Нижние пределы для хвостов распределений случайно остановленных сумм[1]

Д. Денисов,[2] Д. Коршунов[3] и С. Фосс[4]

Аннотация

Изучаются нижние пределы отношений $\frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)}$ хвостов распределений, где $F^{*\tau}$ — распределение суммы случайного числа τ независимых, одинаково распределенных случайных величин с общим распределением F, при этом τ не зависит от слагаемых.

Ключевые слова: хвост свертки распределений; случайные суммы случайных величин; нижний предел; распределения с тяжелыми и легкими хвостами.

1. Введение. Пусть ξ, ξ_1, ξ_2, ...— независимые одинаково распределенные случайные величины. Предполагаем, что их общее распределение F неограничено справа, т. е. $\overline{F}(x) \equiv F(x, \infty) > 0$ при всех x. Положим $S_0 = 0$ и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть τ — положительная целочисленная случайная величина, независящая от $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$. Обозначим через $F^{*\tau}$ распределение случайной суммы $S_\tau = \xi_1 + \ldots + \xi_\tau$. В настоящей работе изучаются нижние пределы (при $x \to \infty$) отношения $\frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)}$.

Мы разбиваем все распределения на два класса: распределения с тяжелыми и тонкими (правыми) хвостами. Случайная величина η имеет распределение с *тяжелым хвостом*, если $\mathbf{E}e^{\varepsilon\eta} = \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. В противном случае η имеет распределение с *легким хвостом*.

Мы рассматриваем только неотрицательные случайные величины и в случае, когда F имеет тяжелый хвост, находим условия, при которых

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)} \quad = \quad \mathbf{E}\tau. \tag{1}$$

Эта задача была полностью решена в [5] для $\tau = 2$, а затем в [3] в случае, когда τ имеет распределение с легким хвостом. В настоящей работе результаты [3] обобщаются на классы распределений τ, включающие в себя все распределения с легкими хвостами и некоторые распределения с тяжелыми хвостами. Каждому распределению F с тяжелым хвостом ставится в соответствие класс распределений τ. Более ранние результаты о нижних пределах и родственной задаче об определении константы K в эквивалентности $\overline{F^{*2}}(x) \sim K\overline{F}(x)$ можно найти, например, в [1, 2, 4, 7, 8] (см. также списки литературы в них).

Неравенство "$\geq$" в (1) верно для неотрицательных $\{\xi_n\}$ без каких-либо дополнительных ограничений (см., например, [9] или [3]). Следовательно, (1) заведомо верно, если $\mathbf{E}\tau = \infty$. Поэтому в дальнейшем рассматривается только случай $\mathbf{E}\tau < \infty$. Приведем первый результат.

Теорема 1. *Предположим, что $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом и $\mathbf{E}\xi < \infty$. Пусть при некотором $c > \mathbf{E}\xi$*

$$\mathbf{P}\{c\tau > x\} \quad = \quad o(\overline{F}(x)) \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{2}$$

Тогда справедливо (1).

[1]Работа Д. Денисова и С. Фосса частично поддержана грантом EPSRC EP/E033717/1. Д. Денисов благодарен EURANDOM (Eindhoven, The Netherlands) за всестороннюю поддержку в период его работы с 10/2004 по 3/2007. Работа С. Фосса и Д. Коршунова частично поддержана Royal Society International Joint Project Grant 2005/R2-JP. Работа Д. Коршунова частично поддержана Фондом содействия отечественной науке.

[2]Адрес: School of MACS, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK. E-mail: Denisov@ma.hw.ac.uk

[3]Адрес: Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Коптюга 4, Новосибирск 630090, Россия. E-mail: Korshunov@math.nsc.ru

[4]Адрес: School of MACS, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK; и Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Коптюга 4, Новосибирск 630090, Россия. E-mail: S.Foss@ma.hw.ac.uk и foss@math.nsc.ru

Доказательство теоремы 1 основано на исследовании моментов $\mathbf{E}e^{f(\xi)}$ для соответствующим образом подобранной функции f. Точнее говоря, теорема 1 получается как следствие следующего более общего результата, использующего некоторые идеи из [9, 5, 3].

Теорема 2. *Предположим, что* $\xi \geq 0$ *имеет распределение с тяжелым хвостом и* $\mathbf{E}\xi < \infty$. *Пусть существует функция* $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *такая, что*

$$\mathbf{E}e^{f(\xi)} = \infty \tag{3}$$

и для некоторого $c > \mathbf{E}\xi$

$$\mathbf{E}e^{f(c\tau)} < \infty. \tag{4}$$

Если $f(x) \geq \ln x$ *при всех достаточно больших* x *и если функция* $f(x) - \ln x$ *вогнута при всех достаточно больших* x, *то справедливо* (1).

В частности, равенство (1) выполняется, если $\mathbf{E}\xi^k = \infty$ и $\mathbf{E}\tau^k < \infty$ для некоторого $k \geq 1$; для этого достаточно рассмотреть функцию $f(x) = k \ln x$. Ранее это было доказано в [3, теорема 1] более простым методом, см. также [9].

Рассмотрение функции $f(x) = \gamma x$, $\gamma > 0$, приводит к равенству (1) при условии, что ξ имеет распределение с тяжелым хвостом, а τ — с легким. Этот результат составляет содержание теоремы 2 из [3].

Также равенство (1) верно, если F имеет распределение Вейбулла с параметром $\beta \in (0, 1)$, $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta}$ и $f(x) = x^\beta$ или, в более общем случае, $f(x) = x^\beta - c \ln x$ для $x \geq 1$, где $c \leq \beta$ — любая фиксированная константа.

Далее приводится естественное распространение теоремы 1 на случай легких хвостов. Для этого нам потребуются дополнительные обозначения. Под преобразованием Лапласа распределения F в точке $\gamma \in \mathbf{R}$ мы понимаем

$$\varphi(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma x} F(dx) \in (0, \infty].$$

Положим

$$\widehat{\gamma} = \sup\{\gamma : \varphi(\gamma) < \infty\} \in [0, \infty].$$

Заметим, что функция $\varphi(\gamma)$ монотонна и непрерывна в интервале $(-\infty, \widehat{\gamma})$, и что $\varphi(\widehat{\gamma}) = \lim_{\gamma \uparrow \widehat{\gamma}} \varphi(\gamma) \in [1, \infty]$.

Теорема 3. *Пусть* $\widehat{\gamma} \in (0, \infty)$ *и предположим, что значения* $\varphi(\widehat{\gamma})$ *и левой производной* $\varphi'(\widehat{\gamma})$ *конечны. Предположим, что для некоторого* $c > \varphi'(\widehat{\gamma})/\varphi(\widehat{\gamma})$

$$\mathbf{E}\{\varphi^\tau(\widehat{\gamma}); c\tau > x\} \quad = \quad o(\mathbf{E}\{e^{\widehat{\gamma}\xi}; \xi > x\}) \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{5}$$

Если для любого фиксированного $y > 0$

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \quad \geq \quad e^{\widehat{\gamma} y}, \tag{6}$$

то

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)} = \mathbf{E}\tau \varphi^{\tau - 1}(\widehat{\gamma}). \tag{7}$$

При $\widehat{\gamma} \downarrow 0$ условие (5) переходит по непрерывности в (2). В качестве простого достаточного для выполнения (5) условия можно предложить следующее:

$$\mathbf{E}(\varphi(\widehat{\gamma}) + \varepsilon)^\tau \quad < \quad \infty \qquad \text{для некоторого } \varepsilon > 0;$$

см. также лемму 4 в [3], в которой рассмотрен этот случай.

Примеры, построенные в [5], показывают, что без дополнительных условий типа (6) равенство (7) может не выполняться.

Статья организована следующим образом. В § 2 сформулирован и доказан общий результат, характеризующий распределения с тяжелыми хвостами на положительной полуоси. § 3 посвящен оценке функционала $\mathbf{E}e^{h(S_n)}$ для вогнутой функции h. § 4, 5 и 6 содержат доказательства теорем 2, 1 и 3 соответственно.

2. Характеризация распределений с тяжелыми хвостами. В [3, лемма 2] было доказано, что для любой случайной величины $\xi \geq 0$ с тяжелым хвостом и любого числа $\delta > 0$ существует возрастающая вогнутая функция $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такая, что $\mathbf{E}e^{h(\xi)} \leq 1 + \delta$ и $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)} = \infty$. В настоящем параграфе получен более общий результат.

Лемма 1. *Пусть случайная величина $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом. Пусть $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ — вогнутая функция, для которой*

$$\mathbf{E}e^{f(\xi)} = \infty. \tag{8}$$

Пусть функция $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такова, что $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда существует вогнутая функция $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такая, что $h \leq f$ и

$$\mathbf{E}e^{h(\xi)} < \infty, \qquad \mathbf{E}e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty.$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $f(0) = 0$. Построим функцию $h(x)$ на последовательных отрезках. Для этого введем две положительные последовательности $x_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ и $\varepsilon_n \in (0, 1]$. Положим $x_0 = 0$, $h(0) = f(0) = 0$, $h'(0) = f'(0)$ и

$$h(x) = h(x_{n-1}) + \varepsilon_n \min(h'(x_{n-1})(x - x_{n-1}), f(x) - f(x_{n-1})) \quad \text{при } x \in (x_{n-1}, x_n];$$

здесь h' — левая производная функции h. Функция h возрастает, так как $\varepsilon_n > 0$ и f возрастает. Более того, эта функция вогнута, так как $\varepsilon_n \leq 1$ и f вогнута. Поскольку $h(x) - h(x_{n-1}) \leq f(x) - f(x_{n-1})$ при $x \in (x_{n-1}, x_n]$, имеем $h \leq f$.

Перейдем непосредственно к построению x_n и ε_n. По условию $g(x) \to \infty$ и равенству (8) можно выбрать x_1 настолько большим, что $e^{g(x)} \geq 2^1$ для всех $x \geq x_1$ и

$$\mathbf{E}\{e^{\min(h'(0)\xi, f(\xi))}; \xi \in (x_0, x_1]\} + e^{\min(h'(0)x_1, f(x_1))}\overline{F}(x_1) \quad > \quad \overline{F}(x_0) + 1.$$

Выберем $\varepsilon_1 \in (0, 1]$ таким образом, чтобы

$$\mathbf{E}\{e^{\varepsilon_1 \min(h'(0)\xi, f(\xi))}; \xi \in (x_0, x_1]\} + e^{\varepsilon_1 \min(h'(0)x_1, f(x_1))}\overline{F}(x_1) \quad = \quad \overline{F}(x_0) + 1.$$

Положим $h(x) = \varepsilon_1 \min(x, f(x))$ для $x \in (0, x_1]$. Тогда последнее равенство эквивалентно такому:

$$\mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_0, x_1]\} + e^{h(x_1)}\overline{F}(x_1) \quad = \quad e^{h(x_0)}\overline{F}(x_0) + 1/2.$$

По индукции можно построить возрастающую последовательность x_n и последовательность $\varepsilon_n \in (0, 1]$ такие, что $e^{g(x)} \geq 2^n$ при всех $x \geq x_n$ и

$$\mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_{n-1}, x_n]\} + e^{h(x_n)}\overline{F}(x_n) \quad = \quad e^{h(x_{n-1})}\overline{F}(x_{n-1}) + 1/2^n$$

для всех $n \geq 1$. Действительно, при $n = 1$ это уже сделано. Допустим, что построение выполнено при некотором $n \geq 2$. Для любого $x > x_n$ обозначим

$$\delta(x, \varepsilon) \equiv e^{h(x_n)} \Big(\mathbf{E}\{e^{\varepsilon \min(h'(x_n)(\xi - x_n), f(\xi) - f(x_n))}; \xi \in (x_n, x]\} + e^{\varepsilon \min(h'(x_n)(x - x_n), f(x) - f(x_n))} \overline{F}(x) \Big).$$

Поскольку $g(x) \to \infty$ и ξ имеет распределение с тяжелым хвостом, то по условию (8) найдется x_{n+1} настолько большое, что $e^{g(x)} \geq 2^{n+1}$ при всех $x \geq x_{n+1}$ и

$$\delta(x_{n+1}, 1) > e^{h(x_n)} \overline{F}(x_n) + 1.$$

Заметим, что функция $\delta(x_{n+1}, \varepsilon)$ непрерывно убывает и стремится к $e^{h(x_n)} \overline{F}(x_n)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому можно выбрать $\varepsilon_{n+1} \in (0, 1]$ так, что

$$\delta(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) = e^{h(x_n)} \overline{F}(x_n) + 1/2^{n+1}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_n, x_{n+1}]\} + e^{h(x_{n+1})} \overline{F}(x_{n+1}) = e^{h(x_n)} \overline{F}(x_n) + 1/2^{n+1}.$$

Таким образом доказан индукционный переход от n к $n + 1$, что и требовалось показать.

Далее, для любого N

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \leq x_{N+1}\} &= \sum_{n=0}^{N} \mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_n, x_{n+1}]\} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \Big(e^{h(x_n)} \overline{F}(x_n) - e^{h(x_{n+1})} \overline{F}(x_{n+1}) + 1/2^{n+1} \Big) \\ &\leq e^{h(x_0)} \overline{F}(x_0) + 1, \end{aligned}$$

так что $\mathbf{E}e^{h(\xi)}$ конечно. С другой стороны, так как $e^{g(x)} \geq 2^k$ при всех $x \geq x_k$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{e^{h(\xi)+g(\xi)}; \xi > x_n\} &\geq 2^n \Big(\mathbf{E}\{e^{h(\xi)}; \xi \in (x_n, x_{n+1}]\} + e^{h(x_{n+1})} \overline{F}(x_{n+1}) \Big) \\ &= 2^n (e^{h(x_n)} \overline{F}(x_n) + 1/2^{n+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{E}\{e^{h(\xi)+g(\xi)}; \xi > x_n\} \geq 1/2$ при любом n, что влечет $\mathbf{E}e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty$. Доказательство завершено.

Лемма 2. *Пусть случайная величина $\xi \geq 0$ имеет распределение с тяжелым хвостом. Пусть $f_1 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ — любая измеримая функция, а $f_2 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ — вогнутая функция такие, что*

$$\mathbf{E}e^{f_1(\xi)} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}e^{f_1(\xi)+f_2(\xi)} = \infty.$$

Пусть функция $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такова, что $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда существует вогнутая функция $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такая, что $h \leq f_2$,

$$\mathbf{E}e^{f_1(\xi)+h(\xi)} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}e^{f_1(\xi)+h(\xi)+g(\xi)} = \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим новую вероятностную меру $\mathbf{P}^*$, определенную следующим образом:

$$\mathbf{P}^*\{d\omega\} = \frac{e^{f_1(\xi(\omega))}\mathbf{P}\{d\omega\}}{\mathbf{E}e^{f_1(\xi)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}^* e^{f_2(\xi)} = \frac{\mathbf{E}e^{f_1(\xi)+f_2(\xi)}}{\mathbf{E}e^{f_1(\xi)}} = \infty.$$

В частности, ξ имеет распределение с тяжелым хвостом относительно меры $\mathbf{P}^*$. Поэтому из леммы 1 вытекает, что найдется вогнутая функция $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такая, что $h \le f_2$, $h(x) = o(x)$, $\mathbf{E}^* e^{h(\xi)} < \infty$ и $\mathbf{E}^* e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty$. Это эквивалентно тому, что

$$\mathbf{E}e^{f_1(\xi)+h(\xi)} = \mathbf{E}e^{f_1(\xi)}\mathbf{E}^* e^{h(\xi)} < \infty$$

и

$$\mathbf{E}e^{f_1(\xi)+h(\xi)+g(\xi)} = \mathbf{E}e^{f_1(\xi)}\mathbf{E}^* e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty.$$

Доказательство завершено.

3. Скорость роста сумм в терминах обобщенных моментов. Согласно закону больших чисел сумма S_n растет как $n\mathbf{E}\xi$. В следующей лемме приводятся условия на функцию $h(x)$, гарантирующие правильный рост функционала $\mathbf{E}e^{h(S_n)}$.

Лемма 3. *Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Пусть $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ — неубывающая функция, вогнутая при достаточно больших x, $h(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ и $h(x) \ge \ln x$ при всех достаточно больших x. Если $\mathbf{E}e^{h(\xi)} < \infty$, то при любом $c > \mathbf{E}\xi$ найдется константа $K(c)$ такая, что $\mathbf{E}e^{h(S_n)} \le K(c)e^{h(nc)}$ при всех n.*

Для доказательства этой леммы нам необходимо следующее утверждение, обобщающее соответствующую оценку из [6]:

Лемма 4. *Пусть η — случайная величина, причем $\mathbf{E}\eta < 0$. Пусть $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — неубывающая функция, вогнутая при всех достаточно больших x, $h(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ и $h(x) \ge \ln x$ для всех достаточно больших x. Если $\mathbf{E}e^{h(\eta)} < \infty$, то существует x_0 такое, что при всех $x > x_0$ выполняется неравенство $\mathbf{E}e^{h(x+\eta)} \le e^{h(x)}$.*

Доказательство. Поскольку h не убывает, то без ограничения общности можно предполагать, что случайная величина η ограничена снизу, т. е. $\eta \ge M$ для некоторого M. Также можно предполагать, что h неотрицательна и вогнута на всей положительной полуоси $[0, \infty)$.

Так как h вогнута, то $h'(x)$ не возрастает. С необходимостью $h'(x) \to 0$ при $x \to \infty$, в противном случае нарушается условие $h(x) = o(x)$. Если $h'(x) = 0$ при всех достаточно больших x, то h постоянна с некоторого момента и утверждение леммы очевидно.

Рассмотрим теперь случай, когда $h'(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и $h'(x) > 0$ для всех x. Положим $g(x) \equiv 1/h'(x)$, тогда $g(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$. Поскольку $\mathbf{E}\eta < 0$, то можно выбрать достаточно большое A такое, что

$$\varepsilon \equiv \mathbf{E}\{\eta; \eta \in [M, A]\} + e\mathbf{E}\{\eta; \eta > A\} \quad < \quad 0. \tag{9}$$

Вогнутость h влечет при всех x и $y \in \mathbf{R}$ неравенство $h(x+y) - h(x) \le h'(x)y$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{h(x+\eta)-h(x)} \quad &\le \quad \mathbf{E}\{e^{h'(x)\eta}; \eta \in [M, A]\} + \mathbf{E}\{e^{h'(x)\eta}; \eta \in (A, g(x)]\} \\ &\qquad +\mathbf{E}\{e^{h(x+\eta)-h(x)}; \eta > g(x)\} \\ &\equiv \quad E_1 + E_2 + E_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку $h'(x) \to 0$, то из разложения экспоненциальной функции в ряд Тейлора с точностью до линейного члена получаем при $x \to \infty$

$$E_1 \quad = \quad \mathbf{P}\{\eta \in [M, A]\} + h'(x)\mathbf{E}\{\eta; \eta \in [M, A]\} + o(h'(x)). \tag{11}$$

На событии $\eta \in (A, g(x)]$ выполнено $h'(x)\eta \leq 1$ и, значит, $e^{h'(x)\eta} \leq 1 + eh'(x)\eta$. Тогда

$$E_2 \quad \leq \quad \mathbf{P}\{\eta \in (A, g(x)]\} + eh'(x)\mathbf{E}\{\eta; \eta \in (A, g(x)]\}. \tag{12}$$

Имеем

$$E_3 \quad = \quad \mathbf{E}\{e^{h(\eta)}e^{h(x+\eta)-h(x)-h(\eta)}; \eta > g(x)\}. \tag{13}$$

Так как функция h вогнута, то при $x > 0$ разность $h(x + y) - h(y)$ не возрастает по y. Следовательно, при всех $y > g(x)$,

$$\begin{aligned} h(x+y) - h(x) - h(y) &\leq h(x + g(x)) - h(x) - h(g(x)) \\ &\leq h'(x)g(x) - h(g(x)) \\ &= 1 - h(g(x)) \\ &\leq 1 - \ln g(x) \end{aligned}$$

в силу неравенства $h(x) \geq \ln x$ при всех достаточно больших x. Эта оценка и (13) влекут

$$\begin{aligned} E_3 &\leq \mathbf{E}\{e^{h(\eta)}; \eta > g(x)\}e^{1-\ln g(x)} \\ &= o(1)/g(x) = o(h'(x)) \quad \text{при } x \to \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

ввиду условия $\mathbf{E}e^{h(\eta)} < \infty$. Подставляя (11), (12) и (14) в (10) и принимая во внимание выбор (9) величины A, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{h(x+\eta)} &= e^{h(x)}\mathbf{E}e^{h(x+\eta)-h(x)} \\ &\leq e^{h(x)}(1 + h'(x)\varepsilon + o(h'(x))) \quad \text{при } x \to \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon < 0$, последняя оценка влечет неравенство $\mathbf{E}e^{h(x+\eta)} < e^{h(x)}$ при всех достаточно больших x. Доказательство завершено.

Доказательство леммы 3. Положим $\eta_n = \xi_n - c$. Тогда $\mathbf{E}\eta_n < 0$ и $\mathbf{E}e^{h(\eta_n)} < \infty$. В силу леммы 4 найдется число $x_0 > 0$ такое, что $\mathbf{E}e^{h(x+\eta_n)} \leq \mathbf{E}e^{h(x)}$ при $x > x_0$. Поэтому из монотонности $h(x)$ и неотрицательности S_{n-1} следуют неравенства

$$\mathbf{E}e^{h(S_n)} \quad \leq \quad \mathbf{E}e^{h(S_n+x_0)} = \mathbf{E}e^{h(S_{n-1}+x_0+c+\eta_n)} \leq \mathbf{E}e^{h(S_{n-1}+x_0+c)}.$$

Воспользовавшись индукцией, получаем $\mathbf{E}e^{h(S_n)} \leq e^{h(cn+x_0)} \leq e^{h(cn)}e^{h(x_0)}$. Доказательство завершено.

4. Доказательство теоремы 2. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, сформулируем следующее утверждение из [3, следствие 1]:

Предложение 1. *Пусть существует вогнутая функция* $r : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *такая, что* $\mathbf{E}e^{r(\xi)} < \infty$ *и* $\mathbf{E}\xi e^{r(\xi)} = \infty$. *Если распределение* F *имеет тяжелый хвост и* $\mathbf{E}\tau e^{r(S_{\tau-1})} < \infty$, *то справедливо* (1).

Нам понадобятся также два вспомогательных технических результата.

Лемма 5. *Пусть* $\chi \geq 0$ *— некоторая случайная величина. Тогда существует дифференцируемая вогнутая функция* $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *такая, что* $g(0) = 0$, $g'(x) \leq 1$ *при всех* x, $g(x) \to \infty$ *при* $x \to \infty$ *и* $\mathbf{E}e^{g(\chi)} < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1}$ и $\mathbf{P}\{\chi > x_n\} \le e^{-n}$. Положим $g_1(x_n) = n/2$ и определим g линейным образом между этими точками. Тогда при всех $x \in (x_n, x_{n+1})$ и $y \in (x_{n+1}, x_{n+2})$

$$g_1'(x) = \frac{1}{2(x_{n+1} - x_n)} > \frac{1}{2(x_{n+2} - x_{n+1})} = g_1'(y),$$

так что g_1 вогнута. По построению, $g_1(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$ и $g_1'(x) \le 1$ в точках, где производная существует. Наконец,

$$\mathbf{E}e^{g_1(\chi)} \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{g_1(x_{n+1})}\mathbf{P}\{\chi > x_n\} \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+1)/2}e^{-n} < \infty.$$

Применение процедуры сглаживания, например, $g(x) = \int_x^{x+1} g_1(y)dy - \int_0^1 g_1(y)dy$, завершает доказательство.

Лемма 6. *Пусть $\chi \ge 0$ — такая случайная величина, что $\mathbf{E}e^{f(\chi)} = \infty$ для некоторой вогнутой функции $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$. Тогда найдется вогнутая функция $f_1 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такая, что $f_1 \le f$, $f_1(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ и $\mathbf{E}e^{f_1(\chi)} = \infty$.*

Доказательство. Возьмем x_1 настолько большим, что $\mathbf{E}\{e^{\min(\chi, f(\chi))}; \chi \le x_1\} \ge 1$ и положим $f_1(x) = \min(x, f(x))$ при $x \in [0, x_1]$. Тогда для любого n можно выбрать по индукции число x_{n+1} так, что

$$\mathbf{E}\{e^{f_1(x_n)+\min(n^{-1}f_1'(x_n)(\chi - x_n), f(\chi)-f(x_n))}; \chi \in (x_n, x_{n+1}]\} \ge 1.$$

Положим $f_1(x) = f_1(x_n) + \min(n^{-1}f_1'(x_n)(x - x_n), f(x) - f(x_n))$ при $x \in (x_n, x_{n+1}]$. По построению f_1 вогнута, $f_1 \le f$ и $f_1'(x_{n+1}) \le f_1'(x_n)/n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно предполагать, что $f(x) \ge \ln x$ при всех x и что функция $f_2(x) \equiv f(x) - \ln x$ вогнута на всей положительной полуоси. Ввиду леммы 6 и рассуждений, связанных с заменой меры и аналогичных приведенным в доказательстве леммы 2, можно с самого начала предполагать, что

$$f(x) = o(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Далее, можно утверждать, что существует вогнутая функция $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такая, что $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, $g(x) \le \ln x$ при всех достаточно больших x, разность $\ln x - g(x)$ является неубывающей функцией и

$$\mathbf{E}e^{f(c\tau)+g(c\tau)} < \infty.$$

В самом деле, в силу леммы 5 и с использованием замены меры существует дифференцируемая вогнутая функция $g_1 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такая, что $g_1(0) = 0$, $g_1(x) \uparrow \infty$, $g_1'(x) \le 1$ и $\mathbf{E}e^{f(c\tau)+g_1(c\tau)} < \infty$. Положим $g(x) = g_1(\ln(x+1)) - 1$. Тогда g — монотонная функция, возрастающая к бесконечности, и $g(x) \le \ln x$ при всех достаточно больших x. Кроме того,

$$(\ln x - g(x))' = 1/x - g_1'(\ln(x+1))/(x+1) \ge 0,$$

так что разность $\ln x - g(x)$ не убывает, что и требовалось показать.

Поскольку функция $f_2(x)$ вогнута, то в силу леммы 2 при $f_1(x) = \ln x$ существует вогнутая функция h такая, что $h \le f_2$, $h(x) = o(x)$, $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)} < \infty$ и $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)+g(\xi)} = \infty$. Поскольку $\ln x + h(x) + g(x) \le f(x) + g(x)$, то по условию (4) и по выбору g,

$$\mathbf{E}\tau e^{h(c\tau)+g(c\tau)} < \infty. \tag{15}$$

Вогнутая функция $r(x) = h(x)+g(x)$ удовлетворяет всем условиям предложения 1. Действительно, из неравенства $g(x) \leq \ln x$ при всех достаточно больших x следует $\mathbf{E}e^{r(\xi)} < \infty$, так как $\mathbf{E}\xi e^{h(\xi)} < \infty$. Осталось проверить, что $\mathbf{E}\tau e^{r(S_{\tau-1})} < \infty$. Поскольку из (15) вытекает

$$\mathbf{E}\{\tau e^{r(S_\tau)}; S_\tau \leq c\tau\} \leq \mathbf{E}\tau e^{r(c\tau)} < \infty,$$

то достаточно показать, что

$$\mathbf{E}\{\tau e^{r(S_\tau)}; S_\tau > c\tau\} < \infty.$$

Рассмотрим следующее представление:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{c\tau e^{r(S_\tau)}; S_\tau > c\tau\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} cn \mathbf{E}\{e^{r(S_n)}; S_n > cn\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} e^{g(cn)+\ln(cn)-g(cn)} \mathbf{E}\{e^{h(S_n)+g(S_n)}; S_n > cn\}.\end{aligned}$$

Так как разность $\ln x - g(x)$ является монотонной функцией, получаем следующую оценку:

$$\mathbf{E}\{c\tau e^{r(S_\tau)}; S_\tau > c\tau\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} e^{g(cn)} \mathbf{E}\{e^{\ln S_n + h(S_n)}; S_n > cn\},$$

Поскольку функция $\ln x + h(x)$ вогнута и $\ln x + h(x) \geq \ln x$, то по лемме 3

$$\mathbf{E}e^{\ln S_n + h(S_n)} \leq K(c) e^{\ln(nc)+h(cn)}$$

для некоторого $K(c) < \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{c\tau e^{r(S_\tau)}; S_\tau > c\tau\} &\leq K(c) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = n\} e^{g(cn)} e^{\ln(cn)+h(nc)} \\ &= K(c) c \mathbf{E}\tau e^{h(c\tau)+g(c\tau)} < \infty,\end{aligned}$$

с учетом (15). Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Обозначим через G распределение $c\tau$.

Построим возрастающую вогнутую функцию $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ такую, что

$$\mathbf{E}\xi e^{f(\xi)} = \infty \qquad \text{и} \qquad \mathbf{E}\tau e^{f(c\tau)} < \infty. \tag{16}$$

Тогда нужное соотношение (1) будет следовать из теоремы 2.

Если распределение G имеет легкий хвост, то можно положить $f(x) = \lambda x$ при некотором достаточно маленьком $\lambda > 0$. Далее будем предполать, что G имеет тяжелый хвост.

Рассмотрим новые случайные величины ξ_* и τ_* со следующими распределениями:

$$\mathbf{P}\{\xi_* \in dx\} = \frac{xF(dx)}{\mathbf{E}\xi} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\tau_* = n\} = \frac{n\mathbf{P}\{\tau = n\}}{\mathbf{E}\tau}.$$

Обозначим через F_* и G_* распределения ξ_* и $c\tau_*$ соответственно. Тогда оба распределения F_* и G_* имеют тяжелые хвосты и

$$\overline{G}_*(x) \ = \ o(\overline{F}_*(x)) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{17}$$

Распределение G_* имеет тяжелый хвост тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^\infty \overline{G}_*(\varepsilon^{-1}\ln x)dx \equiv \int_0^\infty e^x \overline{G}_*(x/\varepsilon)dx \ = \ \infty. \tag{18}$$

В терминах новых распределений F_* и G_* условия (16) могут быть переформулированы следующим образом: необходимо построить возрастающую вогнутую функцию f такую, что $\mathbf{E}e^{f(\xi_*)} = \infty$ и $\mathbf{E}e^{f(c\tau_*)} < \infty$, или, что эквивалентно,

$$\int_1^\infty \overline{F}_*(f^{-1}(\ln x))dx = \infty \qquad \text{и} \qquad \int_1^\infty \overline{G}_*(f^{-1}(\ln x))dx < \infty. \tag{19}$$

Вогнутость f эквивалентна выпуклости обратной функции $h = f^{-1}$. Поэтому условия (19) могут быть переформулированы так: надо найти возрастающую выпуклую функцию h такую, что

$$\int_0^\infty e^x \overline{F}_*(h(x))dx = \infty \qquad \text{и} \qquad \int_0^\infty e^x \overline{G}_*(h(x))dx < \infty. \tag{20}$$

Построим $h(x)$ в виде кусочно-линейной функции. Для этого введем две возрастающие последовательности, скажем $x_n \uparrow \infty$ и $a_n \uparrow \infty$, и положим

$$h(x) \quad = \quad h(x_n) + a_n(x - x_n) \qquad \text{при } x \in (x_n, x_{n+1}].$$

Тогда выпуклость f будет следовать из возрастания $\{a_n\}$.

Положим $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Согласно (17) и (18), можно выбрать x_1 настолько большим, что

$$\frac{\overline{F}_*(y)}{\overline{G}_*(y)} \quad \geq \quad 2^1$$

для всех $y > x_1$ и

$$\int_0^{x_1} e^x \overline{G}_*(h(x_0) + 1 \cdot (x - x_0))dx \quad \geq \quad 1.$$

Тогда существует достаточно большое $a_0 \geq 1$, для которого

$$\int_0^{x_1} e^x \overline{G}_*(h(x_0) + a_0(x - x_0))dx \quad = \quad 1.$$

Теперь воспользуемся индукцией для построения возрастающих последовательностей $\{x_n\}$ и $\{a_n\}$ таких, что

$$\frac{\overline{F}_*(y)}{\overline{G}_*(y)} \quad \geq \quad 2^{n+1} \tag{21}$$

при всех $y > x_{n+1}$ и

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \overline{G}_*(h(x))dx \quad = \quad 2^{-n}.$$

При $n = 0$ это уже сделано. Предположим, что построение проведено для некоторого $n \geq 1$. Для любого $x > x_{n+1}$ обозначим

$$\delta(x, a) \quad \equiv \quad \int_{x_{n+1}}^x e^y \overline{G}_*(h(x_{n+1} + a(y - x_{n+1})))dy.$$

Согласно (17) и (18), можно выбрать x_{n+2} настолько большим, что

$$\frac{\overline{F}_*(y)}{\overline{G}_*(y)} \quad \geq \quad 2^{n+2}$$

при всех $y > x_{n+2}$ и

$$\delta(x_{n+2}, a_n) \quad \geq \quad 1.$$

Поскольку функция $\delta(x_{n+2}, a)$ непрерывно убывает к 0 при $a \uparrow \infty$, можно выбрать число $a_{n+1} > a_n$ таким, что

$$\delta(x_{n+2}, a_{n+1}) \quad = \quad 2^{-(n+1)}.$$

Тогда

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} e^x \overline{G}_*(h(x))dx \quad = \quad 2^{-(n+1)}.$$

Таким образом доказан индукционный переход от n к $n+1$.

Это означает, что имеет место (20), поскольку по построению функции h

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^x \overline{G}_*(h(x))dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \overline{G}_*(h(x))dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} < \infty \end{aligned}$$

и, ввиду (21),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^x \overline{F}_*(h(x))dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \overline{F}_*(h(x))dx \\ &\geq \sum_{n=0}^\infty 2^n \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x \overline{G}_*(h(x))dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty 2^n 2^{-n} = \infty. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

6. Доказательство теоремы 3. Условие (6) и стандартные рассуждения (см. лемму 7 в [5]) приводят к неравенству

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)} \quad \geq \quad \mathbf{E}\tau\varphi^{\tau-1}(\widehat{\gamma}).$$

Таким образом, достаточно доказать обратное неравенство.

Произведем экспоненциальную замену меры с параметром $\widehat{\gamma}$ и рассмотрим распределение $G(du) = e^{\widehat{\gamma}u}F(du)/\varphi(\widehat{\gamma})$ и момент остановки ν с распределением $\mathbf{P}\{\nu = k\} = \varphi^k(\widehat{\gamma})\mathbf{P}\{\tau = k\}/\mathbf{E}\varphi^\tau(\widehat{\gamma})$. Заметим, что $\mathbf{E}\varphi^\tau(\widehat{\gamma})$ конечно ввиду условия (5).

Из [3, лемма 3] следует, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G^{*\nu}}(x)}{\overline{G}(x)} \quad \geq \quad \frac{1}{\mathbf{E}\varphi^{\tau-1}(\gamma)} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)}. \tag{22}$$

Из определения $\widehat{\gamma}$ вытекает, что распределение G имеет тяжелый хвост со средним $\varphi'(\widehat{\gamma})/\varphi(\widehat{\gamma})$. Поэтому можно применить теорему 1 к G и ν, поскольку (5) эквивалентно условию

$$\mathbf{P}\{c\nu > x\} \quad = \quad o(\overline{G}(x)) \quad \text{ при } x \to \infty. \tag{23}$$

Следовательно, выполняется равенство

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G^{*\nu}}(x)}{\overline{G}(x)} \quad = \quad \mathbf{E}\nu = \frac{\mathbf{E}\tau\varphi^{\tau}(\widehat{\gamma})}{\mathbf{E}\varphi^{\tau}(\widehat{\gamma})},$$

и, согласно (22),

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)} \quad \leq \quad \mathbf{E}\tau\varphi^{\tau-1}(\widehat{\gamma}). \tag{24}$$

Доказательство завершено.

Список литературы

1. Chover, J., Ney, P. and Wainger, S., 1973. Functions of probability measures. *J. Anal. Math.* 26, 255–302.
2. Cline, D., 1987. Convolutions of distributions with exponential and subexponential tailes. *J. Aust. Math. Soc.* 43, 347–365.
3. Denisov, D., Foss, S. and Korshunov, D. On lower limits and equivalences for tails of randomly stopped sums. Submitted.
4. Embrechts, P. and Goldie, C. M., 1982. On convolution tails. *Stochastic Process. Appl.* 13, 263–278.
5. Foss, S. and Korshunov, D., 2007. Lower limits and equivalences for convolution tails. *Ann. Probab.* 35, 366–383.
6. Foss, S. and Sapozhnikov, A., 2004. On the existence of moments for the busy period in the single-server queue. *Math. Oper. Research* 29, 592–601.
7. Pakes, A. G., 2004. Convolution equivalence and infinite divisibility. *J. Appl. Probab.* 41, 407–424.
8. Рогозин, Б. А., 1999. О постоянной в определении субэкспоненциальных распределений. *Теор. вероятн. примен.* 44, 455–458.
9. Rudin, W., 1973. Limits of ratios of tails of measures. *Ann. Probab.* 1, 982–994.