(y) - V(x) \geq d_V(x)(y - x)$ для любых x, $y \geq 0$. Отсюда вытекает следующая оценка среднего сноса пробной функции V:

$$\mathbf{E}\{V(x + \xi_x) - V(x)\} \geq d_V(x)\mathbf{E}\xi_x.$$

Отсюда и из условия (4.1) выводим неравенство

$$d_V(x)\mathbf{E}\xi_x \leq -\varepsilon$$

при $x \geq x_*$. Используя выпуклость функции V, получаем

$$d_V(x) \leq \frac{V(2x) - V(x)}{2x - x} \leq \frac{V(2x)}{x}.$$

Из двух последних неравенств вытекает утверждение леммы.

Неравенство леммы 2 неулучшаемо (с точностью до постоянного множителя) лишь для функций V класса $o(x^2)$. В случае, когда $V(x) \geq cx^2$, $c > 0$, его можно существенно поправить, используя вторые моменты скачков цепи, как это сделано в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (4.1) *и возрастающая функция* $u(x) \equiv V(x)/x$ *выпукла, причем* $u(0) = 0$. *Тогда при всех* $x \geq x_*$

$$2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2 \leq -\varepsilon \frac{x}{u(2x)}.$$

Доказательство. Ввиду условия выпуклости u, как отмечалось в доказательстве леммы 2, угол наклона $d_u(x)$ опорной прямой к функции u в точке x удовлетворяет неравенствам

$$u(x+y) - u(x) \geq d_u(x)y, \quad y \geq -x, \tag{4.2}$$

$$\frac{u(x)}{x} \leq d_u(x), \tag{4.3}$$

$$d_u(x) \leq \frac{u(2x) - u(x)}{x} \leq \frac{u(2x)}{x}. \tag{4.4}$$

Из неравенства (4.2) вытекает следующая оценка для приращений функции V, $y \geq -x$:

$$V(x+y) - V(x) = (x+y)u(x+y) - xu(x) \geq d_u(x)(xy + y^2) + u(x)y.$$

Отсюда и из условия (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} d_u(x)\left[x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2\right] + u(x)\mathbf{E}\xi_x &\leq \mathbf{E}\{V(x+\xi_x) - V(x)\} \leq \\ &\leq -\varepsilon \quad \text{при } x \geq x_*. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В частности, $\mathbf{E}\xi_x < 0$ при $x \geq x_*$. Поэтому, подставляя (4.3) в (4.5), получаем при $x \geq x_*$ следующее неравенство

$$d_u(x)\left[2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2\right] \leq -\varepsilon.$$

Из последней оценки и (4.4) вытекает утверждение леммы.

Неравенство леммы 3 неулучшаемо лишь для функций V класса $o(x^2 \ln x)$ при $x \to \infty$. Если $V(x) \geq cx^2 \ln x$, $c > 0$, то неравенство леммы 3 можно уточнить, используя при этом по-прежнему лишь вторые моменты скачков цепи, следующим образом.

Мы используем обозначения (1.3) и (1.4), а также

$$L^{(i,k)}(x) = \prod_{j=i}^{k} \ln^{(j)} x = \frac{L^{(k)}(x)}{L^{(i-1)}(x)}, \quad i = 1, ..., k.$$

Фиксируем $k \in \{1, 2, ...\}$. Пусть

$$V(x) = x^2 L^{(k-1)}(x) u(\ln^{(k)} x), \quad u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+.$$

Не ограничивая общности предполагаем до конца параграфа, что цепи $\{X_n^{(\delta)}\}$ принимают значения лишь на полупрямой $[A_k, \infty)$, где A_k — решение уравнения $\ln^{(k)} A_k = 0$. В частности, $V(X_n^{(\delta)}) \geq 0$ с вероятностью 1. Справедлива

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (4.1) *и неотрицательная функция* $u(x)$ *выпукла, причем* $u(0) = 0$ *и* $u(\ln^{(k)} x) \leq c + x^{1/5}$. *Пусть, кроме того,*

$$\sup_x \mathbf{E}\{V(|\xi_x|); \xi_x \leq -N\} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{4.6}$$

Тогда существует $\widehat{x} < \infty$ *такое, что при всех* $x \geq \widehat{x}$

$$2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2 + \left[\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{L^{(2)}(x)} + ... + \frac{1}{L^{(k)}(x)}\right]\left[x\mathbf{E}\xi_x + \frac{3}{2}\mathbf{E}(\xi_x)^2\right] \leq -\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{L^{(k-1)}(x)u(2\ln^{(k)} x)}.$$

Если, кроме того,

$$\sup_x \mathbf{E}(\xi_x)^2 < \infty,$$

то при достаточно больших x

$$2x\mathbf{E}\xi_x + \left[1 + \frac{1}{\ln x} + \ldots + \frac{1}{L^{(k)}(x)}\right] \mathbf{E}(\xi_x)^2 \le -\frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{L^{(k-1)}(x) u(2\ln^{(k)} x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $W(x) \equiv x^2 L^{(k-1)}(x)$ и пусть W^{-1} — функция, обратная к функции W. Положим $m_x \equiv \mathbf{E}W(x+\xi_x)$. Поскольку функция $tu(\ln^{(k)} W^{-1}(t))$ выпукла, то

$$\mathbf{E}V(x+\xi_x) = \mathbf{E}W(x+\xi_x) u(\ln^{(k)} W^{-1}(W(x+\xi_x))) \ge m_x u(\ln^{(k)} W^{-1}(m_x)).$$

Отсюда и из условия (4.1) имеем, в частности, что при $x \ge x_*$

$$m_x \equiv \mathbf{E}W(x+\xi_x) \le W(x). \tag{4.7}$$

Ввиду выпуклости функции u имеем неравенство

$$\begin{aligned} V(x+y) - V(x) &= W(x+y)\left(u(\ln^{(k)}(x+y)) - u(\ln^{(k)} x)\right) + [W(x+y) - W(x)]\, u(\ln^{(k)} x) \ge \\ &\ge W(x+y) d_u(\ln^{(k)} x)\left(\ln^{(k)}(x+y) - \ln^{(k)} x\right) + \\ &\quad + [W(x+y) - W(x)]\, u(\ln^{(k)} x). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Так как $d_u(t) \ge u(t)/t$, то

$$u(\ln^{(k)} x) \le d_u(\ln^{(k)} x) \ln^{(k)} x.$$

Ввиду (4.7) и последнего неравенства имеем из (4.8) при $x \ge x_*$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(x+\xi_x) - V(x)\} &\ge d_u(\ln^{(k)} x)\mathbf{E}(x+\xi_x)^2 L^{(k)}(x+\xi_x) - d_u(\ln^{(k)} x)\ln^{(k)} x\mathbf{E}W(x+\xi_x) + \\ &\quad + d_u(\ln^{(k)} x)\ln^{(k)} x\mathbf{E}\{W(x+\xi_x) - W(x)\} = \\ &= d_u(\ln^{(k)} x)\left[\mathbf{E}(x+\xi_x)^2 L^{(k)}(x+\xi_x) - x^2 L^{(k)}(x)\right]. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство $d_u(t) \le (u(2t) - u(t))/t \le u(2t)/t$ и условие (4.1), приходим при $x \ge x_*$ к оценке

$$\mathbf{E}(x+\xi_x)^2 L^{(k)}(x+\xi_x) - x^2 L^{(k)}(x) \le -\varepsilon \frac{\ln^{(k)} x}{u(2\ln^{(k)} x)}. \tag{4.9}$$

Первая и вторая производные функции $x^2 L^{(k)}(x)$ равны:

$$\frac{d}{dx} x^2 L^{(k)}(x) = 2xL^{(k)}(x) + xL^{(2,k)}(x) + \ldots + x\ln^{(k)} x + x, \tag{4.10}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^2 L^{(k)}(x) = 2L^{(k)}(x) + 3L^{(2,k)}(x) + \ldots + 3\ln^{(k)} x + 3 + \psi(x), \tag{4.11}$$

где $\psi(x) \ge 0$ и $\psi(x) \le cL^{(3,k)}(x)/\ln x$ при $x \ge A_k$. Поэтому по формуле Тейлора выводим неравенство

$$\begin{aligned} &(x+y)^2 L^{(k)}(x+y) - x^2 L^{(k)}(x) \ge \\ &\ge y\left[2xL^{(k)}(x) + xL^{(2,k)}(x) + \ldots + x\right] + \frac{y^2}{2}\left[2L^{(k)}(x+\theta y) + 3L^{(2,k)}(x+\theta y) + \ldots + 3\right] \ge \\ &\ge xy\left[2L^{(k)}(x) + L^{(2,k)}(x) + \ldots + 1\right] + y^2\left[L^{(k)}(x-y^-) + \frac{3}{2}L^{(2,k)}(x-y^-) + \ldots + \frac{3}{2}\right], \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $0 \le \theta \le 1$ и $y^- = \max(0, -y)$. Поскольку $L^{(i,k)}(x-\sqrt{x}) = L^{(i,k)}(x) + O(x^{-1/4})$ и $L^{(i,k)}(x - y^-) \ge L^{(i,k)}(x) - L^{(i,k)}(A_k + y^-)$ (ввиду вогнутости функции $L^{(i,k)}$), то из (4.12) имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\{(x+\xi_x)^2 L^{(k)}(x+\xi_x) - x^2 L^{(k)}(x)\} \ge \\
&\ge \quad x\mathbf{E}\xi_x \left[2L^{(k)}(x) + L^{(2,k)}(x) + \ldots + 1\right] + \mathbf{E}(\xi_x)^2 \left[L^{(k)}(x) + \frac{3}{2}L^{(2,k)}(x) + \ldots + \frac{3}{2}\right] + o(x^{-1/4}) - \\
&\quad -\mathbf{E}\left\{(\xi_x)^2\left[L^{(k)}(A_k+\xi_x^-) + \frac{3}{2}L^{(2,k)}(A_k+\xi_x^-) + \ldots + \frac{3}{2}\ln^{(k)}(A_k+\xi_x^-)\right]; \xi_x \le -\sqrt{x}\right\} = \\
&= \quad L^{(k)}(x)\left(2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2\right) + L^{(k)}(x)\left[\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{L^{(2)}(x)} + \ldots + \frac{1}{L^{(k)}(x)}\right]\left[x\mathbf{E}\xi_x + \frac{3}{2}\mathbf{E}(\xi_x)^2\right] + \\
&\quad +o(x^{-1/4}) + o\left(\frac{\ln^{(k)} x}{u(\ln^{(k)} x)}\right)
\end{aligned}$$

при $x \to \infty$ (малость остаточных членов следует из условия (4.6) и неравенства Чебышева). Подставляя последнее неравенство в (4.9), получаем справедливость первой оценки леммы при достаточно больших x.

Поскольку левая часть первой оценки леммы равна

$$\left(2x\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{E}(\xi_x)^2\right)\left[1 + \frac{1}{2\ln x} + \frac{1}{2L^{(2)}(x)} + \ldots + \frac{1}{2L^{(k)}(x)}\right] + \left[\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{L^{(2)}(x)} + \ldots + \frac{1}{L^{(k)}(x)}\right]\mathbf{E}(\xi_x)^2,$$

то вторая оценка леммы получается из первой умножением на

$$\left[1 + \frac{1}{2\ln x} + \frac{1}{2L^{(2)}(x)} + \ldots + \frac{1}{2L^{(k)}(x)}\right]^{-1}.$$

§ 5. Условия плотности семейства инвариантных мер для вещественнозначных цепей Маркова в терминах моментов скачков цепей

Пусть $\{X_n^{(\delta)}\}_{n=0}^{\infty}$ — цепь Маркова со значениями в $\mathbf{R}^+$ и с переходными вероятностями $P^{(\delta)}(x,\cdot)$; $\delta \in \Delta$, Δ — произвольное параметрическое множество. Обозначим через $\xi_x^{(\delta)}$ случайную величину с распределением $\mathbf{P}\{x + \xi_x^{(\delta)} \in B\} = P^{(\delta)}(x, B)$. В следующих теоремах 5 и 6 выясняется, сколь быстро может расти (по x) значение $\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}$, чтобы семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ было плотным. Справедлива

Теорема 5. *Пусть неотрицательная вогнутая функция v такова, что*

$$v(x)/x \to 0 \text{ при } x \to \infty. \tag{5.1}$$

Пусть для некоторого $\widehat{x}$ выполнено

$$\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} \le -1/v(x) \tag{5.2}$$

при всех $x \ge \widehat{x}$ и $\delta \in \Delta$, и семейство случайных величин $\{|\xi_x^{(\delta)}|v(|\xi_x^{(\delta)}|)\}$ интегрируемо равномерно по x и δ, т. е.

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{|\xi_x^{(\delta)}|v(|\xi_x^{(\delta)}|); |\xi_x^{(\delta)}| \ge N\} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \tag{5.3}$$

Тогда семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ плотно.

Следствием настоящей теоремы (при $v(x) = \mathrm{const}$) и теоремы 1 являются теоремы устойчивости из [11, § 20] (см. также [12, гл. 4]).

Замечание. Поскольку функция v неотрицательна и вогнута, то v не убывает, а функция $v(x)/x$ не возрастает. В частности, предел отношения $v(x)/x$ в (5.1) всегда существует (положительный или равный нулю).

Доказательство теоремы. Пусть неотрицательная возрастающая функция $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такова, что $g(x) \uparrow \infty$, причем

$$\text{функция } Q(x) = v(x)g(x) \text{ вогнута,} \tag{5.4}$$

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{|\xi_x^{(\delta)}| Q(|\xi_x^{(\delta)}|)\} = c_1 < \infty. \tag{5.5}$$

Существование функции g, обладающей перечисленными свойствами, обеспечено условиями (5.1) и (5.3).

Введем в рассмотрение пробную функцию V, определяемую равенством

$$V(x) = \int_0^x Q(y)dy.$$

Оценим приращения функции V. По формуле Тейлора имеем при любых x, $y \geq 0$ ($0 \leq \theta = \theta(x,y) \leq 1$):

$$\begin{aligned} V(y) - V(x) &= Q(x + \theta(y-x))(y-x) = \\ &= Q(x)(y-x) + [Q(x+\theta(y-x)) - Q(x)](y-x). \end{aligned}$$

Ввиду вогнутости и возрастания (см. (5.4)) функция Q обладает свойством: $|Q(u) - Q(t)| \leq Q(|u-t)|$ для любых u, $t \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} V(y) - V(x) &\leq Q(x)(y-x) + Q(|\theta(y-x)|)|y-x| \leq \\ &\leq Q(x)(y-x) + Q(|y-x|)|y-x|. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (5.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)}) - V(x)\} &\leq Q(x)\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + c_1 = \\ &= g(x)(v(x)\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}) + c_1 \leq \\ &\leq -g(x) + c_1, \quad c_1 < \infty, \end{aligned}$$

при $x \geq \widehat{x}$ и $\delta \in \Delta$ ввиду условия (5.2). Так как по построению $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то дальнейшее использование теоремы 3 (как и при доказательстве теоремы 4) завершает доказательство теоремы 5.

Если не обращать внимание на вогнутость функции v, то условия (5.1)–(5.2) можно переформулировать следующим образом:

$$\limsup_{x\to\infty} x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} = -\infty$$

равномерно по $\delta \in \Delta$. Далее мы рассматриваем ситуацию, когда это условие, вообще говоря, нарушено. Например, когда при некотором $q < 0$ выполнено $\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} \sim q/x$ при $x \to \infty$. Оказывается, что и в этом случае плотность семейства инвариантных мер может иметь место, если константа q «достаточно отрицательна». При этом приходится привлекать к рассмотрению вторые моменты скачков цепей, как это сделано в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть неотрицательная вогнутая функция v удовлетворяет условию* (5.1). *Пусть для некоторого $\widehat{x} < \infty$ выполняется неравенство*

$$2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + \mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2 \leq -1/v(\ln x) \tag{5.6}$$

при всех $x \geq \widehat{x}$ и $\delta \in \Delta$, а также пусть семейство случайных величин $\{(\xi_x^{(\delta)})^2 v(\ln \xi_x^{(\delta)}) \mathbf{I}\{\xi_x^{(\delta)} \geq 1\}\}$ интегрируемо равномерно по x и δ, т. е.

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{(\xi_x^{(\delta)})^2 v(\ln \xi_x^{(\delta)}); \xi_x^{(\delta)} \geq N\} \to 0 \quad \text{\textit{при} } N \to \infty,$$

а вторые моменты скачков цепей ограничены равномерно по x и δ, т. е.

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2 < \infty.$$

Тогда семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ плотно.

Следствием настоящей теоремы и теоремы 1 является теоремы устойчивости из [13] и [5] (при $v(x) = \mathrm{const} > 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности считаем, что цепи $\{X_n^{(\delta)}\}$ принимают значения в $[1, \infty)$. Из условий теоремы следует, что существует положительная возрастающая функция g такая, что $g(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$\text{функция } \widetilde{Q}(x) = v(x) g(x) \text{ вогнута,} \tag{5.7}$$

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{(\xi_x^{(\delta)})^2 \widetilde{Q}(\ln(1 + \xi_x^{(\delta)})); \xi_x^{(\delta)} \geq 0\} = c_2 < \infty. \tag{5.8}$$

Положим

$$\widehat{Q}(x) \equiv \int_0^x \widetilde{Q}(y) dy \quad \text{и} \quad Q(x) \equiv \int_0^x \widehat{Q}(y) dy.$$

Поскольку функция $\widetilde{Q}$ вогнута, то производная $\widehat{Q}'(x) = \widetilde{Q}(x+1) - \widetilde{Q}(x)$ не возрастает и, следовательно, функция $\widehat{Q}$ вогнута. В частности, для любого $x \geq 0$

$$Q'(x) = \widehat{Q}(x+1) - \widehat{Q}(x) \leq \widehat{Q}(1). \tag{5.9}$$

Ровно также вогнута и функция Q. По построению $\widetilde{Q}(x) \leq Q(x) \leq \widetilde{Q}(x+2)$, поэтому

$$Q(x) \sim \widetilde{Q}(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{5.10}$$

Рассмотрим пробную функцию $V(x) = x^2 Q(\ln x)$. Оценим сверху приращение функции V. По формуле Тейлора имеем при $y \geq -x + 1$ разложение $(0 \leq \theta = \theta(x, y) \leq 1)$:

$$\begin{aligned} V(x+y) - V(x) &= y[2xQ(\ln x) + xQ'(s)|_{s=\ln x}] + \\ &\quad + \frac{y^2}{2}\left[2Q(\ln(x+\theta y)) + (3Q'(s) + Q''(s))|_{s=\ln(x+\theta y)}\right] \leq \\ &\leq (2xy + y^2) Q(\ln x) + yxQ'(s)|_{s=\ln x} + y^2 \left(Q(\ln(1+y^+)) + \frac{3}{2}\widehat{Q}(1)\right). \end{aligned}$$

где неравенство верно ввиду возрастания и вогнутости функция Q, (5.9) и неположительности второй производной $Q''(s)$; $y^+ = \max(0, y)$. Отсюда выводим следующую оценку сверху для среднего сноса пробной функции V из состояния x:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(x + \xi_x^{(\delta)}) - V(x)\} &\leq \left[2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + \mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2\right] Q(\ln x) + \\ &\quad + xQ'(s)|_{s=\ln x} \mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + \mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2 Q(\ln(1 + \xi_x^{(\delta)+})) + \frac{3}{2}\widehat{Q}(1)\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} < 0$ при $x \geq \widehat{x}$ (в силу условия (5.6)), а также (5.8) и равномерную ограниченность вторых моментов скачков цепей, получаем при $x \geq \widehat{x}$ соотношение

$$\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)}) - V(x)\} \quad \leq \quad \left[2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + \mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2\right] Q(\ln x) + c_3.$$

Отсюда ввиду (5.6) и (5.10) приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)}) - V(x)\} \quad &\leq \quad -\frac{Q(\ln x)}{v(\ln x)} + c_3 \sim \\ &\sim \quad -g(\ln x), \quad x \to \infty,\end{aligned}$$

так как по построению $g(\ln x) \to \infty$. Дальнейшее использование теоремы 3 (как и при доказательстве теоремы 4) завершает доказательство.

Как и вслед за доказательством теоремы 5 следует отметить, что условия (5.1) и (5.6) можно переформулировать следующим образом:

$$\limsup_{x\to\infty}[2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + \mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2]\ln x = -\infty$$

равномерно по $\delta \in \Delta$. Если это условие нарушено, то плотность семейства инвариантных мер все еще может иметь место. Именно, справедлива

Теорема 7. *Пусть неотрицательная вогнутая функция v удовлетворяет условию (5.1). Пусть $k \in \{1, 2, ...\}$ и для некоторого $\widehat{x} < \infty$ выполняется неравенство*

$$2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)} + \left[1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{L^{(2)}(x)} + ... + \frac{1}{L^{(k)}(x)}\right]\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2 \quad \leq \quad -\frac{1}{L^{(k)}(x)v(\ln^{(k+1)} x)} \qquad (5.11)$$

при всех $x \geq \widehat{x}$ и $\delta \in \Delta$. Пусть

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{(\xi_x^{(\delta)})^2 L^{(k)}(\xi_x^{(\delta)}) v(\ln^{(k+1)} \xi_x^{(\delta)}); \xi_x^{(\delta)} \geq N\} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty,$$

и выполнено условие предыдущей теоремы о равномерной ограниченности вторых моментов скачков. Тогда семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ плотно.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что цепи $\{X_n^{(\delta)}\}$ принимают значения в $[A_{k+1}, \infty)$, где A_{k+1} — решение уравнения $\ln^{(k+1)} A_{k+1} = 0$. В силу условий теоремы существует вогнутая функция $\widetilde{Q}$ такая, что $\widetilde{Q}(x)/v(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$\sup_{x,\delta} \mathbf{E}\{(\xi_x^{(\delta)})^2 L^{(k)}(A_{k+1} + \xi_x^{(\delta)})\widetilde{Q}(\ln^{(k+1)}(A_{k+1} + \xi_x^{(\delta)})); \xi_x^{(\delta)} \geq 0\} = c_4 < \infty. \qquad (5.12)$$

Рассмотрим пробную функцию $V(x) = x^2 L^{(k)}(x) Q(\ln^{(k+1)} x)$, где функция Q построена в ходе предыдущего доказательства. Учитывая (4.10) и неотрицательность Q', имеем неравенство

$$\frac{d}{dx}V(x) \quad \geq \quad \left(2xL^{(k)}(x) + xL^{(2,k)}(x) + ... + x\ln^{(k)} x + x\right) Q(\ln^{(k+1)} x).$$

Функция Q вогнута, поэтому $Q'' \leq 0$ и, кроме того,

$$\frac{d}{dx}Q(\ln^{(k+1)} x) \leq \frac{\sup_s Q'(s)}{xL^{(k)}(x)} = \frac{c_5}{xL^{(k)}(x)}.$$

Вместе с (4.11) это дает следующую оценку сверху для второй производной функции V:

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x) \quad \leq \quad \left[2L^{(k)}(x) + 3L^{(2,k)}(x) + ... + 3\ln^{(k)} x + 3\right] Q(\ln^{(k+1)} x) + c_6.$$

По формуле Тейлора

$$\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)})-V(x)\} \quad = \quad V'(x)\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}+\frac{1}{2}\mathbf{E}\left\{V''(x+\theta\xi_x^{(\delta)})(\xi_x^{(\delta)})^2\right\}$$

Учитывая, что $\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}<0$ при $x\geq\widehat{x}$ (ввиду условия (5.11)), а также оценки для V' и V'' и условие равномерной ограниченности вторых моментов скачков, получаем следующую оценку сверху для среднего сноса пробной функции V из состояния x:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)})-V(x)\} \quad &\leq \quad x\left(2L^{(k)}(x)+L^{(2,k)}(x)+\ldots+\ln^{(k)}x+1\right)Q(\ln^{(k+1)}x)\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}+\\ &+\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2\left(L^{(k)}(\eta)+\frac{3}{2}\left[L^{(2,k)}(\eta)+\ldots+\ln^{(k)}(\eta)+1\right]\right)Q(\ln^{(k+1)}(\eta))\Big|_{\eta=x+\xi_x^{(\delta)+}}+c_7.\end{aligned}$$

Поскольку функции $L^{(i,k)}(x)Q(\ln^{(k+1)}x)$ вогнуты, то при $y>0$

$$\begin{aligned}&L^{(i,k)}(x+y)Q(\ln^{(k+1)}(x+y))\leq\\ &\leq\quad L^{(i,k)}(x)Q(\ln^{(k+1)}x)+c_8L^{(i,k)}(A_{k+1}+y)Q(\ln^{(k+1)}(A_{k+1}+y))\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)})-V(x)\} \quad &\leq \quad \left[2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}+\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2\right]L^{(k)}(x)Q(\ln^{(k+1)}x)+\\ &+\left[x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}+\frac{3}{2}\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2\right]\left[\frac{1}{\ln x}+\ldots+\frac{1}{L^{(k)}(x)}\right]L^{(k)}(x)Q(\ln^{(k+1)}x)+c_9,\end{aligned}$$

ввиду (5.12). В силу (5.11) $2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}+\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2<0$ при $x\geq\widehat{x}$, поэтому последнее неравенство влечет

$$\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)})-V(x)\} \quad \leq \quad \left[2x\mathbf{E}\xi_x^{(\delta)}+\left[1+\frac{1}{\ln x}+\ldots+\frac{1}{L^{(k)}(x)}\right]\mathbf{E}(\xi_x^{(\delta)})^2\right]L^{(k)}(x)Q(\ln^{(k+1)}x)+c_9,$$

Используя условие (5.11) теоремы, приходим при $x\geq\widehat{x}$ к оценке

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{V(x+\xi_x^{(\delta)})-V(x)\} \quad &\leq \quad -\frac{Q(\ln^{(k+1)}x)}{v(\ln^{(k+1)}x)}+c_9\\ &\to \quad -\infty, \quad x\to\infty.\end{aligned}$$

Дальнейшее использование теоремы 3 (как и в ходе доказательства теоремы 4) завершает доказательство.

§ 6. Условия плотности семейства инвариантных мер в терминах пробных функций

При решении вопроса об условиях плотности семейства инвариантных мер в терминах пробных функций (функций Ляпунова) мы будем предполагать, что существуют числа x_*, c и $\varepsilon>0$ такие, что

$$a^{(\delta)}(x)\equiv\mathbf{E}\{V(\xi_x^{(\delta)})-V(x)\}\leq-\varepsilon<0, \tag{6.1}$$

если $x\geq x_*$ и $a^{(\delta)}(x)\leq c$ для всех $x\geq 0$ и $\delta\in\Delta$. Кроме того, будем предполагать выполненным следующее весьма естественное условие о равномерной (по $x\geq 0$ и $\delta\in\Delta$) интегрируемости семейства случайных величин $\{V(|\xi_x^{(\delta)}|)\}$, т. е.

$$\sup_{x,\delta}\mathbf{E}\{V(|\xi_x^{(\delta)}|);|\xi_x^{(\delta)}|\geq N\}\to 0 \quad \text{при } N\to\infty. \tag{6.2}$$

(условие типа Линдеберга). Условие (6.2) в нижеследующих теоремах 8 и 9 весьма близко к необходимому. Нас интересует вопрос, какие ограничения (по-возможности, минимальные) надо наложить на пробную функцию V, чтобы семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ было плотным? Как и в § 4, ответ на поставленный вопрос зависит от скорости роста функции V. В теореме 8 рассматривается случай $V(x) = o(x^2)$ при $x \to \infty$. В теореме 9 рассматривается случай $V(x) \geq cx^2$, $c > 0$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (6.1) *и* (6.2). *Кроме того, пусть возрастающая функция V выпукла и допускает асимптотическое представление*

$$V(x) = xv(x)(1 + o(1)) \quad \text{при } x \to \infty,$$

где неотрицательная функция v вогнута. Тогда семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ плотно.

Доказательство. Заметим, что если v вогнута, то $V(2x) \leq 5V(x)$ при достаточно больших x. Ввиду этого замечания теорема вытекает из леммы 2 и теоремы 5 (если $v(x)/x \to 0$) и из леммы 3 и теоремы 6 (если $v(x) = cx$, $c > 0$).

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* (6.1) *и* (6.2). *Кроме того, пусть функция V допускает асимптотическое представление*

$$V(x) = x^2 L^{(k)}(x) v(\ln^{(k+1)} x)(1 + o(1)) \quad \text{при } x \to \infty,$$

где $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ (считаем $L^{(0)}(x) \equiv 1$), неотрицательная функция v вогнута, а функция $tv(\ln(1+t))$ выпукла. Тогда семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}, \delta \in \Delta\}$ плотно.

Доказательство. В случае $k = 0$ теорема следует из леммы 3 и теоремы 6. В случае $k \geq 1$ теорема следует из леммы 4 и теоремы 7.

В заключение отметим, как можно использовать полученные результаты для цепей Маркова со значениями в произвольном метрическом пространстве S. Предложенные нами доказательства позволяют заменить цепь Маркова $\{X_n^{(\delta)}\}$ со значениями в $\mathbf{R}^+$ на функцию от цепи Маркова. Именно, пусть $\{Y_n^{(\delta)}\}$ — цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве S, а $f : S \to \mathbf{R}^+$ и $V : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ суть неотрицательные функции. Пусть существуют x_* и $\varepsilon > 0$ такие, что при всех $\delta \in \Delta$ выполняется

$$a^{(\delta)}(t) \equiv \mathbf{E}\{V(f(Y_1^{(\delta)})) - V(f(t)) | Y_0^{(\delta)} = t\} \leq -\varepsilon,$$

если $f(t) \geq x_*$ и

$$\sup_{t \in S, \delta \in \Delta} a^{(\delta)}(t) < \infty.$$

Обозначим через $\eta_t^{(\delta)}$ случайную величину с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_t^{(\delta)} \in B\} = \mathbf{P}\{f(Y_1^{(\delta)}) - f(t) \in B | Y_0^{(\delta)} = t\}, \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^+).$$

Предположим, что семейство случайных величин $\{V(|\eta_t^{(\delta)}|)\}$ интегрируемо равномерно по $t \in S$ и $\delta \in \Delta$. Тогда, если функция V удовлетворяет условиям теорем 8 или 9, то семейство инвариантных мер $\{\pi^{(\delta)}(f^{-1}(\cdot)), \delta \in \Delta\}$ на $\mathbf{R}^+$ плотно.

Это утверждение можно применять к многомерным цепям Маркова в $(\mathbf{R}^+)^d$. Скажем, если одна из координат цепи (которая, как правило, сама по себе не является цепью Маркова) удовлетворяет условиям типа условий теорем 8 или 9, то семейство мер, соответствующих этой координате, плотно (как в следствии 2).

Литература

[1] Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. Springer–Verlag, London etc., 1993.

[2] Karr A. F. Weak convergence of a Sequence of Markov Chains. Z. Wahrscheinlichkeistheorie und verw. Gebiete., 1975, B. 33, S. 41–48.

[3] Малышев В. А., Меньшиков М. В. Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова. Тр. Московского математического общества, 1979, Т. 39, с. 3–48.

[4] Калашников В. В., Рачев С. Т. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М., Наука, 1988.

[5] Korshunov D. Transition phenomena for real-valued Markov chains. Siberian Adv. Math., 1993, V. 3, P. 53–100.

[6] Меньшиков М. В., Эйсымонт И. М., Ясногородский Р. Марковские процессы с асимптотически нулевым сносом. Проблемы хпередачи информации, 1995, Т. 31, №3, с. 60–75.

[7] Fayolle G., Malyshev V. A., Menshikov M. V. Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains. Cambridge Univ. Press, 1995.

[8] Lamperti J. Criteria for stochastic processes II: passage-time moments. J. Math. Anal. Appl. 7, 1963, P. 127–145.

[9] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

[10] Назаров Л. В., Смирнов С. Н. Оценивание моментов стационарного распределения цепи Маркова методом пробных функций. Вестник Московского ун-та, Сер. 15, 4, С. 43–48.

[11] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

[12] Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1983.

[13] Borovkov A. A., Fayolle G., Korshunov D. A. Transient phenomena for Markov chains and application. Adv. Appl. Probab., 1992, 24, P. 322–342.